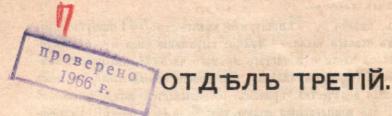


H 1 4 21 on the all all his 1 4 2445



и НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ и ВЫСІ

Мнимыя величины и действій надъ ними. - Задачи.

434. Происхожденіе мнимыхъ количествъ. - Мы видёли, что извлеченіе корня привело къ открытію двоякаго рода новыхъ величинъ-несоизмъримыхъ и мнимыягь. Съ величинами перваго рода мы уже ознакомились; переходимъ къ изученію величинъ втораго рода — мнимыхъ.

Пусть требуется извлечь √-49; очевидно, что по абсолютной величинъ этотъ корень равняется 7; но онъ не можетъ быть равенъ ни +7, ни -7. ибо и  $(+7)^2$  и  $(-7)^2$  дають +49. Такимъ образомъ, квадратный корень изъ отрицательнаго числа не м. б. выраженъ никакимъ положительнымъ и никакимъ отрицательнымъ числомъ. Къ тому-же заключению придемъ и относительно  $\sqrt[4]{-81}$ ,  $\sqrt[8]{-17}$ , вообще относительно  $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$ . Итакъ, вообще: корень четной степени изъ отрицательнаго числа не м. б. выраженъ ни положительнымъ, ни отрицательнымъ числомъ, и представляетъ поэтому новый разрядъ величинъ: ихъ называють мнимыми, въ отинче отъ обыкновенныхъ положительныхъ и отрицательныхъ чесель, называемыхъ дъйствительными.

435. Приведеніе мнимаго количества нъ виду а.√-1. — Всякое мнимое количество приводится въ зависимость отъ простейшаго мнимаго выраженія: √-1. Въ самомъ дълъ, имъя мнимое выражение у 49 и разложивъ - 49 на множители  $49 \times -1$ , а затъмъ примънивъ правило извлеченія корня изъ произведенія, последовательно найдемъ:

$$\sqrt{-49} = \sqrt{49} \times -1 = \sqrt{49} \times \sqrt{-1} = \pm 7.\sqrt{-1}$$
; и вообще  $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \cdot -1} = \sqrt{a^2 \cdot \sqrt{-1}} = \pm a\sqrt{-1}$ .

Отсюда видно, что всякое мнимое количество можно представить подъ видомъ произведенія изъ  $\sqrt{-1}$  на нѣкоторое положит. или отрицат. (соизмѣримое или несоизм.) число; слѣд. мнимое число составляется изъ  $\sqrt{-1}$  точно такимъ же образомъ, какъ дѣйствительное число изъ положительной или отрицат. единицы. Поэтому  $\sqrt{-1}$  разсматриваютъ какъ пѣкоторую новую, особаго рода, единицу, и называютъ ее мнимою единицею. Гауссъ предложилъ обозначить ее буквою i. Знакъ i Коши называлъ ключемъ.

Такимъ образомъ, вмёсто  $5\sqrt{-1}$  пишуть 5i; вмёсто  $\pm a\sqrt{-1}$  пишуть  $\pm ai$ . 436. Общій видъ всянаго числа. — Мнимое выраженіе вида a+bi, состоящее изъ дёйствительной части a и чистаго мнимаго члена bi, называется комплекснымъ количествомъ (т. е. составнымъ) или просто комплексомъ; въ немъ a и b — дёйствительныя количества, причемъ b называется коэффиціентомъ при мнимой единицѣ. Два комплексныя количества: a+bi и a-bi, различающіяся только знаками коэффиціента b, называются сопряженными.

Комплексное количество есть самая общая форма чисель: въ немъ заключаются дъйствительныя и чистыя мнимыя числа какъ частные случаи. Въ самомъ дълъ, подагая b = 0, получаемъ дъйствительное количество a; полагая же a = 0, находимъ чистое мнимое количество bi.

Модуль.—Абсолютная величина квадратнаго корня изъ суммы квадратовъ дъйствительной части и коэффиціента при мнимомъ знакъ i, т. е.  $\sqrt{a^2+b^2}$ , наз. модулемъ комплекснаго выраженія. Такимъ образомъ:

модуль комплекса 3+4i равенъ  $\sqrt{3^2+4^2}=5;$  модуль комплекса 7-8i равенъ  $\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}.$ 

Если въ выраженіи a+bi положить b=0, то комплексъ дасть дёйствительное количество a; модуль же обратится въ  $\sqrt{a^2}=a$ , т. е. модуль дъйствительнаго количества равень его абсолютной величинь.

**437.** Степени *i.* — Прежде всего мы должны разсмотръть возвышение въстепень мнимой единицы *i*.

- 1. Очевидно,  $i^1 = (\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$ .
- $2.-i^2=(\sqrt{-1})^2;$  нахожденіе результата можеть новести въ данномъ случать въ натоторымъ недоразумѣніямъ, и потому требуетъ разъясненія. По опредѣленію корня имѣемъ  $(\sqrt{-1})^2=-1;$  съ другой стороны;  $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=\sqrt{+1}=\pm 1;$  спрашивается, что же брать для  $i^2:-1,$  или  $\pm 1?$  Везу разъясниять это недоразумѣніе, замѣчая, что когда мы не знаемъ происхожденія подкореннаго количества въ формулѣ  $\sqrt{a^2}$ , то должны брать для корня двойной знакъ, т. е. полагать  $\sqrt{a^2}=\pm a;$  но когда знаемъ происхожденіе подкореннаго количества, т. е. знаемъ, получилось-ли  $a^2$  отъ умноженія (+a)(+a), или же отъ умноженія (-a)(-a), то корень слѣдуетъ брать съ однимъ знакомъ: въ первомъ случать съ +, во второмъ съ -. Этотъ случай, очевидно, относится къ выраженію  $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{+1}:$  здѣсь подкоренное число +1 получилось отъ возвышенія въ квадратъ -1, а не +1, а потому для  $\sqrt{+1}$  ез данномъ случать надо брать значеніе: -1. Этимъ всякое недоразумѣніе устранено. Итакъ,  $i^2=-1.$

3. 
$$-i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$$
, или  $-i$ .  
4.  $-i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \times -1 = +1$ .

Возводя затъмъ і въ слъдующія высшія степени, найдемъ прежнія значенія степеней. Такъ:

$$i^5 = i^4 \cdot i = +1 \cdot i = +i;$$
  $i^6 = i^4 \cdot i^2 = +1 \cdot -1 = -1;$   $i^7 = i^6 \cdot i = -i;$   $i^8 = i^4 \cdot i^4 = +1$  m T. R.

Можно доказать, что и при дальнъйшемъ увеличении показателей будутъ періодически повторяться все тъ же четыре значенія степеней, т. е. +i, -1, -i и +1. Въ самомъ дълъ, по отношенію къ дълителю 4 всъ цълыя числа можно разбить на четыре группы: 1) числа, дълящіяся на 4 безъ остатка; 2) числа, дающія при дъленіи на 4 въ остаткъ 1; 3) числа, дающія при дъленіи на 4 въ остаткъ 2; 4) дающія, при дълитель -4, остатокъ 3. Всъ они заключаются, поэтому, въ четырехъ формулахъ: 4n, 4n +1, 4n +2, 4n +3, гдъ n — какое угодно цълое положительное число.

Давая показателю каждую изъ этихъ четырехъ формъ, получимъ послъ-довательно:

$$1. -i^{4n} = (i^4)^n = (+1)^n = +1.$$

$$2. -i^{i_{n+1}} = i^{i_n}.i = +1.i = +i.$$

$$3. - i^{i_{1}+2} = i^{i_{1}}.i^{2} = +1. -1 = -1.$$

$$4. - i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = +1. -i = -i.$$

Отсюда заключаемъ: век четныя степени і дъйствительны, и равны: +1, коїда показатель есть число кратное 4, u-1, коїда четный показатель не дълится безг остатка на 4; вск нечетныя степени і мнимы, и равны: +1, коїда показатель при дъленіи на 4 даеть остатокъ 1, u-1, коїда при дъленіи показателя на 4 получается остатокъ 3.

Напр., при дъленіи 17 на 4 остатокъ =1, слъд.  $i^{17}=+i$ , и т. д.

438. Теорема. — Утобы комплекся a + bi равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы дъйствительная часть и коэффиціент при і равнялись нулю, т. е. чтобы a = o и b = o.

Въ самомъ дѣлѣ, равенство a+bi=o даетъ a=-bi, откуда, возвышая обѣ части въ квадратъ, и замѣчая, что

$$a^2 = -1$$
, имбемъ:  $a^2 = b^2 - 1$ , или  $a^2 = -b^2$ , откуда  $a^2 + b^2 = 0$ .

Но сумма квадратовъ двухъ дъйствительныхъ количествъ a и b тогда только можетъ равняться нулю, когда каждое количество отдълено равно нулю; сл. a=o и b=o.

Обратно, если a=o и b=o, то оба члена комплекса обращаются въ o, и слъд. a+bi=o.

439. Теорема. — Чтобы два комплекса были равны, необходимо и достаточно итобы дыйствительныя части и коэффиціенты при і были отдъльно равны между собою.

Въ самомъ дълъ, изъ уравненія

$$a + bi = \alpha + \beta i$$

по перенесеніи всѣхъ членовъ въ первую часть и по вынесенія i за скобки, имѣемъ

$$(a-\alpha)+(b-\beta)i=o,$$

откуда по предыдущей теоремъ имъемъ:

$$a-\alpha=0$$
 и  $b-\beta=0$ , или  $a=\alpha$  и  $b=\beta$ .

Слъд., сказанное условіе необходимо. Оно и достаточто, ибо при  $a=\alpha$  и  $b=\beta$  оба комплекса становятся тождественными.

# Дъйствія надъ комплексными выраженіями.

- 440. Условившись правила, найденныя нами для дъйствій надъ дъйствительными количествами, распространять и на мнимыя, мы придемъ къ тому замѣчательному выводу, что результать всякаго дъйствія надъ комплексами приводить къ выраженіямь того же вида.
- 1. Сложеніе. Пусть требуется сложить a+bi ст c+di. Прилагая сюда правило сложенія действительных количествь, найдемь: (a+bi)+(c+di)= =a+bi+c+di; или, переменяя порядовь членовь и выводя i за скобки, получимь:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d).i,$$

выражение того же вида какъ и слагаемыя.

$$\Pi$$
 Римъръ.  $(5+4i)+(-7-9i)=-2-5i$ .

*Примъчаніе*. Сумма двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть величина дъйствительная; въ самомъ дълъ:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a.$$

2. Вычитаніе. Вычитая c+di изъ a+bi, имбемъ

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i,$$

выражение того же вида, что и данныя.

3. Умноженіе. Примѣняя правило умноженія миогочленовъ, данное для дѣйствительныхъ количествъ, и замѣчая, что  $i^2 = -1$ , найдемъ:

$$(a+bi)(c+di) = ac+bci+adi+bdi^2 = ac+bci+adi-bd = (ac-bd)+bci+adi.i,$$

выражение того же вида, какъ и сомножители.

Такъ какъ произведение двухъ комплексовъ есть выражение того-же вида, то, умноживъ это произведение на третій комплексъ, получимъ снова выражение комплексной формы и т. д. Слъд. теорема справедлива для какого угодио числа мнимыхъ множителей.

Примъръ. 
$$(3+5i)(4-7i)=12+20i-21i+35=47-i$$
.

Примъчание. Взявъ сопряженные комплексы, имъемъ:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2 \cdot i^2=a^2+b^2$$

- т. е. произведение двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть дъйствительное положительное количество, равное квадрату ихъ общаго модуля.
- 4. Дѣленіе. Пусть требуется раздѣлить a+bi на c+di. Изображая частное въ видѣ дроби, имѣемъ

$$\frac{a+bi}{c+di}$$
.

Для уничтоженія мнимости знаменателя, множимъ числителя и знаменателя  $11a^3c-di$  (выраженіе, сопряженное съ знаменателемъ), и находимъ послъдовательно:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.$$
 II P M M B P B. 
$$\frac{10+15i}{1+2i} = \frac{(10+15i)(1-2i)}{5} = \frac{40-5i}{5} = 8-i.$$

5. Возвышеніе въ степень. Такъ какъ возвышеніе въ *итлую положительную степень* совершается рядомъ послёдовательныхъ умноженій, а произведеніе комплексовъ есть выраженіе того же вида, то и степень комплекса имъетъ тотъ же видъ. Слёд.

$$(a + bi)^n = (a + bi)(a + bi) \dots (a + bi) = P + Qi,$$
гдё Р и Q—дёйствительныя поличества.

 $\Pi$  Р и и в Р ы. І.  $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2-b^2) + 2abi$ .

II. 
$$(1 - \sqrt{3}.i)^3 = 1 - 3.\sqrt{3}.i + 3.(\sqrt{3}.i)^3 - (\sqrt{3}.i)^3$$

$$= 1 - 3\sqrt{3}.i - 9 + 3\sqrt{3}.i = -8.$$

Если показатель степени — цёлое отрицательное число, то

$$(a+bi)^{-n} = \left(\frac{1}{a+bi}\right)^n = \left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)^n = \frac{M+Ni}{(a^2+b^2)^n} = P+Qi,$$

слъд. степень имъетъ тотъ же видъ.

6. Извлеченіе корня. Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ комплекса a+bi. Докажемъ, что результатъ дъйствія и въ этомъ случать будетъ комплексъ того же вида, т. е. что

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$
 . . . (1).

Предложение это будеть доказано, если окажется возможнымъ найти для x и y такія дойствительных значенія, которыя удовлетворяли бы этому равенству. Возвысивъ объ части въ квадратъ для освобожденія первой части отъ радикала, получимъ ур.

$$a + bi = x^2 - y^2 + 2xyi$$
...(2)

Мы знаемъ (§ 439), что такое равенство возможно только тогда, когда дъйствительныя и мпимыя количества отдъльно равны между собою; слъд. ур. (2) распадается на два:

$$x^2 - y^2 = a$$
 is  $2xy = b$ ...(3)

Танимъ образомъ неизвъстныя x и y должны удовлетворять двумъ уравненіямъ второй степени, изъ которыхъ они всегда могутъ быть опредълены. Для этого возводимъ оба ур-нія въ квадратъ и складываемъ:

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2$$
, when  $(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$ .

Извлекая изъ объихъ частей квадратный корень, имъемъ

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Передъ радикаломъ надо брать одинъ знакъ +, потому что первая часть, какъ сумма квадратовъ дъйствительныхъ количествъ, всегда положительна. Такимъ образомъ, система ур-ній (3) замъняется слъдующею

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
 II  $x^2 - y^2 = a$ .

Складывая сначала, а потомъ вычитая эти ур-нія, находимъ

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2},$$
  $2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2},$ 

откуда

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$
 in  $y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$ .

Такъ какъ абсолютная величина  $\sqrt{a^2+b^2}$  больше абсолютной величины a или — a, и корень этотъ находится подъ верхнимъ радикаломъ со знакомъ +, то подкоренная величина въ выраженіяхъ x и y положительна, а потому x и y — дъйствительны. Такимъ образомъ, всегда можно найти для x и для y дъйствительныя количества, удовлетворяющія ур-нію (1), а потому преобразованіе, выражаемое этимъ ур-мъ, всегда возможно.

Уравненіе 2xy = b показываеть, что когда b положительно, x и y должны имѣть одинаковые знаки, когда же b отрицательно, знаки x и y должны быть разные. Поэтому, разумѣя подъ b — абсолютное число, и сл. знаки при b — окончательными, имѣемъ двѣ формулы:

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left[ \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \cdot i \right] \cdot \cdot \cdot \cdot (I)$$

$$\sqrt{a-bi} = \pm \left[ \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \cdot i \right] \cdot \cdot \cdot \cdot (II)$$

Примъры. І. Пусть требуется преобразовать  $\sqrt{5+12i}$ .

Полагая въ формуль (I) a = 5, b = 12, найдемъ:

$$\sqrt{5+12}i = \pm \left[ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5^2+12^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-5+\sqrt{5^2+12^2}}{2}} \cdot i \right]$$
$$= \pm \left[ \sqrt{\frac{5-13}{2}} + \sqrt{\frac{-5+13}{2}} \cdot i \right] = \pm (3+2i).$$

II. Извлечь квадратный корень изъ 3-4i.

Полагая въ формуль (II) a=3 и b=4, найдемъ:

$$\sqrt{3-4i} = \pm \left[ \sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}} \cdot i \right]$$
$$= \pm \left[ \sqrt{\frac{3+5}{2}} - \sqrt{\frac{-3+5}{2}} \cdot i \right] = \pm (2-i).$$

Здёсь мы разсматривали только квадратные корни изъ отрицательныхъ чиселъ и изъ комплексовъ. Далъе будетъ указано, что и корни какого угодно порядка представляютъ комплексы того же вида, т. е. a - bi.

441. Приложенія. Приводимъ нѣкоторыя приложенія, съ цѣлію показать, какимъ образомъ употребленіе комплексныхъ выраженій даетъ возможность безъ труда достигать результатовъ, выводъ которыхъ безъ помощи этого рода выраженій представляль бы значительныя трудности.

ТЕОРЕМА I. Если данное число есть сумма двух квадратовъ, то и квадрать его также есть сумма двух квадратовъ.

Пусть n есть число, равное сумм $^{4}$  двух $^{5}$  нвадратов $^{5}$  а $^{2}$  и  $b^{2}$ , т. е.

$$n = a^2 + b^2$$
.

Замѣтивъ, что  $a^2 + b^2$  есть произведеніе двухъ мнимыхъ сопряженныхъ выраженій a + bi и a - bi, замѣняемъ это выраженіе слѣдующимъ:

$$n = (a + bi)(a - bi).$$

Возвышая объ части въ квадратъ, имъемъ:

$$n^{2} = (a + bi)^{2} \cdot (a - bi)^{2} = (a^{2} - b^{2} + 2abi)(a^{2} - b^{2} - 2abi) = (a^{2} - b^{2})^{2} + 4a^{2}b^{2} = (a^{2} - b^{2})^{2} + (2ab)^{2},$$

т. е.  $n^2$  есть сумма квадратовъ количествъ:  $a^2-b^2$  и 2ab. Такимъ образомъ, не только теорема доказана, но полученная формула указываетъ и самый способъ разложенія  $n^2$  на сумму двухъ квадратовъ.

Пусть, напр., n=5. Это число есть сумма двухъ квадратовъ:  $2^2+1^2$ . Полагая a=2 и b=1, по найденной формулъ имъемъ:  $n^2=(2^2-1^2)^2+(2.2.1)^2$ , или  $25=3^2+4^2$ .

Положивъ теперь n=25, a=4, b=3, по той же формулъ найдемъ:  $25^{\circ}$  или  $625=(4^{\circ}-3^{\circ})^{\circ}+(2.4.3)^{\circ}=7^{\circ}+24^{\circ}$ ; и т. д.

ТЕОРЕМА II. Произведение двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое есть сумма двухъ квадратовъ, также равно суммь двухъ квадратовъ.

Пусть даны четыре комплекса: a+bi, a-bi, a'+b'i, a'-b'i попарно сопряженные; взявъ произведеніе

$$(a+bi)(a-bi)(a'+b'i)(a-b'i),$$

номноживъ перваго множателя на второй и третьяго на четвертый, найдемъ:  $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$ . Если же помножимъ перваго на третій и втораго на четвертый, получимъ [aa'-bb'+(ab'+ba')i]. [aa'-bb'-(ab'+ba')i], или  $(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2$ . Сябд.

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2...(1)$$

Если умножимъ перваго на четвертый и втораго на третій, то произведеніе приметъ видъ: [aa'+bb'+(a'b-ab')i]. [aa'+bb'-(a'b-ab')i], или  $(aa'+bb')^2+(a'b-ab')^2$ . Такимъ образомъ имѣемъ другую формулу:

$$(a^2+b^2)(a'^2+b')^2 = (aa'+bb')^2 + (a'b-ab')^2$$
...(2)

Формулы (1) и (2) доказывають предложенную теорему, показывая вмъстъ съ тъмъ, что разложение взятато произведения на сумму двухъ квадратовъ можетъ быть исполнено двоякимъ образомъ. — Эта теорема была найдена Леонаромъ Пизанскимъ.

ТЕОРЕМА III. Произведение двухъ чисель, изъ коихъ каждое есть сумма четырехъ квадратовъ, также равно суммъ четырехъ квадратовъ.

Взявъ тождество

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-d} = \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}\right) + \left(\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a-d}\right)$$

выполнимъ въ немъ три указанныхъ вычитанія и освободимъ его отъ знаменателя; найдемъ

$$(b-d)(a-c) = (b-c)(a-d) + (c-d)(a-b).$$

Положивъ теперь

$$a = \frac{p+qi}{r+si}$$
,  $b = \frac{p'+q'i}{r'+s'i}$ ,  $c = \frac{-r+si}{p-qi}$ ,  $d = \frac{-r'+s'i}{p'-q'i}$ 

замънимъ въ предыдущемъ тождествъ  $a,\ b,\ c$  и d ихъ мнимыми выраженіями; получимъ

$$(p^2+q^2+r^2+s^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2) = (pp'+qq'+rr'+ss')^2 + (pq'+rs'-qp'-sr')^2 + (pr'+sq'-qs'-rp')^2 + (ps'+qr'-sp'-rq')^2,$$
 что и требовалось докавать.

Теорема эта припадлежить Эйлеру. Приведенное доказательство ея проще прежинго доказательства, даннаго Эрмитомо и основаннаго также на употребленіи комплексовь.

#### 442. Задачи.

1. Нижеследующія количества привести къ виду аі:

1. 
$$\sqrt{-144}$$
. 2.  $\sqrt{-a^4}$ . 3.  $\sqrt{-x^2-y^2}$ . 4.  $\sqrt{-9x^6}$ . 5.  $\sqrt{-\frac{1}{4}}$ 

2. Вычислить:  $(\sqrt{-1})^6$ ;  $(\sqrt{-1})^{36}$ ;  $(\sqrt{-1})^{21}$ ;  $(\sqrt{-1})^{27}$ ;  $(\sqrt{-1})^{51}$ ;  $i^7$ ;  $i^{11}$ ;  $i^{32}$ ;  $i^{14}$ ;  $i^{13}$ ;  $i^{38}$ ;  $i^{103}$ .

3. Chomhte: 
$$\alpha$$
)  $\sqrt{-a^4} + \sqrt{-a^2} - \sqrt{-4a^4} + \sqrt{-16a^4} - \sqrt{-81a^2} + \sqrt{-a^2}$ ;  $\beta$ )  $\sqrt{-(x-y)^2} + \sqrt{-(x^2-2xy+y^2)} + \sqrt{-64x^2y^2}$ ;  $\gamma$ )  $\sqrt{-25a^6} + \sqrt{-16a^6} - \sqrt{-(a-1)^2a^6}$ ;  $\delta$ )  $\sqrt{-(m-n)^2} - \sqrt{-(n-2m)^2} + \sqrt{-4m^2n^2} - \sqrt{-4(m-n)^2}$ ;  $\epsilon$ )  $3+2i$ ,  $4-2i$ ,  $7+3i$ ,  $8-i$ ,  $4+2bi$ .

4. Перемножить:  $\alpha$ )  $\sqrt{-m^2} \times (-\sqrt{-9m^4})$ ;  $\beta$ )  $i\sqrt{-28} \times i\sqrt{-32}$ ;

7) 
$$\sqrt{x-5} \times \sqrt{5-x}$$
; 6)  $(3+5i)(4-7i)$ ; 6)  $(\sqrt{8}-i\sqrt{12})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$ ;

$$\xi) \sqrt{9 + i\sqrt{19}} \cdot \sqrt{9 - i\sqrt{19}}; \ \eta) \ (\sqrt{5} + i\sqrt{-a})^2; \ \varkappa) \ (2a - 3i - i\sqrt{-c})^2;$$

$$\lambda) \left(a^2i + ai - \frac{i}{a}\right)^2; \ \mu) \ (m^2i - n^3)^3; \ \nu) \ (x + yi)^4 - (x - yi)^4;$$

$$o) \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{a} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}} \right\}^3.$$

5. Разд'ялить: 
$$\alpha$$
)  $\frac{m^2 i^3}{\sqrt{-m^2}}$ ;  $\beta$ )  $\frac{p^3 i^4}{i\sqrt{-p^5}}$ ;  $\gamma$ )  $\frac{a^2+b^2}{a-bi}$ ;  $\delta$ )  $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b},i}$ ;  $\epsilon$ )  $(ix\sqrt{y}+y\sqrt{xy}-\sqrt{xyz}+y\sqrt{x}-iy^2+iy\sqrt{z}-i\sqrt{xz}-y\sqrt{z}+z)$ :  $(\sqrt{x}-iy+i\sqrt{z})$ .

6. Уничтожить мнимость знаменателя въ дробяхъ:

$$(a) \frac{1-2i\sqrt{3}}{1+2i\sqrt{3}}; \quad \beta) \frac{1+i}{1-i^2}; \quad \gamma) \frac{x+iz}{(x-iz)^2}; \quad \delta) \frac{1-i^3}{(1-i)^3}; \quad \epsilon) \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i};$$

$$\xi) \frac{\sqrt{-(1+i)-i\sqrt{-(1-i)}}}{\sqrt{-(1-i)+i\sqrt{-(1+i)}}}; \quad \gamma) \frac{\sqrt{x+i\sqrt{x^2-b^2}}+\sqrt{x-i\sqrt{x^2-b^2}}}{\sqrt{x+i\sqrt{x^2-b^2}}-\sqrt{x-i\sqrt{x^2-b^2}}}.$$

7. Преобразовать выраженія:

a) 
$$\sqrt{6+8\sqrt{-1}}$$
; b)  $\sqrt{2-3\sqrt{-5}}$ ; 7)  $\sqrt{28+4\sqrt{-15}}$ ; b)  $\sqrt{0.45-3\sqrt{-0.0031}}$ ; b)  $\sqrt{2^2+1+2\sqrt{-(z^2+2)}}$ ; c)  $\sqrt{2(2y^4-y^4\sqrt{-5})}$ ; 7)  $\sqrt{6+i\sqrt{13}}+\sqrt{6-i\sqrt{13}}$ ;

x) 
$$\sqrt{10+2i\sqrt{11}}+\sqrt{10-2i\sqrt{11}}; \lambda) \sqrt{2\sqrt{-14}+13}\pm\sqrt{2\sqrt{-14}-13}.$$

8). Если 
$$A = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$
 и  $B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ , то довазать, что:

a) 
$$A^3 = 1$$
; b)  $B^3 = 1$ ; c)  $A^2 = B$ ; d)  $B^2 = A$ ; e)  $A^{3n} = B^{3n} = 1$ ;  
f)  $A^{3n+1} = B^{3n+2} = A$ ; g)  $B^{3n+1} = A^{3n+2} = B$ .

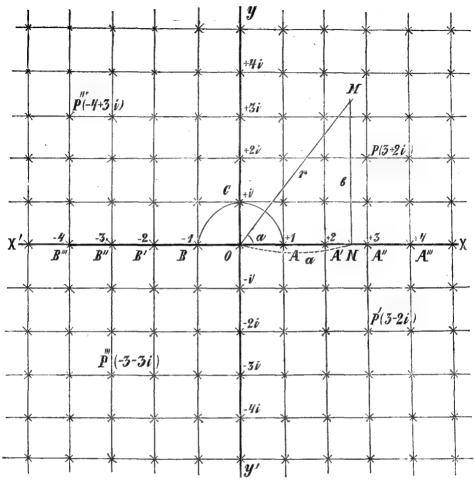
9. Bo who oбратится: a)  $z^2-2x+2$  при  $x=1\pm i$ ; b)  $x^3-5x^2+12x-7$  при  $x=2\mp\sqrt{-3}$ .

### ГЛАВА ХХІХ.

Геометрическое представление мнимыхъ величинъ.—Обобщение основныхъ алгебраическихъ законовъ.—Задача Алгебры.

443. Мы уже видѣли, что если взять неограниченную прямую x'x, на ней извѣстную точку 0 принять за начало, и условиться длинами, откладываемыми вправо отъ 0, представлять числа положительныя, то длины, отсчитываемыя влѣво отъ 0, будуть служить геометрическимъ представленіемъ чиселъ отрицательныхъ. Такъ, если отрѣзокъ ОА будетъ представлять единицу, то отрѣзви, отложенные вправо отъ О: ОА, ОА', ОА',... будутъ представлять числа —1, —2, —3,..., отрѣзки ОВ, ОВ', ОВ',..., отложенные влѣво отъ 0, изобразятъ отрицательныя числа —1, —2, —3,...
Точка О представляеть 0, Такимъ образомъ линія x'x будетъ представлять всевозмож-

ныя действительных числа—положительных и отрицательных; она называется поэтому осью действительных чисел, или действительного осью.



Черт. 1.

Спрашивается, какъ представить геометрически чистыя минмыя и комплексныя (составныя) числа? Проведя черезь точку 0 прямую yy' перпендикулярно къ xx', опищемь изъ точки 0 радіусомь, равнымъ единицѣ длины, окружность; радіусь ОС будеть среднею пропорціональною между отрѣзками ОА = +1 и ОВ = -1 діаметра; слѣд. 0C = (+1).(-1) = -1, откуда  $0C = \sqrt{-1}$ , т. е. 0C = i. Итакъ, чистыя минмыя числа i, 2i, 3i,... должно отсчитывать на перпендикулярѣ yy' вверхъ отъ 0, а числа -i, -2i, -3i,... на томъ же перпендикулярѣ внизъ отъ 0. Поэтому прямая yy' называется осью милмыхъ чисслъ, или милмого осью.

Пусть требуется теперь представить геометрически комплексное число a+bi. Для этого на дъйствительной оси откладываемъ числа a, вправо отъ 0, если оно положительно, и вятью, если отрицательно. Потомъ на мнимой оси откладываемъ число bi вверхъ отъ 0, если опо положительно, и внизъ, если отрицательно. Изъ точекъ a и bi возставляемъ перпендикуляры къ осямъ: нересъчение этихъ перпендикуляровъ и дастъ точку, которая геометрически представляетъ число a+bi. Напр., точка Р

представляеть число 3+2i, точка P'—число 3-2i, P''—число -4+3i, п P''—число -3-3i. Согласно этому, комплексныя количества изображаются точками, наполняющими всю плоскость по объ стороны дъйствительной оси; отсюда названіе влиерольных количеству, данное Fayccoms комплекснымь числамь.

Пусть комплексь a+bi опредъляеть точку M; соединивь ее съ началомь и назвавь ОМ буквою r, изъ треугольника MNO получимъ: ОМ  $= r = \sqrt{a^2 + b^2}$ . След. жолуль комплекса есть илина линіп ОМ, соеминяющей точку М съ началомъ. Одной линіи ОМ недостаточно для опредёленія точки М, ибо всё точки плоскости, лежащія на окружности, описанной изъ 0 радіусомъ r, будуть находиться отъ начала на разстоянія г. Но если вм'єсть съ длиною линіи г дань будеть уголь, составляемый ею съ осью ох, то этихъ двухъ данныхъ достаточно для опредвленія точки М. Такимъ образомъ, абсолютная длина линіи ОМ = r и направленіе ея, выражаемое угломъ  $\alpha$ , составляемымь этой линіей сь ох, вполн'в определяють точку М, такъ-что положеніе этой точки можеть быть представлено какъ комплексомъ a+bi, такъ и комплексомъ  $r_{\infty}$ , которые и называются поэтому ieomempuvecku-pasnumu. r называется также moдулемъ комплекса  $r_{\alpha}$  и есть количество существенно положительное; уголь  $\alpha$  наз. аргументоми комплекса: онъ считается въ направленін хоМ, обратноми движенію часовой стрален.—Согласно этому, комплексный символь  $r_{\sigma}$  можно разсматривать условно вакъ сумму количествъ а и bi, каждое изъ которыхъ можетъ имъть только два противоположныя направленія; такъ, на нашемъ чертеже будемъ иметь

$$r\alpha = a + bi$$
.

Аргументь можно увеличивать или уменьшать на цёлое число окружностей  $2k\pi$ , ибо направленіе линіи ОМ не изм'єнится, если поворотить эту линію на 4, 8,... прямыхъ угловъ; сл.

$$r_{\alpha} = r_{\alpha+2\pi} = r_{\alpha+4\pi} = \cdots$$

Если линію ОМ повернуть до совпаденія съ Оx, то уголь  $\alpha$  обратится въ ноль, и комплексъ приметь видь  $r_0$ . Но отрѣзокъ полуоси ox представляеть дѣйствительное положительное количество; сл. послѣднее можетъ быть изображено символомъ  $r_0$ , гдѣ r— его абсолютная величина.—Увеличивъ уголъ  $\alpha$  до  $\alpha$ , получимъ комплексъ  $r_{\pi}$ , представляющій, слѣд., дѣйствительное отрицательное число. Знаки o и  $\alpha$  играють роль знаковъ r и —. Чистое мнимое количество r изобразится комплексомъ r r

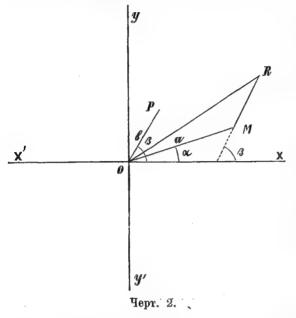
мнимое — 
$$bi$$
 комплексомъ  $b_{3\pi}$ .

Примъчаніе. Вычисленіе мнимых вида n+bi было впервые изложено Вомбелли въ его алебрю (1579); но заслуга введнія въ обычай употребленія въ анализѣ мнимых величинь принадлежить знаменитому Эйлеру (1707—1783). Первая попытка геометрическаго представленія этихъ количествъ принадлежить члену Петербургской Академіи Наукъ Геприху Кюну (1690—1769) и относится къ 1750 году. Аббать Бюз (Вие́е) первый предложиль, въ 1806, представлять мнимыя единицы на оси перпендикулярной къ дъйствит. оси. Въ томъ же году Робертъ Аргандъ, изъ Женевы, приложиль новую теорію къ доказательству нѣкоторыхъ теоремъ. Но усовершенствованіе этой теоріи принадлежеть Гауссу, и ему же обязаны комплексныя количества правомъ гражданства въ наукъ. Благодаря этимъ количествамъ, ученикъ Гаусса Риманнъ пришоль къ весьма важнымъ открытіямъ.—Развитію теоріи мнямыхъ количествъ также много способствовали Коши, Лежандръ, Абель, Якоби.

444. Обобщеніе основныхъ алгебранческихъ законовъ. — Опредёленія дійствій остаются прежнія; по какъ понятіе о комплексів шире понятія объ обыкновенныхъ

положительных и отрицательных воличествахь, то и действія надъ комплексами должны получить более широкій смысль.

445. Сложеніе номпленсовъ. — Такъ какъ всякій комплексъ опредъляется длиною нѣкоторой линіи и ея направленіемъ, то подъ сложеніемъ комплексовъ разумѣють слѣдующую операцію: сложить инсколько комплексовъ значить помъстить начало втораго въ концъ перваго, даван второму направленіе, опредъляемое его аргументомъ; начало третьяго въ концъ втораго и т. д. Суммою будетъ линія, соединя-

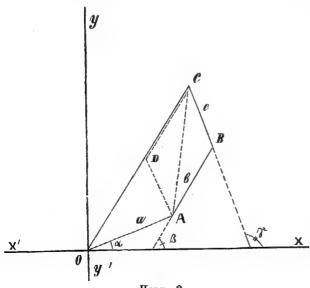


ющая начало перваю комплекса съ концомъ послюдиято. Очевидно, это представление сложения есть не болъе какъ обобщение понятия о сложении противоположныхъ величинъ, заключая въ себъ послъднее, а равно и ариеметическое сложение, какъ частные случан.

Такъ, если требуется сложить два вомилекса  $a_{\alpha}$  и  $b_{\beta}$ , чертимъ линію ОМ  $= \alpha$  нодъ угломъ  $\alpha$  съ положительнымъ направленіемъ оси x'x, затѣмъ наносимъ отъ точки М линію MR = b подъ угломъ  $\beta$ Ісъ тою же осью и соединяемъ точки О п R: линія ОR по величинѣ и направленію и выразить искомую сумму.

Три точки, О, М и R, вообще, лежать не на одной прямой, образуя треугольникъ MOR; замъ-

чая, что въ треугольникъ одна сторона меньше суммы двухъ другихъ, но больше ихъ разности, находимъ, что: модуль суммы двухъ комплексовъ меньше или равенъ суммю



Черт. 3.

модулей слагаемых, и больше или равенг их разности.

Поступая такимъ же образомъ съ нѣсколькими комплексами  $a_{\alpha}$ ,  $b_{\beta}$ ,  $c_{\gamma}$ , най-демъ ихъ сумму, выражаемую по величинѣ и паправленію линіей ОС, соединяющей начало 1-го комплекса съ концомъ послѣдняго.

Когда всё вершины многоугольнаго контура ОАВС находятся не на одной прямой, то ОС, какъ прямая, будеть меньше ломаной ОАВС; если же всё вершины О, А, В, С, будуть на одной прямой, то

ОС будеть меньше или равна сумм' сторонь контура. Итакъ: модуль суммы итсколь-кихъ комплексовъ равень или меньше суммы модулей слагаемыхъ.

- 446. Занонъ перемѣстительный въ сложеніи. Возьмемъ тѣже три комплекса  $a_2$ ,  $b_3$ ,  $c_\gamma$ . Чтобы постронть сумму  $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma$  проводимъ послѣдовательно прямыя 0A = a, AB = b, BC = c подъ углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  съ ОХ. Сумма выразится линіей ОС. Чтобы постронть сумму  $a_\alpha + c_\gamma + b_\beta$ , проведемъ изъ точки А прямую АD, равную и парадлельную BC, и соединимъ D съ C; изъ равенства и парадлельности сторонъ AD вС слѣдуетъ что фигуры ADCB есть парадлелограмъ, сл. DC и AB равны и парадлельны; такимъ образомъ прямая AD представляетъ комплексъ  $c_\gamma$ , а DC—комплексъ  $c_3$ . Видимъ, что конецъ послѣдияго слагаемаго суммы  $a_\alpha + c_\gamma + b_\beta$  находится въ той же точкѣ C, какъ и конецъ послѣдияго слагаемаго суммы  $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma$ : обѣ суммы, слѣдоват, равны.
- 447. Законъ сочетательный въ сложеніи. Разсмотримъ тѣ же три комплекса:  $a_{\alpha}=0$  A,  $b_{\beta}=$  AB и  $c_{\gamma}=$  BC. Ихъ сумма равна ОС. Но AC  $=b_{\beta}+c_{\gamma}$ , и ОС можно разсматривать какъ сумму комплексовъ ОА и АС. Слъ́д.

$$a_{\alpha} + b_{\beta} + c_{\gamma} = a_{\alpha} + (b_{\beta} + c_{\gamma}),$$

- т. е. комплексы сочетательны въ сложении.
- 448. Вычитаніе комплексовь. Вычитаніе опредѣляется вакъ дѣйствіе, обратное сложенію. Легко видѣть, что вычитаніе комплекса  $a_{\alpha}$  сводится къ приданію противо-положнаго комплекса  $a_{\alpha+\pi}$ . Въ самомъ дѣлѣ, сумма двухъ противоположныхъ комплексовъ  $a_{\alpha}$  и  $a_{\alpha+\pi}$ , какъ не трудно убѣдиться, равна нулю. Слѣд.

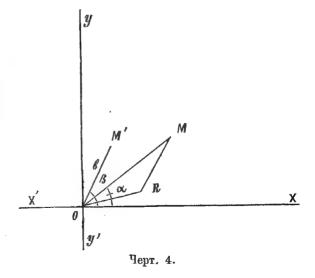
$$m_{\mu} + a_{\alpha+\pi} + a_{\alpha} = m_{\mu} + (a_{\alpha+\pi} + a_{\alpha}) = m_{\mu} + 0 = m_{\mu}.$$

Такимъ образомъ,  $m_{\mu}+a_{\alpha+\pi}$  есть результать вычитанія  $m_{\mu}-a_{\alpha}$ , потому что этотъ результать, сложенный съ  $a_{\alpha}$ , даеть  $m_{\mu}$ .

Пусть изъ комплекса ОМ  $= a_{lpha}$  нужно вычесть коплексъ ОМ'  $= b_{eta}$ . Согласно

вышеприведенному правилу вычитанія должно въ ОМ придать комплексъ, противоположный комплексу ОМ', т. е. оть точки М провести линію МВ, параллельную ОМ' и равную b, но въ противоположномъ направленіи. Сумма ОМ и МВ, т. е. ОВ и представить искомую разность.

Изъ этого построенія слѣдуеть, что т. в. точки О, М, R, вообще, составляють треугольнивь, то: модуль разности двух комплексовь пе больше суммы модулей обоихъ комплексовь и не меньше ихъ разности.



449. Умноженіе номпленсовъ. Распрестраняя опредёленіе умноженія на комплексы, мы должны разумёть подъ этимь действіемъ слёдующее: умножить комплексь

 $b_{eta}$  на  $a_{lpha}$  значить произвести надь множимымь ть же дъйствія, какія нужно произвести надь положительной единицей для составленія изь нея множителя. Но чтобы изь +1 или изь  $1_0$  составить  $a_{lpha}$ , надо: 1) номножить абсолютную единицу на a и номѣстить a на ОХ, вслѣдствіе чего получится  $a_0$ ; 2) новернуть  $a_0$  на уголь  $\alpha$ . Слѣд., чтобы умножить  $b_{eta}$  на  $a_{lpha}$ , нужно сначала помножить модуль множимаго на a, вслѣдствіе чего получится  $(ba)_{eta}$ , затѣмь этоть комлексь по вернуть на уголь  $\alpha$ , т. е. къ аргументу  $\beta$  множимаго придать аргументь множителя. Итакъ: перемножить комплексы значить перемножить ихъ модули и сложить аргументы:  $b_{eta}$ .  $a_{lpha}$  =  $(ba)_{eta+lpha}$ .

Въ этомъ опредёленіи заключаются, какъ частные случаи, опредёленія умноженія абсолютныхъ чисель и противоположныхъ. Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$(+a) \cdot (+b) = a_0 \cdot b_0 = (ab)_0 = +ab;$$

$$(-a) \cdot (+b) = a_{\pi} \cdot b_0 = (ab)_{\pi+0} = (ab)_{\pi} = -ab;$$

$$(+a) \cdot (-b) = a_0 \cdot b_{\pi} = (ab)_{\pi} = -ab;$$

$$(-a) \cdot (-b) = a_{\pi} \cdot b_{\pi} = (ab)_{2\pi} = (ab)_0 = +ab$$

**450.** Свойства произведенія. Изъ опредѣленія умноженія комплексовъ прямо выводимъ:

I.  $a_{\alpha}.b_{\beta}=(ab)_{\alpha+\beta}$  но ab=ba и  $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ , слъд.  $(ab)_{\alpha+\beta}=(ba)_{\beta+\alpha}$ , или по опредъленію умноженія,  $b_{\beta}$  .  $a_{\alpha}$ . Итакъ

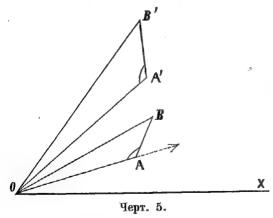
$$a_{\alpha}$$
 .  $b_{\beta} = b_{\beta}$  .  $a_{\alpha}$ ,

т. е. произведение двухъ множителей не измъняется отъ перемъны ихъ порядка.

II. 
$$a_{\alpha}(b_{\beta}c_{\gamma}) = a_{\alpha}[(bc)_{\beta+\gamma}] = (abc)_{\alpha+\beta+\gamma} = a_{\alpha}b_{\beta}c_{\gamma}$$

т. е. для умноженія комплекса  $\mathbf{a}_{\alpha}$  на произведеніе двух других,  $\mathbf{b}_{\beta}$  и  $\mathbf{c}_{\gamma}$ , нужно  $\mathbf{a}_{\alpha}$  умножить посльдовательно на каждый изъ комплексовъ  $\mathbf{b}_{\beta}$  и  $\mathbf{c}_{\gamma}$ . Въ этомъ заключается законъ сочетательный въ умноженіи.

 Основываясь на этихъ двухъ положеніяхъ, не трудно доказать законъ перемѣститительный для какого угодно числа множителей.



III. Докажемъ равенство

$$a_{\alpha}(b_{\beta}+c_{\gamma})=a_{\alpha}b_{\beta}+a_{\alpha}c_{\gamma}$$

выражающее законг распредълительный въ умноженіи. Комплексы  $b_{\beta}$  и  $c_{\gamma}$ , подлежащіе сложенію, образують между собою нікоторый уголь  $\gamma - \beta$ , дополнительный до  $\pi$  къ углу А треугольника ОАВ. Послідній вполні опреділяется этимъ угломъ и сторонами b и c. Третья сторона выражаеть по величині и направленію ихъ сумму  $b_{\beta} + c_{\gamma}$ .

Если каждую изъ величинъ  $b_{\beta}$  и  $c_{\gamma}$  помножимъ на  $a_{\alpha}$ , то модули ихъ умножатся на a и сл. сохранятъ тоже самое численное отношеніе. Аргументы  $\beta$  и  $\gamma$  получатъ одно и тоже приращеніе  $\alpha$ , слёд., сохранятъ туже разность. Поэтому, если соста-

вить сумму частных произведеній  $a_{\alpha}b_{\beta}+a_{\alpha}c_{\gamma}$ , то получится треугольник ОА'В' полобный ОАВ, такъ какъ углы А и А' равны и заключающія ихъ стороны пропорліональны. Слёд. ОВ' будеть имёть модулем ОВ, умноженное на a, аргументь же комплекса ОВ' будеть =  $A'OX+BOA=AOX+A'OA+BOA=BOX+A'OA=BOX+\alpha$ , т. е. прежнему аргументу, сложенному съ  $\alpha$ . Итакъ, сумма  $a_{\alpha}b_{\beta}+a_{\alpha}c_{\gamma}=$  произведенію  $a_{\alpha}(b_{\beta}+c_{\gamma})$ .

IV. 
$$a_{\alpha} \cdot 0 = a_{\alpha} \cdot 0$$
  $0 = (a \cdot 0)_{\alpha+0} = 0_{\alpha} = 0$ .

Слѣд., произведение двухъ комплексовъ равно нулю, когди модуль одного изъ нихъ равенъ нулю.

V. 
$$a_{\alpha} \cdot 1 = a_{\alpha} \cdot 1_{0} = (a \cdot 1)_{\alpha} = a_{\alpha}$$
.

Слфд., умножение комплекса на 1 не измъняетъ его.

**451. Дъленіе.** Сохраняя прежнее опредѣленіе этого дѣйствія, находимъ, что частное отъ раздѣленія  $a_{\alpha}$  :  $b_{\beta}$  равно

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta}$$
.

Въ самонъ деле, умноживъ это частное на делителя, имеемъ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta} b_{\beta} = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)_{\alpha-\beta+\beta} = a_{\alpha},$$

т. е. делимое. Итакъ: чтобы разделить однит комплексъ на другой, надо: модуль дълимого раздълить на модуль дълителя, а изг аргумента дълимого вычесть аргументь дълителя.

452. Возвышение въ степень. Пусть показатель степени *n* — число цёлое и положительное; по опредёлению возвышения въ степень, имвемъ:

$$(a_{\alpha})^n = a_{\alpha} \cdot a_{\alpha} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha}$$
 (*n* разъ); отеюда, по правилу умноженія:  $a_{\alpha}^n = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)_{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha} = a_{n\alpha}^n$ .

Пусть показатель степени будеть целое отрицательное число — n. По свойству такого показателя, имемъ:

$$(a_{\alpha})^{-n} = \frac{1}{(a_{\alpha})^n} = \frac{1}{a_{\alpha m}^n} = \frac{1}{a_{\alpha m}^n} = \left(\frac{1}{a^n}\right)_{0 = \alpha m} = a_{-\alpha n}^{-n}.$$

Итакъ: чтобы возвысить комплексъ въ цълую степень, нужно модуль возвысить въ эту степень, а аргументъ умножить на показателя степени.

453. Извлеченіе корня. Пусть требуется извлечь корень порядка m (гд $^{\pm}$  m — ц $^{\pm}$ лое положительное число) изъ комплекса  $r_{\alpha}$ , и пусть искомый корень выраженъ комплексомъ  $\rho_{\alpha}$ , такъ-что

$$\sqrt[m]{r_{\alpha}} = \rho_{\omega}$$

По опредъленію корня мы должны нивть  $r_{\alpha} = (\rho_{\omega})^m$ , нан  $r_{\alpha} = \rho_{\omega m}^m$ . Этому равенству удовлетворимъ, полагая, что модули обвихъ частей равны, а аргументы разнятся на число кратное  $2\pi$ , такъ-что для опредвленія  $\rho$  и  $\omega$  имвемъ ур-нія:

$$\rho^m = r$$
,  $m\omega = 2k\pi + \alpha$ ,

гд $^{\pm}$  k — ц $^{\pm}$ лое положит. или отрицат. число; но r есть число положительное, а какъ

и р существенно положительно, какъ модуль, то оно равно ариеметическому корню изъ г. Такимъ образомъ имъемъ:

$$\rho = \sqrt[m]{r}, \quad \omega = \frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}.$$

$$\sqrt[m]{r_{\alpha}} = (\sqrt[m]{r})_{2k\pi} + \frac{\alpha}{m}. \quad (1)$$

Итакъ

Опредёлимъ, сколько различныхъ значеній получится для  $\sqrt[m]{r_{\alpha}}$ . Если въ формулѣ (1) дать k два какія нибудь значенія, разнящіяся между собою на число кратное m, то получимъ два угла, разнящіеся кратнымъ  $2\pi$ ; но повороть комплекса на уголь кратный  $2\pi$  не измѣняеть величины комплекса. Слѣд. чтобы получить всѣ значенія  $\sqrt[m]{r_{\alpha}}$  достаточно числу k дать m цѣлыхъ послѣдовательныхъ значеній, напр. значенія

$$0, 1, 2, 3, \ldots, m-1.$$

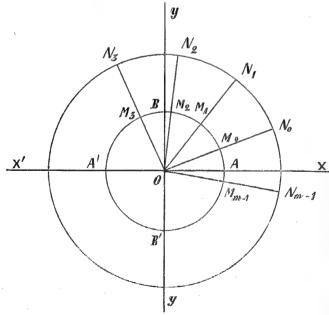
Такимъ образомъ получимъ корни, которыхъ аргументы будутъ

$$\frac{\alpha}{m}$$
,  $\frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}$ ,  $2 \cdot \frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}$ , ...,  $(m-1) \cdot \frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}$ ;

крайніе углы разнятся на  $(m-1).\frac{2\pi}{m}$ , т. е. менье чыть на  $2\pi$ , слыд. два какіе угодно изъ этихъ аргументовъ нижють разность, меньшую  $2\pi$ , и потому дають размичые комплексы. Отсюда заключаемъ, что

Всякое количество, дъйствительное или мнимое, имъетъ т различныхъ корней т-го порядка, дъйствительныхъ или мнимыхъ, и только т.

Представимъ эти m корней геометрически. Возьмемъ перпендикулярныя оси x'x и y'y, и опишемъ изъ начала 0, какъ изъ центра, окружность радіусомъ равнымъ



Черт. 6.

дуля = 1, а аргументы этихъ комплексовъ будутъ

$$\frac{\alpha}{m}$$
,  $\frac{\alpha}{m}$  +  $\frac{2\pi}{m}$ ,  $\frac{\alpha}{m}$  +  $2 \cdot \frac{2\pi}{m}$ , ...,  $\frac{\alpha}{m}$  +  $(m-1) \cdot \frac{2\pi}{m}$ .

линейной единицѣ; пусть А будетъ точка пересѣченія этой окружности съ положительною частью Ох оси х'х. Отложимъ на этой окружности, начиная отъ точки А, въ приличномъ направленіи, дугу АМ<sub>0</sub>, равную по величинѣ и по знаку дугѣ

 $\frac{\alpha}{m}$ , затёмъ, отъ  $M_0$  раз
дёлимъ окружность на mравныхъ частей; пусть  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ , ...,  $M_{m-1}$ будутъ точки дёленія.
Если соединить начало
О съ этими m точками
дёленія, то m радіусовь
О $M_0$ , О $M_1$ , ..., О $M_{m-1}$ будутъ комплексы мо-

Затыть, на каждомъ изъ этихъ радіусовъ отложимъ, начиная отъ точки 0, дляну равную  $\sqrt[m]{r}$ ; новые комплексы  $\mathrm{ON}_0$ ,  $\mathrm{ON}_1$ , . . . ,  $\mathrm{ON}_{m-1}$  представять m корней m-го порядка изъ даннаго количества  $r_\alpha$ , а изъ построенія видно, что ихъ концы расположены на окружности центра 0 и радіуса  $\sqrt[m]{r}$ , образуя на этой окружности вершины правильнаго m—угольника.

Изъ этого построенія непосредственно видно, что при *m* четномъ, *m* корней попарно равны и противоположны по знаку, и что не можеть быть больше двухъ дъйствительныхъ корней, и только при *m* четномъ.

Изслидованіе—І. Пусть данное количество будеть дийствительное и положительное; оно будеть равно своему модулю r, аргументь-же, какъ кратный  $2\pi$ , всегда можно принять равнымь 0. Такимь образомь

$$\sqrt[m]{r_0} = (\sqrt[m]{r})_{2k\pi}$$
.

Чтобы получился действительный положительный ворень, необходимо, чтобы аргументь  $\frac{2k\pi}{m}$  равнялся четному кратному  $\pi$ , т. е.  $\frac{2k\pi}{m} = 2h\pi$ , откуда k = mh, а такъ какъ k положительно и меньше m, то необходомо, чтобы k = o, и слёд. чтобы k = o; стало-быть въ числё корней будеть одинъ положительный, и только одинъ.

Чтобы получился корень действительный отрицательный, нужно, чтобы аргументь  $\frac{2k\pi}{m}$  равнялся нечетному кратному оть  $\pi$ , т. е. чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} = (2h+1)\pi$$
, otrygs  $k = \frac{(2h+1)m}{2}$ ;

но k—цёлое, 2h+1—нечетное число, сл. при m нечетномъ равенство невозможно. Если же m—четное, то какъ k меньше m, необходимо, чтобы k было нулемъ, и тогда  $k=\frac{m}{2}$ ; слёд. при m четномъ, и только въ этомъ случаѣ, имѣется дѣйствительный отрицательный корень, по абсолютной величинѣ равный дѣйствительному положительному корню.

Чтобы два корня аргументовь  $\frac{2k\pi}{m}$  и  $\frac{2k'\pi}{m}$ , гдѣ k отлично отъ k', были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы сумма ихъ аргументовъ равнялась четному кратному отъ  $\pi$ ,

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} = 2h\pi, \quad \text{отвуда} \quad k + k' = mh,$$

а такъ-вакъ k и k' положительны, различны и меньше m, необходимо, чтобы h равнялось 1, и чтобы

$$k+k'=m$$
.

Отсюда видно, что всякому значенію k, за неключеніемъ нулеваго и равнаго  $\frac{m}{2}$ , если m четное, т. е. за неключеніемъ случая д'яствительныхъ корней, соотв'єтствуєть значеніе k' отличное оть k; сл'єд. всk миимые корни—попарно сопряженны. Итакъ: Если m—нечетно, всякое дийствительное положительное количество импера, одина, и полько одина, корен, тело попадка положительной и m—1 поста корней.

ет одинъ, и только одинъ, корень т-го порядка положительный, и т—1 т-хъ корней миимых попарно сопряженных.—Если т—четно, всякое дъйствительное положительное комичество имъетъ два корня т-го порядка дъйствительныхъ, равныхъ и противоположныхъ по знаку, и т—2 корня миимыхъ, попарно сопряженныхъ.

Геометрическое представленіе этихъ m корней m-го порядка непосредственно приводить къ предыдущимъ результатамъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ  $\alpha = 0$ , то вершина  $M_0$  совнадаетъ съ точкой A; точка  $N_0$  находится, поэтому, на 0x, и слѣд. существуетъ дѣйст. положит. корень  $ON_0$ . Если m четно, то будетъ другой дѣйствит. корень, отрицательный, равный предыдущему, но съ противоположнымъ знакомъ, но такого кория не будетъ при m нечетномъ; въ обонхъ случаяхъ всѣ остальные корни мнимы; и какъ многоугольникъ симметриченъ относительно 0x, эти мнимые корни попарно сопряженны.

II. Пусть данное количество будеть дъйствительно, но отрицательно; оно равно своему модулю, но съ противоположнымъ знакомъ; всегда можно положить, что его аргументь  $\alpha$  равень  $\pi$ , такъ-что количество это будеть  $r_{\pi}$  или — r, н

$$\sqrt[m]{r_{\pi}} = \sqrt[m]{-r} = (\sqrt[m]{r})_{\underbrace{(2k+1)\pi}_{m}}.$$

Чтобы могъ быть дъйствительный положительный корень, необходимо, чтобы его аргументь быль равень четному кратному оть  $\pi$ , т. е. чтобы  $\frac{(2k+1)\pi}{m} = 2h\pi$ , откуда 2k+1=2mh, что невозможно, потому-что 2k+1 нечетно, а 2mh четно; и такъ, въ данномъ случаѣ, не существуеть ни одного дъйствит. положит. корня.

Чтобы могъ быть действительный отрицательный ворень, нужно, чтобы его аргументь  $\frac{(2k+1)\pi}{m}$  быль равень нечетному кратному оть  $\pi$ ,  $\frac{(2k+1)\pi}{m} = (2k+1)\pi$ , отвуда 2k+1 = (2k+1)m; это равенство невозможно, если m четно; слёд, при четномь m не существуеть ип одного действит, отрицат, кория.

Положимъ, что m нечетно; въ этомъ случав, такъ какъ k меньше m, нужно чтобы h было нулемъ, и тогда  $k=\frac{m-1}{2}$ ; слъд., если m нечетно, будетъ одинъ дъйствит. отрицат. корень, и только одинъ.

Чтобы два корня аргументовъ  $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ ,  $\frac{(2k'+1)\pi}{m}$ , гдѣ k' отлично отъ k, были сопряженны, необходямо и достаточно, чтобы сумма ихъ аргументовъ равняласъ четному кратному отъ  $\pi$ ,

$$\frac{(2k+1)^{\pi}}{m} + \frac{(2k'+1)^{\pi}}{m} = 2h^{\pi},$$

$$k+k' = mh-1,$$

откуда

а такъ какъ k и k' ноложительны, различны и меньше m, необходимо, чтобы h равняюсь 1, и сл. чтобы

$$k+k'=m-1.$$

Отсюда видно, что всякому значенію k, кромѣ  $\frac{m-1}{2}$  при m нечетномъ, соотвѣтствуеть одно значеніе k' отличнос отъ k, и только одно; слѣд. всѣ минмые корин нопарно сопряженны.

Итакъ: Если т нечетно, то дъйствительное отрицательное количество имъетт одинъ т-й отрицательный корень, и только одинъ, и т—1 т-хъ корней мнимыхъ попарно сопряженныхъ.—Если т четно, дъйствительное отрицательное количество не имъетъ дъйствительныхъ корней т-го порядка, мнимыхъ и попарно сопряженныхъ.

Геометрическое представленіе корней приводить къ тёмъ же заключеніямъ; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ  $\frac{\alpha}{m} = \frac{\pi}{m}$ , и каждое дѣленіе  $\mathbf{M}_0$   $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_1$   $\mathbf{M}_2$ , . . . равно  $\frac{2\pi}{m}$ , а потому вершины  $\mathbf{M}_0$  и  $\mathbf{M}_{m-1}$  симметричны относительно діаметра x'0x; точки  $\mathbf{N}_0$  и  $\mathbf{N}_{m-1}$  имѣютъ тоже свойство, и вершины  $\mathbf{N}_0$ ,  $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{N}_2$ , . . . ,  $\mathbf{N}_{m-1}$  попарно симметричны относительно x'0x; отсюда видно, что корни—мнимы и попарно сопряженны.

Затёмъ, на положительной полуоси Ох не м. б. ни одной вершины, на отрицательной же полуоси Ох' будеть вершина только при м нечетномъ; сл., если м—четно, то не существуетъ ни одного дёйствительнаго м-го кория; при м— нечетномъ есть одинъ дёйствительный корень отрицательный; всё же инимые кории попарно сопряжениы.

III. Пусть, наконець, данное воличество  $r_{\alpha}$ —мнимое; аргументь его уже не будеть вратнымъ  $\pi$ . Легко видеть, что ни одинъ m-й корень изъ  $r_{\alpha}$  не м. б. действительнымъ; въ самомъ деле, для этого нужно бы было, чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} = k\pi$$
, отвуда  $\alpha = (mk - 2k)\pi$ ,

т. е. нужно, чтобы  $\alpha$  было вратнымъ  $\pi$ , т. е. чтобы данное количество было д $^{\rm k}$ в ствительнымъ.

Затёмъ, не м. б. двухъ мнимыхъ сопряженныхъ ворней, ибо для этого нужно, чтобы сумма ихъ аргументовъ была четнымъ вратнымъ  $\pi$ , т. е. чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} + \frac{2k'\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} = 2h\pi, \quad \text{wit} \quad \alpha = (mh - k - k')\pi,$$

а это требуеть, чтобы данное количество было действительнымь.

Следовательно: всякій комплексь импеть т различных порней т-го порядка тикже комплексныхь и не сопряженныхь.

Геометрическое представление корней показываеть, что въ этомъ случа $\pm m$  корней суть m радіусовъ правильнаго полигона, не им $\pm$ ющаго ни одной вершины на оси x'0x, и не им $\pm$ ющаго радіусовъ симметричныхъ относительно x'0x; а этимъ снова доказывается, что m корней комилексны и не сопраженны.

IIримпианіе.—Если взять два мнимыхь сопряженныхь комплекса  $r_{\alpha}$  и  $r_{-\alpha}$ , то каждый изъ нихъ, какъ мы видёли, имбеть m различныхъ корней m-го порядка, комплексныхъ и не сопряженныхъ. Можно показать, что m корней m-го порядка изъ  $r_{-\alpha}$ . Въ самомъ дёл $\pm i$ :

$$\sqrt[m]{r_{\alpha}} = (\sqrt[m]{r})_{2k\pi} + \frac{\alpha}{m}$$
,  $\sqrt[m]{r_{-\alpha}} = (\sqrt[m]{r})_{2k'\pi} - \frac{\alpha}{m}$ ;

Но очевидно, для того чтобы два комплекса были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы модули ихъ были равны, а сумма аргументовъ была кратна  $2\pi$ ; но всё величины  $\sqrt[m]{r_{\alpha}}$  и  $\sqrt[m]{r_{-\alpha}}$  имёють одинъ и тоть же модуль, слёд. достаточно показать, что аргументу  $\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}$  какого ниб. m-го корня изъ  $r_{\alpha}$  соотвётствуеть аргументь  $\frac{2k'\pi}{m} - \frac{\alpha}{m}$  m-го корня изъ  $r_{-\alpha}$  такой, что

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m} + \frac{2k'\pi}{m} - \frac{\alpha}{m} = 2h\pi,$$

нли что k' + k = mk; но если давать k и k' только значенія 0, 1, . . . . , m-1, то нужно взять k=1, и тогда k' = m-k. Отсюда видно, что всякому значенію k соотвѣтствуеть только одно значеніе k'; слѣд: если два комплекса сопряженны, то т корней m-го порядка перваго соотвътственно сопряженны m корнямь m-го порядка втораго.

**454.** Изъ предыдущаго видно, что всѣ дѣйствія надъ комплексами приводять къ выраженіямъ того же вида; поэтому весь количественный матеріалъ алгебры, надъ которымъ она производитъ дѣйствія и въ формѣ котораго получаетъ результаты, выражается въ слѣдующей общей формѣ:

$$a+bi$$
 или  $r_{\alpha}$ ,

частными видами которой являются: +a (или  $a_0$ ), -a (или  $a_\pi$ ), +ai (или  $a_\pi$ ),

-ai (или  $a_{3\pi}$ ), гдb а и b—числа дbйствительныя, цbлыя, дробныя или прраціb

ональныя. Существенный характерь этих величинь тоть, что полное опредёденіе ихъ требуеть знанія не только ихъ модулей, т. е. абсолютныхь значеній, но еще и паправленія. Потому ихъ называють также величинами директивными. Одни изъ этихъ величинъ имѣють только два противоположныя направленія, вслёдствіе чего геометрически они представляются прямыми, наносимыми на неограниченной оси, отъ нѣкотораго постояннаго начала, то въ одну, то въ другую сторону, смотря по ихъ направленію. Ихъ называють поэтому діодами. Другія величины могуть быть изображаемы прямыми, проводимыми на плоскости изъ начала въ какомъ угодно направленіи. Ихъ называють плоскими поліодами; діоды—ихъ частный случай. Наконець, есть величины, въ представленіе о которыхъ не входить идея направленія; поэтому ихъ изображають прямыми, наносимыми на оси всегда въ одну сторону отъ начала. Ихъ называють монодами (изученіемъ ихъ занимается ариеметика). — Всъ эти величины подчиняются тѣмъ основнымъ законамъ, обобщенію которыхъ и была посвящена эта глава.

Въ виду сказаннаго, цёль алгебры можно опредёлить такъ: это есть наука, занимающаяся изученіемь дийствій надъ плоскими поліодами, и ришеніемь всякихь задачь, относящихся къ этимъ величинамъ.

Величны, имѣющія въ пространствѣ какое угодно направленіе (какъ силы въ механикѣ, прямыя, воображаемыя въ пространствѣ) не подчиняются тѣмъ же законамъ, какъ плоскіе поліоды, въ правилахъ умноженія и дѣленія; поэтому ихъ изученіе выходить изъ рамокъ алгебры.

## ГЛАВА ХХХ.

Ръшеніе квадратных уравненій. — Изслъдованіе корней. — Вычисленіе корней уравненія  $ax^2+bx+c=0$ , когда коэффиціенть a весьма маль. — Задачи.

455. Опредъленія. — Уравненіе называется *квадратнымъ*, если будучи *ра- ціональнымъ* и *ціональнымъ* относительно неизв'єстнаго, не содержитъ членовъ съ степенями неизв'єстнаго, выспими второй. Такое ур. им'єсть троякаго рода чле-

ны: съ квадратомъ неизвъстнаго, съ первою степенью его и извъстные члены; общій видъ его будетъ слъдовательно

$$ax^2 + bx + c = 0$$
,

гдё a, b и c суть нёвоторыя числа, положительныя или отрицательныя; b и c могуть быть вмёстё или порознь нулями, и тогда ур. называется неполным»; когда a, b и c отличны отъ нуля, оно называется полный».

456. Ръшеніе неполныхъ ур-ній. І. Когда b = o, уравненіе будетъ

$$ax^2 + c = 0$$
.

Раздъливъ объ части на a, и положивъ для краткости —  $\frac{c}{a}$  — A, можемъ дать этому ур-нію видъ

$$x^2 - A = 0$$

Замъчая, что  $A = (\sqrt{A})^2$ , получимъ:

$$x^2 - (\sqrt{A})^2 = 0$$
, him  $(x - \sqrt{A})(x + \sqrt{A}) = 0$ .

Но чтобы произведеніе двухъ множителей равнялось нулю, нужно, чтобы одинъ изъ нихъ былъ равенъ нулю, а другой не обращался бы приэтомъ въ  $\infty$ . Приравнивая перваго множителя нулю:  $x - \sqrt{\Lambda} = 0$ , находимъ отсюда:  $x = +\sqrt{\Lambda}$ , причемъ второй множитель обращается въ конечное количество  $2\sqrt{\Lambda}$ . Приравнявъ втораго множителя нулю:  $x + \sqrt{\Lambda} = 0$ , имѣемъ отсюда  $x = -\sqrt{\Lambda}$ , причемъ другой множитель даетъ конечную величину  $-2\sqrt{\Lambda}$ . Итакъ, имѣемъ два рѣшенія  $x' = +\sqrt{\Lambda}$ ,  $x'' = -\sqrt{\Lambda}$ ; ихъ условились, ради краткости, писать вмѣстѣ:

$$x = \pm \sqrt{\Lambda}$$

и читать: x равенъ паюсь или минусъ  $\sqrt{A}$ .

Если A>0, оба корня цействительны; при A<0, оба мнимы.

Примпры. І. Ръшить уравненіе  $3x^2 - 75 = 0$ .

Перенеся 75 во вторую часть, и раздъливъ объ части на 3, получимъ ур:  $x^2 = 25$ , откуда  $x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$ . Итакъ:

$$x' = +5; \quad x'' = -5.$$

2. Ръшить уравнение  $3x^2 + 75 = 0$ .

Выводимъ изъ него:  $x^2 = -25$ ; откуда  $x = \pm \sqrt{-25} = \pm 5i$ , т. е.

$$x' = +5i$$
;  $x'' = -5i$ .

II. Положивъ въ уравненіи  $ax^2 + bx + c = 0$  извъстный члень c = 0, получаємъ уравненіе

$$ax^2 + bx = 0$$
.

Выводя x за скобки, дадимъ ур-нію видъ x (ax+b) = 0. Приравнивая перваго множителя нулю, т. е. полагая x=0, и замѣчая, что приэтомъ второй множитель обращается въ конечную величину b, заключаемъ, что одинъ

изъ корней ур-нія равенъ 0. — Полагая затьмъ ax + b = 0, откуда  $x = -\frac{b}{a}$ , замьчаемъ, что и при этомъ значеній x ур-ніе обращается въ тождество.

Итакъ, ур-ніе  $ax^2 + bx = 0$  имъетъ два корня

$$x' = 0, x'' = -\frac{b}{a}$$

Примъчание. — Еслибы, въ видахъ упрощенія, мы сократили первоначальное ур. на x, то, ръшивъ полученное ур-ніе, нашли бы только одинъ корень  $x = -\frac{b}{a}$ ; другой корень x = 0 потеряли бы при сокращеніи. Но едва-ли не лишнее снова напоминать, что не позволительно дълить ур. на множителя, который можетъ обратиться въ ноль.

Примъръ. Ръшить уравнение  $3x^2-7x=0$ .

Давъ ему видъ x (3x-7) = 0, по предыдущему, находимъ два корня:

$$x'=0; \quad x'=\frac{7}{3}.$$

III. Если b=c=0, то ур. принимаетъ видъ

$$ax^2=0.$$

Такъ-какъ a отлично отъ нуля, то произведеніе  $a x^2$  можетъ обратится въ ноль только при x=0. И въ этомъ случаѣ можно сказать, что ур. имѣетъ два корня

$$x' = 0$$
 H  $x'' = 0$ ,

равныхъ между собою.

11

**457.** Рѣшеніе полнаго квадратнаго уравненія. — Рѣшимъ теперь квадратное уравненіе общаго вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \dots \dots (1)$$

Первый пріємъ. — Принимая а отличнымъ отъ нуля, раздёливъ объ части на а и перенеся свободный членъ во вторую часть, получимъ уравненіе, тождественное данному:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Замѣчая, что  $\frac{b}{a}$  · x можно представить въ видѣ  $2 \cdot \frac{b}{2a}$  · x, разсматриваемъ  $x^2$  макъ квадратъ перваго члена x нѣкотораго бинома, а  $2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$  какъ удвоенное произведеніе перваго члена (x) искомаго бинома на второй, который равенъ, поэтому,  $\frac{b}{2a}$  · Такимъ образомъ, если къ первой части ур-нія (2) придадимъ нвадратъ втораго члена  $\frac{b}{2a}$  бинома, и чтобъ равенство не нарушилось—и ко второй, то составимъ ур-ніе тождественное со (2):

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

первая часть котораго есть, слѣдовательно, квадрать бинома  $x+\frac{b}{2a}$ . Поэтому послѣднее ур. можно написать, приведя вторую часть къ общему знаменателю, въ видѣ:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Итакъ, чтобы удовистворить этому ур-нію. а сиёд. и тождественному съ нимъ данному, необходимо и достаточно дать x такое значеніе, чтобы  $x+\frac{b}{2a}$  было алгебраическимъ квадратнымъ корнемъ изъ  $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ . Но послёднее выраженіе имѣетъ два алгебраич. квадратныхъ корня:  $\pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ . Зачитъ, мы удовлетворимъ уравненію (1), положивъ:

HIM 
$$x + \frac{b}{2a} = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
, Him  $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ 

откуда

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 in  $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Итакъ, квадратному ур-нію удовлетворяють два значенія неизвъстнаго, два корня. Для краткости оба корня пишуть въ одной формулъ:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

изъ которой выводимъ следующее

Правило. Чтобы найти значенія неизвыстнаго, удовлетворяющія полному квадр. ур-нію, нужно: выраженіе, составленное изъ коэффиціанта при неизвыстномь въ 1-й степени, взятаго съ обратнымь знакомь, плюсь или минусь квадратный корень изъ квадрата того же коэффиціента безъ учетвереннаго произведенія крайнихь коэффиціентовь, раздылить на удвоенный первый коэффиціенть.

 $\Pi$  р и м в р в. — Р в шить уравнение  $20x^2 - 7x - 6 = 0$ .

Сравнивая это уравненіе, которому можно дать видъ

$$20x^2 + (-7)x + (-6) = 0$$

съ общимъ, замъчаемъ, что нужно ноложить

$$a=20, b=-7, c=-6.$$

Вставляя въ общую формулу эти числа, найдемъ:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.20.(-6)}}{2.20} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 480}}{40} = \frac{7 \pm \sqrt{529}}{40} = \frac{7 \pm 23}{40},$$

и наконецъ

$$x' = \frac{7+23}{40} = \frac{3}{4};$$
  $x'' = \frac{7-23}{40} = -\frac{2}{5}.$ 

458. В торой пріємъ. — Умножая обѣ части уравненія (1) на 4a, что позволительно, если и не равно нулю, получимъ уравненіе

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

тождественное данному; или, перенеся 4ас во вторую часть:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$
.

Разсматриван  $4a^2x^2$  и 4abx какъ два первые члена квадрата бинома, у котораго первый членъ = 2ax, а второй b, и придавая къ объимъ частямъ урнія по  $b^2$ , находимъ уравненіе  $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$ , котораго первая часть есть ничто иное какъ  $(2ax+b)^2$ . Приведя такимъ образомъ ур. къ виду.

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

замъчаемъ, что 2ax+b есть ангебранч. квадр. корень изъ  $b^2-4ac$ , т. е.

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

откуда

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

формула, совершенно одинаковая съ найденной въ § 457.

459. Третій пріємъ. — Найдемъ формулу корней при помощи введенія неопредъленнаго количества. Имъ́я ур.

$$ax^{2} + bx + c = 0$$

положимъ x = z + k, гдъ z новое неизвъстное, а k нъкоторое произвольное количество, и подставимъ въ ур. виъсто x сумму z + k. Найдемъ ур-ніе

$$a(z+k)^2+b(z+k)+c=0;$$

распрывъ въ немъ скобки и расположивъ по степенямъ г, получимъ

$$az^2 + (2ak + b)z + ak^2 + bk + c = 0$$
. . . (2)

Воспользуемся произволомъ количества k для того, чтобы уничтожить членъ съ первою степенью z, (2ak+b)z и получить такимъ образомъ неполное уравненіе; очевидно, для k надо выбрать такое значеніе, чтобы 2ak+b=0, откуда  $k=-\frac{b}{2a}$ .

Подставивъ это значение к въ ур. (2), имбемъ

$$az^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$
, или  $az^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$ , откуда  $z^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ , и слъд.  $z = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Такимъ образомъ: 
$$x = s + k = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
.

## 460. Замъчанія относительно примъненія предыдущихъ формулъ.

1. Когда коэффиціенты a, b и c числа цѣлыя и b — число четное, формула корней допускаеть упрощеніе. Въ самомъ дѣлѣ, полагая b = 2b', имѣемъ

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a},$$

по сокращении на 2.

Напр., если дано уравненіе

$$77x^2 + 50x + 8 = 0$$

то, полагая въ последней формуле  $a=77,\ b'=25$  и c=8, найдемъ

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 77 \cdot 8}}{77},$$

откуда

$$x' = -\frac{2}{7}$$
,  $x'' = -\frac{4}{11}$ .

2. Когда коэффиціентъ при  $x^2$  равенъ 1, и ур. имъетъ видъ  $x^2 + px + q = 0$ ,

то, полагая въ общей формулъ  $a=1,\ b=p$  и c=q, получимъ

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$
.

Если приэтомъ p — четное число, то для удобства вычисленій выгодихе этой формулъ дать видъ

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Напр., въ уравненіи  $x^2-10x+21=0$  имѣемъ: p=-10, слѣд.  $\frac{p}{2}=-5$ , в q=21; примъняя послѣднюю формулу, найдемъ

$$x=5\pm\sqrt{25-21}=5\pm2$$
; casa.  $x'=7$ ,  $x''=3$ .

- 461. Приводимъ еще нъсколько примъровъ на примънение выведенныхъ эгрмулъ.
  - 1. Рѣшить уравненіе  $3x^2 7x 2 = 0$ .

Примъняемъ первую формулу, полагая въ ней  $a=3,\ b=-7,\ c=-2,$  п находимъ

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+24}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{73}}{6}, \text{ откуда}$$
  $x'=\frac{7+\sqrt{73}}{6}=2,591, \text{ съ точностью до }0,001 \text{ по избытку;}$   $x''=\frac{7-\sqrt{73}}{6}=-0,257, \text{ съ точностью до }0,001 \text{ по недостатку.}$ 

2. Ръшить уравненіе  $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ .

Примъняя первую формулу, находимъ

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}}{2ab}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2ab}$$

Отдёляя корни, пивемъ:

$$x' = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2ab} = \frac{a}{b}, \quad x'' = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{2ab} = \frac{b}{a}.$$

3. Ръшить уравнение 
$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3a^2+b^2}{3b^2+a^2}$$
. . . . . . . . . . . (1)

Сдълавъ перенесеніе въ первую часть и приведя къ общему знаменателю  $(3b^2 + a^2)(x^2 - x + 1)$ , находимъ ур-ніе

$$\frac{[(3b^2+a^2)-(3a^2+b^2)]x^2+[(3b^2+a^2)+(2a^2+b^2)]x+(3b^2+a^2)-(3a^2+b^2)}{(3b^2+a^2)(x^2-x+1)}=0,$$

или, по упрощеніи,

$$\frac{(b^2 - a^2)x^2 + 2(b^2 + a^2)x + (b^2 - a^2)}{(3b^2 + a^2)(x^2 - x + 1)} = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

уравненіе, тождественное (1). Приравнивая числителя нулю, рашаемъ ур-ніе

$$(b^2-a^2)x^2+2(b^2+a^2)x+(b^2-a^2)=0$$
 · · · · (3)

корни котораго и будутъ требуемые, если убъдимся, что они не обращаютъ знаменателя въ 0; въ противномъ случав ихъ слъдуетъ принять только тогда, когда истинная величина неопредъленности  $\frac{0}{0}$ , въ которую обратится первая часть ур-нія (2), будетъ равна нулю.

Корни ур-нія (3) суть:

$$x=rac{-(b^2+a^2)\pm\sqrt{(b^2+a^2)^2-(b^2-a^2)^2}}{b^2-a^2}=rac{-(b^2+a^2)\pm2ab}{b^2-a^2};$$
 откуда  $x'=rac{a-b}{a+b}; \quad x''=rac{a+b}{a-b}.$ 

Подставляя ихъ поочередно въ  $x^2-x+1$ , убъдимся, что выражение это не обращается въ ноль; сл. найденные кории удовлетворяютъ данному уравнению.

4. Ръшить уравнение 
$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x-2}{x(x+1)}$$

Собравъ всѣ члены въ первую часть, приведя къ общему знаменателю x(x+1)(x-1) и сдѣлавъ приведеніе въ числителѣ, дадимъ уравненію видъ

$$\frac{-x^2+4x-3}{x(x+1)(x-1)}=0 \qquad \dots \qquad (1)$$

Приравнявъ числителя нулю, ръщаемъ ур-ніе

$$-x^2+4x-3=0$$
,

и находимъ, что корни его суть: x'=3 и x''=1.

Первый корень не обращаеть знаменателя въ ноль, а потому удовлетворяеть данному уравненію. Второй же, обращая знаменателя въ ноль, даеть первой части уравненія (1) видь  $\frac{0}{0}$ . Опредъляя истинную величину этой неопредъленности, имѣемъ

$$\frac{-x^2+4x-3}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)(3-x)}{(x-1)x(x+1)} = \frac{3-x}{x(x+1)};$$

эта дробь при x=1 обращается въ 1, а ур-ніе первое въ 1 = 0. Заключаемъ, что корень x''=1 не удовлетворяетъ данному ур-нію.

Кром'в корня, равнаго 3, данное ур-ніе им'ветъ еще корень  $=\infty$ , ибо степень знаменателя выше степени числителя.

462. Рѣшая квадратное уравненіе, мы нашли два корня; болѣе двухъ корней оно имѣть не можетъ: въ самомъ дѣлѣ, если бы ур-ніе  $ax^2 + bx + c = 0$  имѣло болѣе двухъ различныхъ корней, оно было-бы тождествомъ, такъ какъ цѣлый по буквѣ x квадратный полиномъ, обращающійся въ ноль болѣе нежели при двухъ различныхъ значеніяхъ x, тождественно равенъ нулю.

# Изследованіе корней квадратнаго уравненія.

**463**. Ръшая общее уравненіе  $ax^2 + bx + c = 0$ , мы нашли два корня:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Вычисленіе корней зависить такимъ образомъ отъ извлеченія квадратнаго корня изъ разности  $b^2-4ac$ , которая можетъ быть положительною, нулемъ, или отрицательною. Опредѣденіе природы корней въ каждомъ изъ этихъ случаевъ; указаніе, что значенія корней въ каждомъ случать соотвѣтствуютъ формѣ уравненія, которому они удовлетворяютъ; наконецъ, опредѣденіе знаковъ дѣйствительныхъ корней,—все это составляетъ июль изслюдованія корней.

Относительно разности  $b^2 - 4ac$  можеть быть три предположенія: она можеть быть положительною, нулемъ и отрицательною:

$$b^2-4ac>0$$
,  $b^2-4ac=0$ ,  $b^2-4ac<0$ .

Приэтомъ условимся коэффиціентъ a считать положительнымъ; когда a<0, то умноживъ уравненіе на — 1, сдёлаемъ этотъ коэффиціентъ положительнымъ.

## 464. Первый случай:

$$b^2 - 4ac > 0$$
.

Въ формулахъ корней подрадикальное количество будеть, такимъ образомъ, положительное, слёдовательно оба корня дъйствительные. Вычитая изъ перваго второй, найдемъ

$$x'-x''=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a};$$

такъ какъ при данномъ условіи выраженіе это отлично отъ нуля, то заключаемъ, что корни неравны между собою.

Далѣе замѣчаемъ, что количество  $b^2$  — 4ac представляетъ или сумму или разность ариометическую, смотря потому, будетъ-ли с отрицательно или положительно.

1. 
$$c > 0$$
.

Такъ какъ по условію и a>0, то 4ac>0; вычитаніе положительнаго количества ведеть къ умецьшенію, след.

$$b^2 - 4ac < b^2$$
,

а потому ариеметическая величина  $\sqrt{b^2-4ac}$  меньше ариемет. величины  $\sqrt{b^2}$  или количества b. Означимъ абсолютную величину коэффиціента b буквою  $\beta$ ; въ такомъ случат:

Если b > 0, то  $b = +\beta$ , и корни можно написать въ видъ:

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

такъ какъ a>0, то знаки корней зависять отъ числителей; второй числитель, какъ состоящій изъ двухъ существенно— стрицательныхъ членовъ, отрицателенъ; въ первомъ—абсолютная велична отрицательнаго члена больше чёмъ положительнаго, слёд. и этотъ числитель отрицателенъ. Значитъ при b положительномъ оба кория отрицательны.

Если b < 0, то  $b = -\beta$ , и кории будутъ

$$x' = \frac{+\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{+\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый числитель, какъ состоящій изъдвухь существенно-положительныхъчленовъ, положителенъ; во второмъ—абсолютная величина положительнаго члена больше, нежели отрицательнаго, слёд. и второй — положителенъ. Такимъ образомъ, при в отрицательномъ оба кория положительны.

Итакъ: при c > 0 дъйствительные корни имъютъ знаки одинаковые, противоположные знаку коэффиціента b.

2. 
$$c < 0$$
.

Такъ какъ a>0, то 4ac<0; отсюда заключаемъ: во-первыхъ, что при c<0 выраженіе  $b^2-4ac$  представляетъ количество существенно—положительное, и слъд. корни безусловно дъйствительны; во-вторыхъ, что

$$b^2 - 4ac > b^2$$
,

и слъд. абсолютная величина  $\sqrt{b^2-4ac}$  больще абсолютной  $\sqrt{b^2}$ , т. е. абсолютной величины количества b.

Если b > 0, т. е.  $b = +\beta$ , то

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Отсюда видно, что первый числитель имѣетъ большій по абсолютной величинѣ членъ — положительный, слѣд. x'>0; во второмъ числителѣ оба члена существенно отрицательны, слѣд. x''<0. Итакъ: знаки корней различны. Приэтомъ абсолютная величина числителя корня x' есть разность

$$\sqrt{b^2-4ac}-\beta$$
,

абсодютная величина числителя корня x'' есть сумма

$$\sqrt{b^2-4ac}+\beta$$

тъхъ же количествъ, и слъд. больше абс. вел. корня x'; так. обр. большую абсолютную величину имъетъ тотъ корень, знакъ котораю противоположень знаку b.

Если 
$$b < 0$$
, то  $b = -\beta$ , и

$$x' = \frac{+\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{+\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый числитель, очевидно, положителень, слъд. x'>0; у втораго отрицательный члень имъеть большую абсолютную величину, чъмъ положительный, слъд. x'<0: знаки корней опять различны. Приэтомъ, абсолютная величина положительнаго корня равна суммъ

$$\sqrt{b^2-4ac}+\beta$$

а отрицательнаго - разности тъхъ же количествъ,

$$\sqrt{b^2-4ac}-\beta$$
,

T. 6. 0 III T Большую абсолютную величину импеть тоть корень, котораго знакь противоположень знаку коэффиціента <math>b.

Резюмируя сказанное, заключаемъ, что: когда  $b^2-4ac>0$ , уравненіе имъетъ корни дъйствительные и неравные; приэтомъ (полагая a>0), если свободный членъ положителенъ, знаки корней одинаковы и противоположны знаку коэффиціента b; если же свободный членъ отрицателенъ, знаки корней различны, и знакъ корня, большаго по абсолютной величинъ, противоположенъ знаку b.

465. Примъры. — І. Пасибдовать корни ур-нія  $8x^2 + 57x + 10 = 0$ . Такъ какъ  $b^2 - 4ac = \overline{57}^2 - 320 = +2929 > 0$ , то корни д'яйствительные и неравные; при a > 0 зд'ясь и c > 0, сл. знаки корней одинаковы; b > 0, след. оба корня отрицательны.

II. Изсябдовать вории ур-нія  $8x^2 - 57x - 10 = 0$ .

Здёсь при a>0 имёсмъ c<0, слёд., не составляя разности  $b^2-4ac$ , заклюечаемъ, что корни — дёйствительные и неравные; знаки ихъ различны, ибо c<0; большій корень, имёя знакъ противоположный коэффиціенту b, положителенъ.

466. Докажемъ теперь, что при условін  $b^2-4ac>0$  изъ самой формы уравненія вытекаєть, что оно можеть быть удовлетворено двумя различными дъйствительными значеніями x.

Выводя въ ур-ніп а за скобки, имтемъ:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0.$$

Изъ условія  $b^2-4ac>0$  нивемь  $4ac< b^2$ , откуда, раздёдивъ объ части неравенства на существенно положительное количество  $4a^2$ , находимъ:

$$\frac{c}{a} < \frac{b^2}{4a^2}$$
, is cutil.  $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - K^2$ ,

гдъ К<sup>2</sup> должно быть существенно-положительнымъ количествомъ, и слъд. К — дъйствительнымъ. Ур-ніе принимаеть водъ

$$a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - K^2\right\} = 0$$
, where  $a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - K^2\right\} = 0$ ,

или, наконедъ, разложивъ выражение въ скобкахъ на множители:

$$a(x + \frac{b}{2a} - K)(x + \frac{b}{2a} + K) = 0.$$

Такъ какъ а отлично отъ нуля, то этому уравнению удовлетворимъ, полагая

или 
$$x + \frac{b}{2a} - K = 0$$
, откуда  $x = -\frac{b}{2a} + K$ ; или  $x + \frac{b}{2a} + K = 0$ , откуда  $x = -\frac{b}{2a} - K$ ,

откуда и видно, что ур-ніе удовлетворяется двумя дъйствительными неравными значеніями  $oldsymbol{x}.$ 

#### 467. Второй случай.

$$b^2 - 4ac = 0$$
.

При этомъ условін подрадикальное количество въ формулахъ корней обращается въ но..ь, слёд. радикальные члены исчезають, и получается

$$x' = -\frac{b}{2a}$$
 If  $x'' = -\frac{b}{2a}$ 

т. е. оба корня дъйствительные и разные, а общая величина ихъ есть  $-\frac{b}{2a}$ .

Хотя въ данномъ случат ур-ніе имтеть только одинъ корень, но говорять, что оно имтеть dsa, но равных между собою, кормя. Чтобы оправдать такое условное выраженіе, достаточно предположить, что количество  $b^2-4ac$  сначала положительно, и что оно постепенно уменьшается до нуля; тогда неравные корни будуть болте и болте приближаться къ равенству, и наконецъ, когда разность ихъ, выражаемая формулою  $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ , дълается нулемъ, оба корня становятся равными.

Примъръ. — Уравненіе  $9x^2+12x+4=0$  имбеть корни действительные равные, ибо  $b'^2-ac=6^2-9\times 4=0$ ; а общая величина ихъ равна

$$-\frac{b'}{a} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

**468**. Что равенство корней при условіи  $b^2-4ac=0$  обусловливаетя самою формою ур-нія, легко обнаружить следующимъ образомъ. Давъ ур-нію видъ

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0,$$

и замѣчая, что изъ условія  $b^2-4ac=0$  сперва имѣемъ  $4ac=b^2$ , а затѣмъ, раздѣливъ обѣ части на  $4a^2$ , получаемъ  $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$ , подставививъ вмѣсто  $\frac{c}{a}$  его величину въ ур-ніе, найдемъ

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0$$
, where  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ .

Такъ какъ а отлачно отъ нуля, то очевидно, что этому ур-нію можно удовлетворить единственнымъ способомъ, положивъ

$$x+\frac{b}{2a}=0$$
, откуда  $x=-\frac{b}{2a}$ .

### 469. Третій случай.

$$b^2 - 4ac < 0$$
.

Такъ какъ квадратный корень изъ отрицательнаго количества  $b^2 - 4ac$  есть выражение мнимое, то изъ самой формулы корней видно, что оба корня будутъ мнимые.

Имъ можно дать видь A+Bi. Въ самомъ дълъ,  $b^2-4ac=(4ac-b^2)$ . (-1); слъд.  $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{4ac-b^2}$ .  $\sqrt{-1}=\sqrt{4ac-b^2}$ . i, гдъ количество  $\sqrt{4ac-b^2}$  дъйствительно, такъ какъ  $4ac-b^2>0$ .

Корни берутъ видъ

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i$$
,  $x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i$ ,

откуда видно, что это — мнимыя сопряженныя комичества.

Примъръ. — Ръшить ур-ніе  $7x^2-3x+2=0$ .  $b^2-4ac=3^2-4\times7\times2=-47$ , слъд. корни — миимые. По предыдущимъ тормуламъ имъемъ:

$$x' = \frac{3}{14} + \frac{\sqrt{47}}{14} \cdot i$$
 ,  $x'' = \frac{3}{14} - \frac{\sqrt{47}}{14} \cdot i$  .

**470.** Покажемъ изъ самой формы уравненія, что при условіи  $b^2-4ac<0$  ему нельзя удовдетворить никакимъ дъйтвительнымъ значеніемъ x.

Въ самомъ дёлё, изъ условія  $b^2-4ac<0$  имѣемъ  $\frac{c}{a}>\frac{b^2}{4a^2}$ , а это неравенство можно замѣнить равенствомъ  $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}+K^2$ , гдѣ  $K^2$ — существенно положительное количество, не могущее обратиться въ ноль. Внося это выраженіе виѣсто  $\frac{c}{a}$  въ уравненіе

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0,$$

даемъ ему видъ

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + K^2\right) = 0$$
, where  $a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right\} = 0$ .

Отсюда очевидно, что ур-ніе не м. б. удовлетворено никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x, потому-что сумма двухъ положительныхъ количествъ можетъ обратиться въ ноль только тогда, когда каждое изъ нихъ въ отдѣльности обращается въ ноль, но мы знаемъ, что  $K^2$  не м. б. нулемъ.

Изъ формулъ корней видно, что въ данномъ случат ур. м. б. удовлетворено мнимыми значеніями неизвъстнаго.

471. Теорема. — Если уравненіе  $ax^2 + bx + c = 0$ , вт которомт коэффиціенты a, b и c соизмъримы, удовлетворяется несо-

мымъ корнемъ  $\alpha + \sqrt{\beta}$ , то другой его корень будетъ несоизмъримое количество  $\alpha - \sqrt{\beta}$ , сопряженное первому.

Въ самомъ дълъ, по условію  $\alpha + \sqrt{\beta}$  есть корень даннаго уравненія, слъд. имъемъ тождество

$$a(\alpha + \sqrt{\beta})^2 + b(\alpha + \sqrt{\beta}) + c = 0$$
,

или, раскрывъ скобки и собравъ въ отдъльныя группы соизмѣримые и несоизмъримые члены, найдемъ

$$(a\alpha^{s}+a\beta+b\alpha+c)+(2a\alpha+b)\sqrt{\beta}=0$$
...(1)

Первая часть этого тождества имѣетъ видъ  $M + N\sqrt{\beta_1}$  гдѣ M и N соизмѣримы. Въ силу (1) это выраженіе должно равняться нулю; но можно доказать, что оно можетъ равняться нулю только тогда, когда M = 0 и N = 0.

Въ самомъ дёлё, пока N отлично от нуля, мы можемъ обё части раздёлить на N и отъ этого получимъ равенство

$$\sqrt{\beta} = -\frac{M}{N} \cdot \cdot \cdot .(2)$$

тождественное съ М + N  $\sqrt{\beta}$  = 0; но равенство (2) невозможно, ибо оно выражаеть, что несоизмъримое количество  $\sqrt{\beta}$  равно соизмъримому  $-\frac{M}{N}$ . Итакъ, необходимо, чтобы N было нулемъ; но тогда изъ равенства М + N  $\sqrt{\beta}$  = 0 слъдуетъ, что и М = 0.

Такимъ образомъ, тождество (1) ведетъ за собою следствія

$$\begin{array}{c}
a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c = 0 \\
2a\alpha + b = 0
\end{array}$$
(3)

Если теперь въ триномъ  $ax^2 + bx + c$  замънимъ x выраженіемъ  $\alpha - \sqrt{\beta}$ , то найдемъ

$$(a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c) - (2a\alpha + b)\sqrt{\beta};$$

но это выраженіе, въ силу (3), равно нулю, т. е. траномъ обращается въ ноль при  $x = \alpha - \sqrt{\beta}$ ; слъд. послъднее выраженіе служить корнемъ даннаго уравненія.

472. ТЕОРЕМА. Если ур-ніе  $ax^2 + bx + c = 0$ , въ которомь a, b, и с числа цилыя, импеть соизмъримый корень, несократимый видъ котораго есть  $\frac{\alpha}{\beta}$ , то  $\alpha$  служить дилителемь c,  $a\beta$ — дилителемь a.

Въ самомъ дълъ, если  $\frac{\alpha}{\beta}$  есть корень даннаго уравненія, то имъемъ тождество.

$$a \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} + b \cdot \frac{\alpha}{\beta} + c = 0$$
, when  $a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 = 0$ .

Но  $\alpha\alpha^2$  —  $b\alpha\beta$  дёлится на  $\alpha$ , слёд. и  $c\beta^2$  должно дёлиться на  $\alpha$ ; но числа  $\alpha$  и  $\beta$  — первыя между собою, слёд. c должно дёлиться на  $\alpha$ . Такимъ же образомъ покат что  $\beta$ , будучи дёлителемъ суммы  $b\alpha\beta$  —  $c\beta^2$ , дёлитъ непремённо и  $\alpha$ .

С я в д с т в г в. Уравненіе  $x^2 + px + q = 0$  за которомь р и q—числи цълыя, не можеть имъть соизмъримых дробных корней.

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что ур-ніе имѣетъ такой корень  $\frac{\alpha}{\beta}$ , на основаніи предыдущей теоремы нашли бы, что цѣлое число  $\beta$  дѣлитъ коэффиціентъ при  $x^2$ , т. е. 1.

Изъ этого следуеть, что наше уравнение можеть иметь действительные корни: или целые, и тогда оба они целые, или же оба несоизмеримые.

473. Теорема. Если уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , въ которомъ коэффиціенты a, b и c дойствительны, имъетъ мнимый корень, то другой его корень есть мнимое количество, сопряженное съ первымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $\alpha + \beta i$  есть корень даннаго уравненія; въ такомъ случаѣ имѣемъ тождество

$$a(\alpha + \beta i)^2 + b(\alpha + \beta i) + c = 0,$$

или, группируя дъйствительные и мнимые члены, находимъ:

$$(a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c) + (2a\alpha\beta + b\beta)i = 0 \dots (1)$$

Первая часть имћеть видь A+Bi, гдё A и B дёйствительны; но такое выраженіе можеть равняться нулю только тогда, когда одновременно A=0 и B=0. Итакъ, два условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы  $\alpha+\beta i$  было корнемъ даннаго уравненія, суть

$$\begin{array}{c}
a\alpha^2 - a\beta^3 + b\alpha + c = 0 \\
2a\alpha\beta + b\beta = 0
\end{array}$$
(2)

Замёння въ триноме  $ax^2 + bx + c$  количество x выражением  $\alpha - \beta i$ , найдемъ  $(a\alpha^2 - a\beta^2 + b\alpha + c) - (2a\alpha\beta + b\beta)i$ ,

а въ силу условій (2) это выраженіе обращается въ нуль. Итакъ, предложенное уравненіе, въ которомъ коэффиціенты дъйствительны, имъя мнимый корень  $\alpha + \beta i$ , имъетъ и сопряженный ему корень  $\alpha - \beta i$ .

# Изследование частныхъ случаевъ.

- **474.** До сихъ поръ мы предполагали, что возффиціенты отличны отъ нуля. Положимъ теперь, что:
- I. Коэффиціенть  $\alpha$  равень нулю. При рѣшенін пвадратнаго уравненія намъ приходилось или дѣлить, или множить уравненіе на выраженіе, содержащее  $\alpha$ ; но мы знаємъ, что это дѣйствіе непозволительно, когда  $\alpha=0$ , ибо можеть повести къ уравненію, нетождественному съ даннымъ. Поэтому является необходимость въ изслѣдованіи, представляютъ ли найденныя формулы для x' и x'' рѣшенія уравненія и въ случаѣ когда  $\alpha=0$ .

Обращаясь въ формуламъ корней:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

и полагая въ нихъ a = 0, найдемъ:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0}, \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0}.$$

Если b положительно и равно  $+\beta$  (гдb —абсол. величина b), то

$$x' = \frac{-\beta + \beta}{0} = \frac{0}{0},$$
  $x'' = \frac{-\beta - \beta}{0} = \frac{-2\beta}{0} = \infty;$ 

если b отрицательно и равно —  $\beta$ , то наоборотъ

$$x' = \frac{+\beta + \beta}{0} = \frac{2\beta}{0} = \infty;$$
  $x'' = \frac{+\beta - \beta}{0} = \frac{0}{0}.$ 

Итакъ, при a=0 одинъ изъ корней обращается въ  $\infty$ , а другой принимаетъ неопредъленный видъ  $\frac{0}{0}$ . Опредълимъ истинное значеніе этой неопредъленности, причемъ достаточно разсмотръть одинъ случай, напр. b>0; въ такомъ случав x' принимаетъ неопредъленный видъ. Умножая числителя и знаменателя формулы x' на  $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ , получимъ

$$x' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} \cdot$$

Отсюда видно, что неопредъленность корня x' зависить отъ присутствія въ числитель и знаменатель общаго множителя 2a, который при a=0 обращается въ ноль; сокративъ на 2a, имъемъ:

$$x' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

а положивъ здёсь a = 0, найдемъ

$$x' = \frac{2c}{-2b} = -\frac{c}{b}$$

количество опредъленное.

Итакъ, при a=0 одинъ изъ корней обращается вт  $\infty$ , а другой равенъ корню уравненія первой степени bx+c=0, въ которое обращается квадратное уравненіе при a=0.

**475.** Обратимся теперь къ самому уравненію, и посмотримъ, что оно даетъ при a=0.

Уравненію можно дать видъ

$$bx+c=-ax^2;$$

и какъ оно не удовлетворяется при x=0, ибо обращается въ c=0, между тъмъ какъ c отлично отъ нуля, то можно раздълить объ части на  $x^2$ , вслъдствіе чего получимъ уравненіе, тождественное съ даннымъ:

$$\left(b+\frac{c}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=-a.$$

Такъ какъ, по условію, a=0, то произведеніе множителей  $b+\frac{c}{x}$  и  $\frac{1}{x}$  должно быть нумемъ; а для этого необходимо, чтобы одинъ изъ множителей обращался въ ноль, а другой оставался конечнымъ. Положивъ

$$b+\frac{c}{x}=0$$
, откуда  $x=-\frac{c}{b}$ ,

замъчаемъ, что приэтомъ другой множитель  $\frac{1}{x}$  равенъ —  $\frac{b}{c}$ , т. е. конеченъ. Поэтому  $x=-\frac{c}{b}$  есть корень даннаго уравненія.

Положивъ

$$\frac{1}{x} = 0$$
, откуда  $x = \infty$ ,

находимъ, что другой множитель обращается въ b, и след. конеченъ. Поэтому  $x = \infty$  есть также корень уравненія. Эти результаты вполнё согласуются съ выводомъ, полученнымъ изъ формулъ корней; поэтому, последнія приложимы къ случаю a = 0.

ПРИМЪРЪ. Во что обращаются корни ур-нія.

$$(a^2-b^2)x^2-2(2a^2-b^2)x+4a^2-b^2=0$$

 $npu \ a = b$ ?

Такъ какъ при a=b коэффиціенть при  $x^2$  обращается въ ноль, то одпиъ изъ корней обращается въ  $\infty$ , а другой принимаетъ значеніе дроби  $\frac{4a^2-b^2}{2(2a^2-b^2)}$  при a=b, т. е.  $=\frac{3}{2}$ .

Это можно провърить и общими формулами корней, которыя даютъ

$$x' = \frac{2a-b}{a-b}$$
,  $x'' = \frac{2a+b}{a+b}$ .

476. II. Коэффиціенты a и b одновременно равны нулю. Обращаясь къ формунамъ корней, находимъ, что при a=b=0 оба корня принимаютъ неопредъленный видъ  $\frac{0}{0}$ .

Чтобы раскрыть неопредъленность, преобразуемъ формулы корней такимъ же точно образомъ, какъ въ предыдущемъ случат; найдемъ:

$$x' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Положивъ здѣсь a=0 и b=0, имѣемъ

$$x' = \frac{2c}{0} = \infty$$
,  $x'' = \frac{2c}{0} = \infty$ .

Итакъ,  $npu\ a=b=0$  оба корня безконечны.

Обращаясь къ уравненію, даемъ ему видъ

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a,$$

или, такъ-какъ a=b=0, видъ

$$\frac{c}{x^2} = 0.$$

Такъ какъ с понечно, то этому ур-нію можно удовлетворить единственнымъ способомъ, положивъ  $x=\infty$ .

Примъръ. Каковы корни уравненія

$$(a+b)^2x^2-(a^2-ab-2b^2)x+(2a^2-3ab+b^2)=0$$

 $npu \ a = -b$ ?

Когда a=-b, коэффиціенты  $(a+b)^2$  и  $(a^2-ab-2b^2)$  при  $x^2$  и x обращаются въ нули, между тъмъ какъ свободный членъ въ  $6b^2$ ; заключаемъ, что при a=-b оба корня безконечны.

Тоже можно видъть и изъ формуль корней; ртыная данныя ур-нія, имтемъ

$$x' = \frac{a-b}{a+b}, \quad x'' = \frac{2a-b}{a+b};$$

сдълавъ a = -b, имъемъ

$$x' = \frac{-2b}{0} = \infty; \quad x'' = \frac{-3b}{0} = \infty.$$

477. III. Вст три коэффиціента а, b и с равны нулю. Изъ формуль корней убъдимся, что онъ представляють дъйствительную неопредъленность.

Обращаясь въ уравненію, замічаемь, что оно принимаеть видь

$$0\times x^2+0\times x+0=0,$$

и следовательно удовлетворяется всякимь значеніемь x; это — тождество.

Вычисленіе корней уравненія  $ax^2 + bx + c = o$ , когда коэффиціенть a весьма маль.

478. Когда коэффиціенть  $\alpha$  весьма маль, то изь предыдущаго изслѣдованія (§ 474) видно, что одинь изь корней будеть, по абсолютной величинь, весьма великь, другой же близокь кь —  $\frac{c}{b}$ . Общія формулы корней

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

въ данномъ случат будутъ неудобны для вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ,  $b^2-4ac$  вообще не есть точный квадратъ, и слѣд.  $\sqrt{b^2-4ac}$  придется вычислять приблизительно. Отибку, сдѣланную при вычисленіи  $\sqrt{b^2-4ac}$  нужно будетъ раздѣлить на 2a для нахожденія отибки x' или x''; и если a весьма мало, напр.  $=\frac{5}{100000}$ , то  $2a=\frac{1}{10000}$ , а потому отибка  $\epsilon$ , сдѣланная при вычисленіи  $\sqrt{b^2-4ac}$  поведетъ за собою погрѣтность, равную  $10000\epsilon$  въ величинахъ x' и x''. Такъ-что, если бы мы пожелали вычислить корни уравненія съ точностью до  $\frac{1}{10^n}$ , то должны бы были  $\sqrt{b^2-4ac}$  найти съ точностью до  $\frac{1}{10000} \times \frac{1}{10^n}$ , т. е. съ 4 лишними десятичными знаками.

Отсюда понятно, что сложность вычисленій будеть тъмъ значительнъе, чъмъ меньше a.

Несравненно легче, при маломъ а, вычислять корни особымъ способомъ, называемымъ методомъ послъдовательныхъ приближеній. Этимъ способомъ до-

статочно вычислить одинъ изъ корней; въ самомъ дѣлѣ сумма корней извѣстна и равна  $-\frac{b}{a}$  (въ чемъ убѣдимся, сложивъ формулы x' и x''), и если будетъ вычисленъ корень x', то другой найдемъ, вычтя изъ суммы извѣстный корень:  $x'' = -\frac{b}{a} - x'$ .

Нужно раземотръть два случая: корни одинаковато знака, и корни разнато знака. Если черезъ a, b и c означимъ абсолютным числа, то уравненіе съ положительными корнями будетъ вида:  $ax^2 - bx + c = 0$ ; съ отрицательными:  $ax^2 + bx + c = 0$ . Достаточно указать вычисленіе положительныхъ корней, т. е. ур-нія  $ax^2 - bx + c = 0$ ; ибо, если оба корня отрицательны, то перемънивъ у b знакъ b на b на

479. 1-й случай. Знаки норней одинановы. Итакъ, разсмотримъ уравнение съ положительными корнями, т. е. вида

$$ax^2-bx+c=0$$
, ....(1)

гдъ a, b и c—абсолютныя числа, и слъд. знаки окончательные.

Меньшій корень этого уравненія есть

$$x' = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(b - \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \cdot \cdot (2)$$

Этотъ корень мы и вычислимъ.

Р $\pm$ шая ур. (1) относительно bx, находимъ

$$bx = c + ax^2,$$

Т. к. a весьма мадо, b величина конечная, x представляеть въ этой формул'в меньшій корень, питющій также конечную величину, то и  $\frac{a}{b}x^2$  будеть весьмамадо. Поэтому, откинувъ членъ  $\frac{a}{b}x^2$ , мы сдъдаемъ небольшую ошибку, и слъд. первымъ приближеніемъ корня x' будемъ имъть

$$x_1 = \frac{c}{b}$$
.

Это приближеніе меньше настоящей величины x', ибо откинули положительный членъ  $\frac{a}{b}x^2$ .

Если теперь въ формулѣ (3) замѣнимъ во второй части x величиною  $\frac{c}{b}$ , меньшею чѣмъ x, то получимъ второе приближеніе

$$x_2 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_1)^2 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2,$$

которое опять меньше настоящей величины x', но больще чёмъ  $x_1$  на  $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{b}\right)^2$ .

Замѣнивъ снова въ ур. (3) во второй части x черезъ  $x_2$ , найдемъ третье приближение

$$x_3 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_2)^2,$$

снова меньше истинной величины x', ибо  $x_2$  меньше x'. Но  $x_3$  будеть больше  $x_2$ ; въ самомъ дълъ, мы видъли, что  $x_2 > x_1$ ; возвысивъ объ части послъдняго неравенства въ квадратъ, помноживъ на  $\frac{a}{b}$  и придавъ по  $\frac{c}{b}$ , получимъ

$$\frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_2)^2 > \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_1)^2$$

то-есть  $x_3 > x_2$ , и т. д.

Итанъ, последовательныя приближенія пдуть все увеличиваясь, но всегда остаются меньше x', сл. они приближаются къ x'. Докажемъ теперь, что разница между x' и приближеніями стремится къ нулю, и сл. можетъ быть сдълана какъ угодно малою.

Разность между x' и первымъ приблаженіемъ  $x_1$ , т. е. погръшность перваго приблаженія мы выразимъ изъ уравненія (3), которое даетъ (замътивъ, что  $\frac{c}{b} = x_1$ ):

$$x'-x_1=\frac{a}{b}(x')^2.$$

Но x', на основаніи (2), равняется  $\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$ , и слъд. x' меньше  $\frac{2c}{b}$ ; написавъ неравенство

$$x'<\frac{2c}{b}$$

возвысивъ объ его части въ квадратъ и умноживъ на  $\frac{a}{b}$ , найдемъ

$$\frac{a}{b}(x')^2 < \frac{a}{b} \times \frac{4c^2}{b^2};$$

замънивъ первую часть равною ей величиною  $x'-x_1$ , которую обозначимъ черезъ  $\varepsilon_1$ , имъемъ:

$$\varepsilon_i < \frac{4ac}{h^2} \times \frac{c}{h}$$

Эта формула даеть предёль погрёшности 1-го приближенія.

Вообще, погръшность п-го приближенія

$$\begin{split} \varepsilon_n &= x' - x_n = \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b}x'^2\right) - \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b} \cdot x^2_{n-1}\right) = \frac{a}{b}(x'^2 - x^2_{n-1}) \\ &= \frac{a}{b}(x' + x_{n-1})(x' - x_{n-1}). \end{split}$$

Ho

$$x' - x_{n-1} = \varepsilon_{n-1};$$
 a  $x' + x_{n-1} < 2x'$ 

ибо  $x_{n-1} < x';$  но  $x' < \frac{2c}{b},$  откуда  $2x' < \frac{4c}{b},$  а потому и подавно

$$x'+x_{n-1}<\frac{4c}{b}.$$

Следовательно

$$\varepsilon_n < \frac{4ac}{h^2} \cdot \varepsilon_{n-1}$$

Дълая въ этой формуль послъдовательно  $n=2, 3, 4, \ldots, n$  и приписавъ формулу для 1-го приближенія, имъемъ

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\rm I} < \frac{4ac}{b^{\rm g}} \times \frac{c}{b} \\ \varepsilon_{\rm 2} < \frac{4ac}{b^{\rm g}} \times \varepsilon_{\rm I} \\ \varepsilon_{\rm 3} < \frac{4ac}{b^{\rm g}} \times \varepsilon_{\rm 2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\rm n} < \frac{4ac}{b^{\rm g}} \times \varepsilon_{\rm n-1} \end{array} \right.$$

Перемножая почленно эти неравенства, сокращая объ части на общаго множителя

$$\varepsilon_1$$
 .  $\varepsilon_2$  ,  $\varepsilon_3$  . . . . .  $\varepsilon_{n-1}$  ,

получимъ

$$\epsilon_n < \left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$$
 ,  $\frac{c}{b}$  .

Но корни дъйствительные, слъд.

$$b^2 - 4ac > 0$$
,

откуда

$$\frac{4ac}{h^2}$$
 < 1.

Если поличество, меньшее 1, возвышать въ возрастающія степени, то степени эти приближаются къ нулю, если же  $\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$  приближается къ нулю, то и умноженное на понечную величину  $\frac{c}{b}$ , также стремится къ 0.

Итакъ, количеству n всегда можно дать такую величину, чтобы  $\varepsilon_n$  было какъ угодно мало.

Итакъ, указаннымъ способомъ всегда можно найти приближенную величину меньшаго корня съ какою угодно точностью. Причемъ, останавливаясь на приближеніи  $x_n$ , дълаемъ ошибку, меньшую

$$\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{b}$$

Этотъ способъ приложимъ всякій разъ, когда  $\frac{4ac}{b^2} < 1$ , т. е. когда корни дъйствительные; но практически пригоденъ тогда, когда  $\frac{4ac}{b^2}$  весьма малая

дробь сравнительно съ 1, ибо только въ этомъ случав  $x_1, x_2, \dots x_n$  достаточно быстро приближаются въ x'.

Примъръ. Дано ур.

$$3x^2 - 7640x + 400 = 0$$
.

Имвемъ:

$$a=3;$$
  $b=7640;$   $c=400.$ 

$$\frac{4ac}{b^2} = \frac{4 \times 3 \times 400}{58369600} = \frac{4800}{58369600} = \frac{48}{583696}, \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

еслибы нийли дробь  $\frac{48}{480000}$ . . . (1'), то по сокращении она дала-бы  $\frac{1}{10000}$ ; но (1) нибетъ такого же числителя какъ (1'), но большаго знаменателя, слъд. (1) или

$$\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}$$
.

Эта дробь весьма мала сравнительно съ 1, слъд. наша метода приложима. Первое приближение для меньшаго корня есть

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{400}{7640} = \frac{40}{764}$$

его ошибка

$$\varepsilon_{i} < \frac{4ac}{b^{2}} \times \frac{c}{b};$$

но  $\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}$ ; а  $\frac{c}{b}$ , по обращения въ десятичную дробь, даетъ

$$\frac{c}{b} = 0,05235602...$$

слъд.

$$\frac{c}{b}$$
 < 0,06.

Поэтому

$$\epsilon_{\rm i} < \frac{1}{10000} imes \frac{6}{100}$$
, her  $\epsilon_{\rm i} < \frac{6}{1000000}$ 

сл.  $\varepsilon_1$  навърное меньше $\frac{1}{100000}$ 

Слъд., взявъ для x' число 0.05235, получимъ меньшій корень съ ошибкою, меньшею  $\frac{1}{100000}$ ; и такъ

$$x_1 = 0.05235$$
.

Вычислимъ еще второе приближение; оно будетъ

$$x_2 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \cdot (x_1)^2.$$

Ошибка этого приближенія  $\epsilon_2 < \frac{4ac}{b^2} \cdot \epsilon_1$ ; но мы вид'яли, что  $\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}$  , а  $\epsilon_1 < \frac{6}{1000000}$ ; значить

$$\varepsilon_2 < \frac{6}{10000000000}$$

Вычисляя  $\frac{c}{b}$  и  $\frac{a}{b}(x_1)^2$  съ 10-ю дес. знаками, имѣемъ

$$\frac{\frac{c}{b}}{=} 0,0523560209 \dots$$

$$\frac{\frac{a}{b}(x_1)^2}{=} 0,0000010763 \dots$$

$$0,0523570972.$$

Сохрания 9 десятичныхъ мъстъ, имъемъ:

$$x_2 = 0.052357097$$

съ ошибкою  $<\frac{1}{10^9}$  .

Чтобы вычислять другой ворень, нужно изъ сумиы корней, равной  $\frac{7640}{3}$  вычесть найденный; взявъ въ  $\frac{7640}{3}$  девять десятичныхъ мъстъ, имъемъ:

$$\frac{2546,666666666}{-0.052357097}$$
 съ точн. до  $\frac{1}{10^9}$ .

480. 2-й случай. Знаки корней различны.

Если знаки корней различны, что будеть, когда c отрицательно, то, назвавъ абсолютныя величины коэффиціентовъ черезъ a, b и c, уравненіе будеть одного изъ слёдующихъ видовъ:

$$ax^2 + bx - c = 0$$
,  $ax^2 - bx - c = 0$ .

Въ первомъ уравненіи меньшій корень положителенъ, во второмъ отрицателенъ; но если во второе ви. x подставимъ — x, то превратимъ его въ первый видъ, т. е. меньшій корень сдълаемъ положительнымъ.

Поэтому разсмотримъ, какъ найти положит. корень уравненія

$$ax^2 + bx - c = 0$$

по способу последовательных приближеній.

Опредъляя bx, находинъ

$$bx = c - ax^2$$

а отсюда

$$x = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x^2.$$

Последовательныя приближенія будуть:

$$x_1 = \frac{c}{b}; \quad x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x_1)^2; \quad x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} (x_2)^2; \quad x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} (x_3)^2;$$

и вообще

$$x_n = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x_{n-1})^2.$$

Искомый меньшій корень выражается формулою

Очевидно, что

Возвышая обѣ части этого неравенства въ квадратъ и затѣмъ умножая на  $\frac{a}{b}$ , найдемъ

$$\frac{a}{b}(x_1)^2 > \frac{a}{b}(x')^2;$$

вычитая это неравенство изъ равенства  $\frac{c}{b} = \frac{c}{b}$ , получ.

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_1)^2 < \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2;$$

первая часть есть  $x_2$ , а вторая есть x', след.

$$x_2 < x'$$
.

Возвышая объ части этого неравенства въ квадратъ, затъмъ умножая на  $\frac{a}{b}$ , имъемъ

$$\frac{a}{b}(x_2)^2 < \frac{a}{b} \cdot (x')^2;$$

вычитая это неравенство изъ равенства  $\frac{c}{b} = \frac{c}{b}$ , им:

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_2)^2 > \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x')^2;$$

первая часть есть  $x_3$ , а вторая =x', слxд.

$$x_3 > x'$$
;

и т. д.

Продолжая такимъ образомъ, убъдимся, что всъ приближенія нечетнаго порядка больше настоящей величины x', а четнаго—меньше x'.

Кромъ того, если выпишемъ, всъ четныя, затъмъ всъ нечетныя приближенія, получимъ два ряда:

$$x_{1} = \frac{c}{b} \qquad x_{2} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_{1})^{2}$$

$$x_{3} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_{2})^{2} \qquad x_{4} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_{3})^{2}$$

$$x_{5} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_{4})^{2} \qquad x_{6} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_{5})^{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Разсматривая первую пару нечетныхъ приближеній, замічаемъ, что очевидно:

$$x_3 < x_1$$
.

Обращаясь затёмъ къ первой парё четныхъ приближеній, и взявъ ихъ разцость, имёемъ

$$x_{_4}-x_{_2}=rac{a}{b}(x_{_1}{}^2-x_{_3}{}^2)$$
 ; но  $x_{_3}< x_{_1}$  , сябд.  $x_{_4}>x_{_2}.$ 

Переходя во второй пар'т нечетныхъ приближеній и взявъ ихъ разность, находимъ:

$$x_3 - `x_3 = rac{a}{b} (x_4^{\ 2} - x_2^{\ 2}) \; ; \;\;\; {
m Ho} \quad x_4 > x_2 \;\; , \;\;\; {
m chtg.}$$
  $x_5 < x_3 . \;\;\;$ 

Взявъ разность второй пары четныхъ приближеній:

$$x_6 - x_4 = rac{a}{b} (x_3^{\ 2} - x_3^{\ 2}) \; ; \;\;\; {
m Ho} \quad x_5 < x_3 \;\; , \;\;\; {
m chhg}.$$

Завлючаемъ, что приближенія нечетнаго порядка, оставаясь всегда больше x', идутъ постепенно уменьшаясь и слёд. приближаются въ x'; приближенія же четнаго порядка, всегда оставаясь меньше x', идутъ увеличиваясь, и слёд. также приближаются въ x'.

Докажемъ, что разность между тъми и другими приближеніями и x' стремится къ нулю, и слъд. м. б. сдъдана какъ угодно малою.

Возьмемъ приближеніе нечетнаго порядка  $x_{2p+1}$ , которое больше x', и назовемъ погрѣшность этого приближенія т. е. разность между нимъ и x' черезъ $\varepsilon_{2p+1}$ ; имѣемъ:

$$\begin{split} \varepsilon_{2p+1} &= x_{2p+1} - x' = \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_{2p}^2\right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2\right) \\ &= \frac{a}{b} \left(x'^2 - x_{2p}^2\right) = \frac{a}{b} \left(x' + x_{2p}\right) \left(x' - x_{2p}\right) = \frac{a}{b} \left(x' + x_{2p}\right). \varepsilon_{2p} \end{split}$$

 $egin{aligned} & ext{Ho, no (2), } x' < x_1 ext{ или } rac{c}{b}; \ x_{ap}, ext{ какъ приближение четнаго порядка, мень-} \ \end{aligned}$   $me \ x', ext{ a сл. и подавно } < x_1 ext{ или } rac{c}{b}; ext{ итакъ}$ 

$$x'<rac{c}{b}$$
  $x_{2p}<rac{c}{b}$  складыная, имѣемъ  $x'+x_{2p}<rac{2c}{b}$  ;

сявд.

 $\epsilon_{2p+1} < \frac{2ac}{b^2} \cdot \epsilon_{2p}$ .

Кромѣ того

$$arepsilon_i = rac{a}{b} \cdot x'^2, \quad \text{ fo } \quad x' < rac{c}{b}, \text{ cm. } \quad x'^2 < rac{c^2}{b^2}$$

nostony

$$arepsilon_i<rac{u}{b} imesrac{c^2}{b^2}$$
 или множа и дъдя вторую часть на  $2$ :  $arepsilon_i<rac{2ac}{b^2} imesrac{c}{2b}$   $\circ$ 

Выразимъ теперь предълъ погръщности приближенія четпаго порядка, напр.  $x_{2n}$ . Имъемъ

$$\begin{split} \varepsilon_{2p} &= x' - x_{2p} = \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2\right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x^2\right) \\ &= \frac{a}{b} \left(x_{2p-1}^2 - x'^2\right) = \frac{a}{b} \left(x_{2p-1} + x'\right) (x_{2p-1} - x') \\ &= \frac{a}{b} \left(x_{2p-1} + x'\right) \cdot \varepsilon_{2p-1}. \end{split}$$

Ho  $x_{2p-1}$  in x' menume  $x_1$  while  $\frac{c}{b}$ , call

$$\epsilon_{2p} < \frac{2ac}{b^2} \cdot \epsilon_{2p-1}$$

Итакъ, предълъ погръшности четнаго и нечетнаго порядка выражается одинаково: произведеніемъ  $\frac{2ac}{b^2}$  на погръшность предшествующаго приближенія. Слъд., будетъ-ли n четное или нечетное, всегда

$$\varepsilon_{\mathbf{a}} < \frac{2ac}{h^2} \times \varepsilon_{\mathbf{n}-1}$$
.

Полагая въ этой формулъ  $n=2, 3, 4, \ldots, n$  получимъ формулы погръщностей 2-го, 3-го, . . . приближеній; присоединивъ сюда формулу погръщности 1-го приближенія, имъемъ:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 < \frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b} \\ & \varepsilon_2 < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_1 \\ & \varepsilon_3 < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_2 \\ & \vdots \\ & \varepsilon_n < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1}; \end{aligned}$$

Перемножая и сокращая общихъ множителей, найдемъ

$$\varepsilon_n < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}$$

Отсюда видно, что если  $rac{2ac}{b^2}$  будеть < 1, или, что все равно, если

$$a<\frac{b^2}{2c}$$

то всегда можно взять n достаточно большимъ, чтобы сдълать  $\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}$  мень-

тие данной величины; и сл. чтб. погръщность  $\varepsilon_n$ , и подавно, была меньше той же величины.

Но и въ этомъ случат метода удобна только тогда, когда  $\frac{2ac}{b^2}$  будетъ знаимпельно меньше 1, ибо только при такомъ условін  $x_1, x_2, x_3, \cdots$  будутъ быстро приближаться къ искомой величинт. Останавливаясь на приближеніи нечетнаго порядка, получимъ величину ошибочную по избытку; останавливаясь на приближеніи четнаго порядка, имбемъ величину съ ошибкою по недостатку; въ обоихъ случаяхъ высшій предблъ сделанной погрешности узнаемъ, вычисливъ

$$\left(\frac{2ac}{h^2}\right)^n \times \frac{c}{2h}$$
.

Примъръ.  $5x^2 + 140x - 7 = 0$ . Здёсь a = 5; b = 140; c = 7

 $\frac{2ac}{b^2} = \frac{70}{140^2} = \frac{1}{280};$  это число значительно <1, поэтому метода приложима. Первое приближение

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{7}{140} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Погрѣшность этого проближенія,  $\varepsilon_1$ , будеть меньше  $\frac{2ac}{b^2} imes \frac{c}{2b} = \frac{1}{280} imes \frac{1}{40} = \frac{1}{11200}$ , а сл. и подавно,  $<\frac{1}{10000}$ .

Второе приближение

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_1^2 = 0.05 - \frac{1}{28} \times 0.0025 = 0.0499107 \cdot \cdot \cdot$$

Ошибка  $\varepsilon_2<\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^2\times\frac{c}{2b}$ , или  $<\frac{1}{(280)^2}\times\frac{1}{40}=\frac{1}{3136000}$ , а потому и подавно меньше  $\frac{1}{3}\times\frac{1}{1000000}$ .

Значить, положительный корень, съ ошибкою меньшею одной полу-милліонной, равенъ

Сумма корней = -28, сл. отриц. корень, съ тою же точностью, равенъ -27,950089. -

481. Задачи. Рёшить слёдующія численныя уравненія:

1. 
$$\frac{1}{12-5x} + \frac{1}{5x-12} = 1 + \frac{120}{(12-5x)^2}$$

2. 
$$\frac{5}{2+x} - \frac{5}{x-4} = \frac{2-x}{x-4} + \frac{2}{x^2-2x-8}$$

3. 
$$\frac{x+7}{x(x-7)} - \frac{x-7}{x(x+7)} - \frac{7}{x^2-73}$$
.

4. 
$$(3x-2)^2 = 8(x+1)^2 - 100$$
.

5. 
$$3(2x-3)-\frac{22}{x}=(x-\frac{3}{2})5$$
.

6. 
$$\frac{9-x}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{(x-1)^3}{2}$$

7. 
$$11x^2 + 7x - \frac{3}{7} = 4x(x+1) + 1$$

8. 
$$x(12x+0.7) - \frac{7}{11} = x(3x-0.2) + 6\frac{4}{11}$$

9. 
$$\frac{x-3}{x+4} + \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$$

10. 
$$\frac{3x+2}{2x-1} + \frac{7-x}{2x+1} = \frac{7x-1}{4x^2-1} + 5$$
.

11. 
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$$
.

13. 
$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} + \frac{4}{x+4} = 0$$
. 14.  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} = 4$ .

12.  $x^9 - 5(x + 89) = 5555$ .

15. 
$$\frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}} + \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{13}{4}$$
. 16.  $\frac{3x-2}{x-4} + \frac{2x-1}{x-2} = 6 + \frac{50}{x^2-6x+8}$ .

17. 
$$\frac{3}{5(x^2-1)} + \frac{1}{10(x+1)} = \frac{23}{238}$$
 18.  $\frac{8}{x-1} + 8x = \frac{5x}{3} + 40$ .

19. 
$$\frac{4}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-2x-3} = \frac{1}{x^2+4x+3}$$
 20.  $\frac{7}{5(x-3)} - \frac{8}{3(x-15)} = \frac{11}{4x-25}$  21.  $\frac{8}{2x-5} + \frac{9}{5(x-3)} = \frac{20}{7x-25}$  22.  $\frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1$ .

21. 
$$\frac{8}{3x-5} + \frac{9}{5x-8} = \frac{20}{7x-25}$$
 22.  $\frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1$ .  
23.  $\frac{x+0.5}{2.5-x} = \frac{2x-0.5}{x+0.5}$  24.  $\frac{2(x+7)}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+11}{x^2-1} + 4$ .

25. 
$$10x - \frac{14x - 9}{8x - 3} = \frac{18 - 40x^2}{3 - 4x} - 9$$
. 26.  $\frac{x + 3}{x + 2} + \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{3x + 1}{2(x - \frac{4}{3})} - \frac{12}{x^2 - 4}$ .

$$27. \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}.$$

28. 
$$\frac{2x-3}{5} + \frac{1}{7} \left( 5x - \frac{6x+4}{5x+1} \right) = x + \frac{5x+8}{3x-14} + \frac{1}{3} \left( \frac{x}{7} + \frac{x-9}{5} \right)$$

29. 
$$\left(\frac{x}{4} - \frac{x+2}{3}\right) \cdot 3 + \frac{7x+4}{3x+2} = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2x-3} + \frac{x}{2x-3}$$

30. 
$$\frac{2x^2-3x}{x^4-1}-\frac{9}{8}(x^2+1)^{-1}+2(x+1)^{-1}-\frac{10}{x^3-x^2+x-1}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x-1}$$

$$-\frac{4(x+7)}{x^3+x^2+x+1}.$$

31. 
$$7 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$
. 32.  $\frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)^2}$ .

33. 
$$\frac{1}{x} + \frac{3}{x(x-2)} = \frac{6}{x^2-4}$$
.

34. 
$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+7} = \frac{1}{7(x-1)}$$
.

35. 
$$\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}+1$$
.

35. 
$$\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}+1$$
. 36.  $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{13}{2x-1}+\frac{1}{27}$ 

$$37. \frac{1}{3} - \frac{x^9}{3(x-1)} = \frac{1}{3(1-x)} - 2$$

37. 
$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{3(x-1)} = \frac{1}{3(1-x)} - 2$$
. 38.  $\frac{x(x+2)^2(x-3)}{x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 3x + 18} = 0$ .

Рѣшить буквенныя уравненія:

39. 
$$x^2-2bx+(b^2-a^2)=0$$
.

40. 
$$abx^2 - (a^2 + b^2)x + 1 = 0$$
.

41. 
$$abx^2 + ab + b^2 = a^2x + b^2x^2$$

41. 
$$abx^2 + ab + b^2 = a^2x + b^2x^2$$
. 42.  $a^2x^2 + 1 = b^2x^2 + (a-b)x + (a+b)x$ .

43. 
$$(5a^2+b^2)(3x^2-4x+3)=(5b^2+a^2)(3x^2+4x+3)$$
.

44. 
$$25a^2x^2 + 1 = 9b^2x^2 + 10ax$$
.

45. 
$$x^2 - 2a^2x + a^4 + b^4 = 2b^2(x - a^2)$$
.

46. 
$$(x+a)(x-b)(2a-x) = (x-a)(x+b)(2b-x)$$
.

47. 
$$x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$$
.

48. 
$$abx^2 - (a^2 + b^2 + 4ab)x + 2(a^2 + b^2) + 5ab = 0$$
.

49. 
$$x^2 - x\{a(a+1) + b(b+1) - ab\} + a^3 + b^3 = 0$$
.

50. 
$$abx^2 - \{3(a+b)^2 - 2ab\}x + 6(a-b)^2 + 25ab = 0$$
.

51. 
$$x^2-2x(1+3a)-4a^3+13a^2+5a+1=0$$
.

52. 
$$3x^{9}(12-a^{9})-2x(3a^{3}-4a^{2}-24a+24)-3a^{4}+8a^{3}+8a^{2}-32a+16=0$$
.

53. 
$$x^2(b^2+bc+c^2)+3bc(b+c)x+3b^2c^2=0$$
.

$$54. \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0.$$

55. 
$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} = 3.$$

$$56. \frac{a}{x-a} + \frac{c}{x-c} = \frac{2b}{x-b}$$

$$57. \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 = 1 + \frac{cx}{ab}.$$

58. 
$$\frac{x+4a}{x^2-5ax+6a^2} + \frac{x+3a}{x^2-6ax+8a^2} + \frac{x+2a}{x^2-7ax+12a^2} = \frac{29}{24}$$
.

59. Доказать, что уравненіе

$$(1+q^2)x^2+2pqx+(1+p^2)=0$$

не имфетъ действительныхъ корней.

60. Доказать, что кории уравненія

$$x^{2}-(r+t)x+rt-s^{2}=0$$

всегда действительны, каковы бы ни были знаки количествь r, s и t.

61. Доказать, что корни уравненій:

1) 
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{a}$$
; 2)  $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-2} = a$ ; 3)  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} = \frac{1}{a}$ 

всегда действительны, и что если a>0, оба кория 3-го положительны.

62. Доказать, что корни уравненія

$$(x-a)^2-(1+\alpha^2)(x-b)(x-c)=0$$

всегда дъйствительны и вообще неравны. Указать частный случай, когда корни дълаются равными.

63. Доказать, что уравненіе

$$(a^2+b^2+c^2)x^2-2(aa'+bb'+cc')x+a_1^2+b_1^2+c_1^2=0$$

имъемъ кории минимие, за исключениемъ случая, когда

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

64. Доказать, что каждое изъ следующихъ двухъ уравненій:

$$(b^2 - 4ac)x^2 - 2[2ac' + 2ca' - bb']x + (b_1^2 - 4a_1c_1) = 0,$$
  

$$(ab' - ba')x^2 - 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0$$

имъетъ корни дъйствительные, если  $b^2 - 4ac < 0$ .

65. Доказать, что уравненіе

$$(a-x)(c-x)-b^2=0$$

имъетъ корни всегда дъйствительные, и вообще перавные; указать частный случай, когда корни будутъ равные.

66. Доказать, что если кории уравненія

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

дъйствительные и неравные, то корни ур-нія

$$(a+c)(ax^2+2b.x+c)=2(ac-b^2)(x^2+1)$$

будуть мнимые; и обратно: если корни 2-го ур-нія мнимы, то 1-го действительны.

67. Доказать, что если m и n суть два часла одинаковаго знака, и a, b и c — какія угодно дѣйствительныя числа, то уравненіе

$$\frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + c = 0$$

имфетъ корни дъйствительные.

68. Доказать, что если уравненіе  $x^2 + px + q = 0$  имфеть корни действительные, то уравненіе

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$$

имћеть также дъйствительные корни, каковь бы ни быль знакь количества a.

69. Каковы корни уравненія

$$(a^2 - b^2)x^2 - (2a^2 + 3ab - b^2)x + (a^2 + 3ab + 2b^2) = 0$$

при a = b?

70. Къ вакимъ предъламъ стремятся корни уравненія

$$(\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda^2 + 3\lambda + 2)x - (\lambda^2 - 1) = 0,$$

когда  $\lambda$  принимаеть поочередно значенія: 1, —2, —1.

- 71. Ръшить уравнение  $bx^2-c(x-a)^2\equiv d$ , и изслъдовать его кории при  $b\equiv c$ .
- 72. Доказать, что корни уравненія

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} = 3$$

всегда дъйствительны.

- 73. При какомъ значенія  $\lambda$  ур-ніе  $(\lambda-1)x^2-2(\lambda+1)x+(\lambda-2)=0$  имѣетъ дъйствительные равные корни?
- 74. Доказать, что корни ур-нія  $ax^2 + bx + c = 0$  всегда раціоральны, если  $b = am + \frac{c}{a}$ , гд $b = am + \frac{c}{a}$

75. Доказать, что уравненіе

$$(1+p^2+q^2)x^2-[r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs]x+rt-s^2=0$$

имъетъ корни дъйствительные, каковы бы ни были числа  $p,\ q,\ r,\ s$  и t.

Затемъ, доказать, что условіе необходимое и достаточное для того, чтобы корни были равные, выражается равенствами

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

76. Доказать, что если ворни ур-нія  $ax^2 + bx + c = 0$  действительны, то уравненіе  $(2ax + b)^2 - 2a(ax^2 + bx + c) = 0$ 

имфетъ корни мнимые.

77. Доказать, что если ур-ніе  $ax^2 + bx + c = 0$  им'єсть ворни мнямые, то уравненія  $ax^2 + bx + c + h^2(2ax + b) + 2ah^4 = 0,$  $ax^2 + bx + c + x (2ax + b) + 2ax^2 = 0$ 

имъють также мнимые корни.

- 78. При накомъ значенін  $\lambda$  ур-ніе  $(a + \lambda)x^2 a(2a \lambda)x + b 2a^2\lambda = 0$  имѣетъ равные корни.
  - 79. Tota же вопросъ относительно ур-нія  $x^2+2(\lambda-4)x+\lambda^2+6\lambda+3=0$ .
  - 80. Вычислить, по способу последовательных приближеній, корни уравненій:
    - a)  $3x^2 + 254x + 5 = 0$ b)  $4x^2 - 625x - 8 = 0$  } cf toyhocted go 0,1.
    - c)  $0,000048x^2-19x+1=0$ , съ десятью десятичными знаками.
    - d)  $3x^2 + 2615x 540 = 0$ , съ точность до 0,00001.
    - e)  $0,000007x^2 + x 1 = 0$ , съ 12-ю десятичными знаками.
    - f)  $0.0002x^2-2x+3=0$ , съ точностью до 0.000001.
    - g)  $0,00004x^2 8x + 7 = 0$ , съ 11-ю десятичными знавами.
    - h)  $0.001x^2 + x 1 = 0$ , съ точностью до 0.001.

## ГЛАВА ХХХІ

Связь между коэффиціентами и корнями квадратнаго уравненія.—Приложенія.—Построєніе корней квадратнаго уравненія.—Задачи.

**482. TEOPEMA.** *Kanogu бы ни были корни уравненія*  $ax^2 + bx + c = 0$ :

1) их сумма равна взятому съ обратным знаком частному от раздъленія втораго коэффиціента на первый, т. е.

2) а произведение равно частному от раздъления третьяго коэф-фиціента на первый, т. е.

$$\frac{c}{m}$$
.

Повърка. Мы знаемъ, что во всёхъ случаяхъ корни даннаго уравненія выражаются формулами

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

складывая которыя, находимъ

$$x'+x''=-\frac{b}{a};$$

а перемножая, находимъ

$$x'.x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2};$$

замъчая, что числитель представляетъ произведение суммы двухъ количествъ на ихъ разность, и слъд. равенъ разности ихъ квадратовъ, имъемъ:

$$x' \cdot x'' = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^9}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Первое доказательство. Такъ какъ корни x' и x'', при подстановкъ въ уравненіе, обращають его въ тождество, то имъемъ два тождества

$$ax'^2 + bx' + c = 0,$$
  $ax''^2 + bx'' + c = 0.$ 

Принимая за неизвъстныя—коэффиціенты а, b и c, видимъ, что они удовлетворяютъ двумъ ур-мъ, и потому задача объ ихъ нахожденіи неопредъленна.

Но если оба равенства разд $\pm$ лим $\pm$  на a:

$$x'^{2} + \frac{b}{a}x' + \frac{c}{a} = 0,$$
  $x''^{2} + \frac{b}{a}x'' + \frac{c}{a} = 0,$ 

то, принимая за неизвъстныя — отношенія  $\frac{b}{a}$  и  $\frac{c}{a}$ , находимъ, что эти отношенія должны удовлетворять двумъ уравненіямъ, и потому задача объ ихъ нахожденіи опредъленна. Эти два ур-нія и дадутъ намъ величины  $\frac{b}{a}$  и  $\frac{c}{a}$  въ функціи корней. Для исключенія  $\frac{c}{a}$  вычитаемъ 2-е ур-ніе изъ 1-го и находимъ

$$(x'^2-x''^2)+\frac{b}{a}(x'-x'')=0.$$

Подожимъ, что  $x' \lessgtr x''$ ; въ такомъ случав позволятельно сократить ур-ніе на количество x'-x'' (какъ неравное нулю), и получится

$$x' + x'' + \frac{b}{a} = 0$$
, отнуда  $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ .

Внеся вмѣсто  $\frac{b}{a}$  равную ему величину — (x' + x'') въ первое уравненіе, найдемъ

$$x'^2-(x'+x'')x'+rac{c}{a}=0$$
, или  $-x'x''+rac{c}{a}=0$ , откуда  $x'x''=rac{c}{a}$ .

Теорема доказана; но опредъленіе  $\frac{b}{a}$  сдълано въ предположеніи, что корни неравны. Остается доказать, что теорема справедлива и въ случат равныхъ корней. Мы знаемъ, что если корни равны, то каждый изъ нихъ  $=-\frac{b}{2a}$ , слъд., ихъ сумма  $=-\frac{b}{a}$ ; а отсюда, какъ и выше, найдемъ, что  $x'x''=\frac{c}{a}$ .

В торое докавательство. Такъ какъ x' и x'' суть корни уравненія  $ax^2 + bx + c = 0$ , то триномъ  $ax^2 + bx + c$  обращается въ ноль при подстановкѣ въ него x' и x'' вмѣсто x, и слѣд. дѣлится какъ на x - x', такъ и на x - x'': слѣд., если x' не равно x'', то этотъ триномъ, на осн. теоремы § 68, дѣлится и на произведеніе (x - x')(x - x''), а какъ дѣлитель —одинаковой степени съ дѣлимымъ, то частное будетъ нулевой степени относительно x, и потому приводится къ одному члену, имепно къ частному отъ раздѣленія перваго члена  $ax^2$  дѣлимаго на первый членъ  $x^2$  дѣлителя, что даетъ a. Итакъ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''),$$

или, раскрывъ вторую часть и расположивъ по степенямъ буквы x, находимъ тождество

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'';$$

а отнявъ отъ объихъ частей по  $ax^2$ ;

$$bx + c = -a(x' + x')x + ax'x''$$
.

Отсюда, по теоремъ § 73, имъемы

$$b = -a(x' + x'')$$
 If  $c = ax'x''$ ;

выражая изъ 1-го равенства x' + x'', а изъ 2-го x'x'', находимъ:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}; \qquad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

И это доказательство предполагаеть, что  $x' \leq x''$ . Но нужно замѣтить, что если найденныя соотношенія вѣрны, когда корни различны, то они приложимы и тогда, когда корни разнятся между собою какъ угодно мало, а потому справедливы и для равныхъ корней.

483. Примъчаніе. Если уравненіе имбеть видъ

$$x^2 + px + q = 0$$
,

то, чтобы перейти въ нему отъ уравненія  $ax^2 + bx + c = 0$ , надо положить: a = 1, b = p, c = q.

Тогда формулы соотношеній примутъ видъ:

$$x'.x'' = \frac{q}{1} = q;$$
  $x' + x'' = -\frac{p}{1} = -p;$ 

слъд., сумма корней уравненія  $x^2 + px + q = 0$  равна коэффиціенту при первой степени неизвъстнаго, взятому съ обратнымъ знакомъ, а произведеніе корней равно извъстному члену.

**484.** Слъдствія. І. Вычислить разность корней уравненія  $ax^2 + bx + c = 0$ , не ръшая уравненія.

Обозначивъ разность корней буквою z, можемъ выразить  $z^2$  по суммъ и произведенію корней; на самомъ дълъ:

$$s^2 = (x'-x'')^2 = x'^2 + x''^2 - 2x'x'' = x'^2 + x''^2 + 2x'x'' - 4x'x''$$
 $= (x'+x'')^2 - 4x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$  откуда
 $s = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$ 

Тотъ же результатъ нашли бы и прямымъ вычитаніемъ корней.

II. Когда извъстенъ одинъ изъ корней квадратнаго уравненія, то другой можно найти, не ръшая уравненія, a: 1) раздълявъ произведеніе корней  $\left(\frac{c}{a}\right)$  на извъстный корень, или: 2) вычтя извъстный корень изъ суммы корней, т. е. изъ  $-\frac{b}{a}$ .

Примъръ. Ришить уравнение  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}$ . Прямо видно, что уравнение имъетъ корень x' = a, ибо при x = a объ части дълаются тождественными.

Для нахожденія втораго корня приводимъ уравненіе къ целому виду:

$$(2a+b)x^2+(b^2-2a^2)x-ab(a+b)=0;$$

и раздъливъ произведение корней  $-\frac{ab(a+b)}{2a+b}$  на извъстный корень a, найдемъ другой корень

$$x'' = -\frac{b(a+b)}{2a+b}.$$

Можно решить это ур-ніе и другимъ прісмомъ; нанишемъ его въ видъ

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{x+b} - \frac{1}{a+b} = 0, \quad \text{fig. } (a-x)[(x+b)(a+b) + ax] = 0,$$

Приравнивая нулю первый множитель, находимъ одинъ корень x' = a; приравнивая нулю второй множитель, получаемъ ур-ніе первой степени

$$(x+b)(a+b) + ax = 0$$
,

откуда и найдемъ второй корень.

III.—Когда коэффиціенты уравненія соизмъримы, то дпйствитильные корни или оба соизмъримы, или оба несоизмъримы, потому-что ихъ сумма, напр., сопзиврима; и когда они несоизмъримы, то сопряженны.

IV.—Когда каэффиціенты ур-нія дыйствительны, то или оба корня дыйствительны, или оба мнимы, ибо ихъ сумма дъйствительна, и когда они мнимы, то сопряженны.

Переходимъ въ изученію приложеній теоремы § 482.

485. Приложение І. Изслъдованіе, а ргіогі, корней квадратнаго уравненія.

Опредъленіе. — Изслюдовать à priori квадратное уравненіе значить: не ришая его, опредълить, будуть-ли корни его дъйствительные или мнимые; когда они дъйствительны, узнать — равные они, или неравные; въ случат ихъ равенства, указать ихъ общую величину, въ случат же неравенства указать — одинаковаго они знака, или имъють знаки противоположные; если имъють общій знакь, то указать — какой именно; если же знаки корней различны, то указать знакь корня, имъющаго большую абсолютную величину.

1. Если окажется, что

$$b^2 - 4ac < 0$$
,

то корни уравненія будуть мнимые сопряженные.

2. Если

$$b^2 - 4ac = 0$$
,

то мы знаемъ, что корни уравненія дъйствительные равные, и общая величина ихъ есть.

$$-\frac{b}{2a}$$
.

3. Наконецъ, если окажется, что

$$b^2 - 4ac > 0$$
,

то заключаемъ, что ур-ніе имѣетъ корни дъйствительные исравные. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что для опредѣленія знака разности  $b^2-4ac$  не всегда необходимо вычислять эту разность, а именно если ac < 0, т. е. а и с импъютъ знаки противоположные, то разность  $b^2-4ac$  необходимо положительна. Въ самомъ дѣлѣ, если ac < 0, то можно положить  $4ac = -\alpha^2$ , гдѣ  $-\alpha^2$  количество существенно—отрицательное, и слѣд.  $b^2-4ac = b^2-(-\alpha^2)=b^2+\alpha^2$ , а сумма квадратовъ дѣйствительныхъ количествъ существенно положительна. Значитъ при ac < 0 корни уравненія безусловно дъйствительны.

Когда уравненіе имфетъ корни действительные и неравные, то:

Если  $\frac{c}{a}>0$ , т. е. произведеніе корней положительно, оба корня имѣють одинаковые знаки. Но если знаки корней одинаковы, то общій знакъ будетъ такой, какъ у ихъ суммы, которая равна  $-\frac{b}{a}$ .

Отсюда:

Если  $\frac{b}{a}>0$ , то  $-\frac{b}{a}$  будеть комичество отрицательное, и след. оба корня отрицательны.

Если  $\frac{b}{a} < 0$ , то  $-\frac{b}{a}$  положительно, и потому оба кория положительны.

Если же  $\frac{c}{a}$  < 0, т. е. произведеніе корней отрицательно, то знаки корней противоположны. Но въ такомъ случав сумма ихъ имветь такой знакъ, какой у корня съ большею абсолютною величиной. Отсюда:

Если  $\frac{b}{a}>0$ , то сумма корней  $-\frac{b}{a}$  будеть отрицательна, и слёд. большій, по абсолютной величині, корень отрицателень.

Если же  $\frac{b}{a} < 0$ , и след.  $-\frac{b}{a} > 0$ , то большій корень положителенъ.

Примъры.-І. Изсладовать корни уравненія

$$7x^2 + 3x + 5 = 0;$$

въ данномъ случав  $b^2-4ac=3^2-4\times7\times5=-131$ , т. е. количеству отрицательному, слъд. корни — мнимъге.

II. Изслыдовать корни уравненія

$$9x^2 + 12x + 4 = 0$$
.

Такъ какъ коэффиціентъ при x четный, то составляетъ разность  $b'^2-ac$ ; имъемъ  $b'^2-ac=6^2-9\times 4=0$ , а потому корни ур-нія дъйствительные разные. Общая величина ихъ  $=-\frac{b'}{a}=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$ .

III. Изсладовать корни уравненія

$$3x^2-8x+4=0$$
;

 $b'^2-ac=4^2-3\times 4=+4$ , сябд. корни дъйствительные неравные. Произведеніе корней  $=+\frac{4}{3}$ , т. е. положительно, сябд. знаки корней одинаковы. Сумма корней  $=+\frac{8}{3}$ , т. е. >0, сябд. оба корня положительны.

IV. Изслюдовать корни уравненія.

$$8x^{9} + 57x + 10 = 0;$$

 $b^2-4ac=57^2-4\times8\times10=+2929$ , количеству положительному, поэтому корни—дъйствительные неравные. Произведеніе ихъ, равное  $+\frac{10}{8}$ , положительно, слъд. знаки корней одинаковы. Сумма корней, равная  $-\frac{57}{8}$ , отрицательна, слъд. оба корня отрицательны.

Ү. Изслыдовать корни уравненія

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$
;

а и с имъютъ знаки противоположные, слъд. корни—дъйствительные перавные. Произведение ихъ, равное — 1, отрицательно, потому знаки корней различны. Сумма корней, равная  $+\frac{8}{3}$ , положительна, слъд. большій по абсолютной величинъ корень положителенъ.

VI. Изслыдовать корни уравненія

$$3x^2 + 8x - 3 = 0;$$

a и c — разнаго знака, слъд. опять корни уравненія дъйствительные, неравные и разнаго знака. Сумма ихъ, равная —  $\frac{8}{3}$ , отрицательна, слъд. большій по абсолютной величинъ корень отрицателенъ.

486. Приложение II. Составление квадратнаго уравнения по даннымъ корнямъ.

Пусть требуется составить квадратное уравненіе, корнями котораго были бы количества а и β. Искомое ур-ніе должно быть вида

$$x^2 + px + q = 0;$$

нужно опредълить коэффиціенты p и q; соотношенія между коэффиціентами и корнями дають:

$$p = -(\alpha + \beta)$$
,  $q = \alpha \cdot \beta$ ;

искомое ур-ніе такимъ образомъ есть

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

 $\Pi$  Римъры I. Составить ур-ніе, котораю корни былибы:  $\frac{2}{5}$  и  $-\frac{3}{4}$  · Искомое ур-ніе должно быть вида

$$x^2 + px + q = 0$$

причемъ должно быть:

$$p = -\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{20}$$
,  $q = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{20}$ ;

слъд. искомое ур-ніе будеть:

$$x^2 + \frac{7}{20}x - \frac{6}{20} = 0$$
, and  $20x^2 + 7x - 6 = 0$ .

II. Составить ур-ніе, корнями котораго были-бы  $\frac{a}{a+b}$  и  $\frac{b}{a-b}$ . Искомов ур-нів должно быть вида

$$x^2+px+q=0,$$
 гдѣ  $p=-\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)=-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}; \quad q=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a-b}=\frac{ab}{a^2-b^2};$  слѣд. ур-ніе будеть

$$x^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$
  $x + \frac{ab}{a^2 - b^2}$ , where  $(a^2 - b^2)x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ .

III. Составить квадратное уравненіе, съ соизмъримыми коэффиціентами, которое имъло бъл корень  $5-3\sqrt{7}$ .

Искомое уравеніе должно быть вида

$$x^2 + px + q = 0;$$

такъ какъ, по условію, p и q должны быть соизмюримы, и мы доказали, что ур-ніе съ соизмѣримыми коэффиціентами, имѣющее корень  $5-3\sqrt{7}$ , имѣетъ другой корень сопряженный съ первымъ; слѣд. второй корень будетъ  $5+3\sqrt{7}$ ; поэтому

$$p = -(5 - 3\sqrt{7} + 5 + 3\sqrt{7}) = -10;$$
  
$$q = (5 - 3\sqrt{7})(5 + 3\sqrt{7}) = -38;$$

сявд. искомое уравнение есть

$$x^2-10x-38=0$$
.

Примъчаніе.—Задача эта опредъленна только тогда, когда существуетъ условіе, чтобы коэффицієнты искомаго уравненія были соизмѣримы; если этого требованія нѣтъ, то задача неопредѣленна, ибо существуетъ безчисленное множество квадратныхъ уравненій, имѣющихъ данный корень; такъ, уравненія, имѣющія корень  $5 - 3\sqrt{7}$  (называя другой корень буквою  $\lambda$ ), суть

$$x^{3} - (\lambda + 5 - 3\sqrt{7}) + \lambda(5 - 3\sqrt{7}) = 0$$

гдъ л-произвольное количество.

Въ § 471 мы видъли, что условіе, чтобы квадратное ур-ніе съ соизмъримыми коэффиціентами удовлетворилось несонзивренымъ значеніенъ  $\alpha + \sqrt{\beta}$  неизвъстнаго, выражалось двумя соотношеніями между коэффиціентами. Взявъ эти соотношенія, мы имъли бы два ур-нія, изъ которыхъ могли бы получить уже найденныя значенія для p и q.

IV. Составить квадратное ур-ніе, съ дъйствительными коэффиціентами, имъющее корень 2+3i.

Искомое ур-ніе имфеть видъ

$$x^2 + px + q = 0$$
;

для опредъленія p и q замівчаємь, что ур. ст дийствительными коэффиціентами, иміющее корень 2+3i, иміють другимь корнемь мнимов сопряженное выраженіе 2-3i. Отсюда

$$p = -(2+3i+2-3i) = -4,$$
  $q = (2+3i)(2-3i) = 13;$  и искомое ур-ніе будеть  $x^2-4x+13=0.$ 

Примъчаніе. Задача эта опредёленна потому только, что на коэффиціенты наложено ограниченіе, чтобъ они были дъйствительны. Если этого ограниченія нътъ, задача неопредёленна; называя буквою х совершенно произвольное количество, дъйствительное или мнимое, получимъ уравненіе

$$x^2 - (\lambda + 2 + 3i) + \lambda (2 + 3i) = 0.$$

необходимо имъющее одинъ изъ корней равный 2 + 3i.

Если бы мы прямо выразили, что 2+3i удовлетворяеть ур-нію  $x^2+px+q=0$ , то (см. § 473) въ случав дъйствительныхъ p и q, нашли бы два ур-нія для опредъленія p и q, именно:

$$4-9+q+2p=0,$$
  $12+3p=0,$ 

откуда нашли бы p = -4, q = 13.

487. Приложение III. Преобразование норней неадратнаго уравнения.

ЗАДАЧА І. Дано квадратное уразненіе  $ax^2 + bx + c = 0$ ; составить другое уразненіе, котораго корни отличались бы отъ корней даннаго только знаками.

Искомое уравнение будеть вида

$$x^2 + px + q = 0$$
.

если корни даннаго ур-нія обозначимъ буквами x' и x'', то корни новаго должны равняться — x' и — x'': подъ этимъ условіємъ и нужно опредѣлить p и q. Итакъ

$$p = -(-x' - x'') = x' + x'' = -\frac{b}{a};$$
  $q = (-x') \cdot (-x'') = x'x'' = \frac{c}{a}$ 

Слъд., искомое уравнение будетъ

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
, ALE  $ax^2 - bx + c = 0$ .

Легко видъть, что мы его получимъ прямо изъ даннаго, подставиет въ послъднее — х вмъсто х.

ЗАДАЧА II. Дано квадратное ур.  $ax^2 + bx + c = 0$ ; составить другое ур-ніе, корни котораго были бы обратны корнямь даннаго.

Пусть корни даннаго уравненія будуть x' и x''. Мы хотимь составить уравненіе,  $x^2 + px + q = 0$ , корнями котораго были бы  $\frac{1}{x'}$  и  $\frac{1}{x''}$ ; слѣдовательно

$$p = -\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\right) = -\frac{x' + x''}{x' + x''} = -\left(-\frac{b}{a} : \frac{c}{a}\right) = \frac{b}{c};$$

$$q = \frac{1}{x'} \cdot \frac{1}{x''} = \frac{1}{x'x''} = 1; \frac{c}{a} = \frac{a}{c}.$$

Такимъ образомъ, искомое ур-ніе будетъ

$$x^{2} + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$$
, REF  $cx^{2} + bx + a = 0$ .

этотъ же результатъ мы найдемъ, если въ данное ур. подставимъ  $\frac{1}{x}$  вмѣсто x; въ самомъ дълъ, подстановка эта даетъ

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c = 0$$
, HIH  $cx^2 + bx + a = 0$ .

Итакъ: уравнение съ обратными величинами корней выводится изъ даннаго зампною x обратнымъ ему количествомъ  $\frac{1}{x}$ .

3 А Д А Ч А III. По данному уравненію  $ax^2 + bx + c = 0$ ; составить другов, корни котораго равнялись бы корнямь даннаго, сложеннымь съ даннымь количествомь  $\lambda$ .

Пусть корни даннаго уравненія будуть x' и x''; требуется составить уравненіе  $x^2 + px + q = 0$ , корни котораго были бы  $x' + \lambda$  и  $x'' + \lambda$ . Следовательно

$$p = -(x' + x'' + 2\lambda) = -(-\frac{b}{a} + 2\lambda) = \frac{b}{a} - 2\lambda;$$

$$q = (x' + \lambda)(x'' + \lambda) = x'x'' + (x' + x'')\lambda + \lambda^2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\lambda + \lambda^2.$$

Требуемое уравненіе есть, следоват.,

$$x^{2} + \left(\frac{b}{a} - 2\lambda\right)x + \left(\lambda^{2} - \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a}\right) = 0,$$
  
$$ax^{2} + (b - 2a\lambda)x + (a\lambda^{2} - b\lambda + c) = 0.$$

или

Этотъ результатъ мы нашли бы, если бы въ данное ур-ніе вмѣсто x подставили  $x - \lambda$ ; въ самомъ дѣлѣ, подстановка эта даетъ

$$a(x-\lambda)^2 + b(x-\lambda) + c = 0,$$

или, раскрывая скобки и приводя члены въ порядокъ,

$$ax^2 + (b - 2a\lambda)x + (a\lambda^2 - b\lambda + c) = 0.$$

Итакъ: уравнение съ корнями даннаго, сложенными съ  $\lambda$ , выводится изъданнаго зампною x биномомъ  $x - \lambda$ .

Примъръ. Составить уравнение, котораго корни были ды больше корней ур-ния  $3x^2-5x-4=0$  на 2.

Замънивъ въ данномъ уравненім x разпостью x-2, имвемъ:

$$3(x-2)^2-5(x-2)-4=0$$
, where  $3x^2-17x+18=0$ .

**488.** Эта задача важна по своему отношенію къ слёдующимъ двумъ вопросамъ, встрівчающимся при изслідованіи задачь второй степени.

Вопросъ І. Выразить, что оба корня квадратнаго уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0$$

больше даннаго количества д.

Если ворни уравненія назовемъ буквами x' и x', то но условію должно быть

$$x' > \lambda$$
 in  $x'' > \lambda$ , then, who so we,  $x' - \lambda > 0$  in  $x'' - \lambda > 0$ ...(1).

Если теперь по данному уравненію мы составимъ такое, котораго корни равнялись бы  $x' - \lambda$  и  $x'' - \lambda$ , то найдемъ требуемыя условія, выразивъ, что корни новаго уравненія должны быть положительны (въ силу 1).

$$ax^2 + (b+2a\lambda)x - (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \dots (2)$$

Чтобы кории этого ур-нія были положительны, необходимо, чтобы: 1) ихъ произведеніе было положительно; 2) ихъ сумна была положительна. Итакъ, требуемыя условія будуть:

1) 
$$\frac{a\lambda^2+b\lambda+c}{a}>0$$
, или, умноживъ объ части на  $a^2$ ;

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0;$$

2)  $-\frac{b+2a\lambda}{a} > 0$ , или, умноживъ объ части на  $-a^2$ :

$$a(b+2a\lambda)<0$$
.

Примъчание. Чтобы выразить, что корни даннаго ур-нія оба меньше  $\lambda$ , необходимо выразить, что корни ур-нія (2) оба отрицательны; сдълавъ это, получимъ условія:

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0;$$
  $a(b + 2a\lambda) > 0.$ 

Вопросъ II. Выразить, что данное количество  $\lambda$  заключается между корнями ур-нія  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Пусть корни даннаго уравненія будуть x' и x'', причемъ x' < x''. По условію должно быть:

$$x'<\lambda$$
 и  $x''>\lambda$ , или  $x'-\lambda<0$  и  $x''-\lambda>0$ ...(1) Ур-ніе, имѣющее корни  $x'-\lambda$  и  $x''-\lambda$ , есть

$$ax^2 + (b+2a\lambda)x + (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Въ силу неравенствъ (1) корни этого ур-нія должны имѣть противоположные знаки, слъд., необходимо и достаточно, чтобы ихъ произведеніе было отрицательно, т. е. чтобы

$$\frac{a^{\lambda^2}+b^{\lambda}+c}{a}<0, \quad \text{ или } \quad a(a\lambda^2+b\lambda+c)<0.$$

489. *Приложение IV*. Найти соотношение между коэффиціентами квадратнаго уравненія подъ условіємъ, чтобы между корнями уравненія существовала данная зависимость.

Задача І. Какая связь должна существовать между коэффиціентами уравненія  $ax^2 + bx + c = 0$ , чтобы его корни x' и x'' удовлетворяли условію px' - qx'' = r?

Ръшивъ данное уравненіе и подставивъ найденные корни въ равенство px' - qx'' = r, найдемъ требуемое условіе. Но обыкновенно требуется дать искомое условіе, не ръшая ур-нія; этого достигнемъ слъдующимъ пріемомъ.

Говоря, что x' и x'' суть корни даннаго ур-нія, мы выражаемъ этимъ, что они удовдетворяють ур-мъ:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \qquad \text{if} \qquad x'x'' = \frac{c}{a},$$

и наобороть. Слёд., задачу можно формулировать такъ:

Какова должна быть связь между коэффиціентами даннаго ур-нія, чтобы х' п х" удовлетворяли тремь ур-мь.

$$px'-qx''=r, \qquad x'+x''=-\frac{b}{a}, \qquad x'x''=\frac{c}{a}.$$

Очевидно, рътпивъ два изъ этихъ ур-ній (и проще первыя два, какъ ур-нія 1-й степени), мы найдемъ требуемое условіе, подставивъ найденныя ръшенія въ 3-е. Первыя два даютъ:

$$x' = \frac{ar - bq}{a(p+q)}, \qquad x'' = -\frac{bp + ar}{a(p+q)};$$

подставляя въ третье, найдемъ:

$$-\frac{(ar-bq)(ar+bp)}{a^2(p+q)^2} = \frac{c}{a}, \quad \text{with} \quad (ar-bq)(ar+bp) + ac(p+q)^2 = 0.$$

Это и есть требуемое соотношение.

ЗАДАЧА II. Опредълить х такъ, чтобы корни х' и х" уравненія

$$(2\lambda - 1)x^2 + (5\lambda + 1)x + (3\lambda + 1) = 0$$

имъли отношение  $\frac{3}{2}$ .

Согласно условію, корни должны удовлетворять уравненіямъ

$$2x' = 3x''$$
,  $x' + x'' = -\frac{5\lambda + 1}{2\lambda - 1}$ ,  $x'x'' = \frac{3\lambda + 1}{2\lambda - 1}$ 

Ръшая первыя два, находимъ

$$x' = -\frac{3(5\lambda+1)}{5(2\lambda-1)},$$
  $x'' = -\frac{2(5\lambda+1)}{5(2\lambda-1)};$ 

внося въ третье уравнение, имбемъ

$$\frac{6(5\lambda+1)^2}{25(2\lambda-1)^2} = \frac{3\lambda+1}{2\lambda-1}, \quad \text{или} \quad 6(5\lambda+1)^2 - 25(3\lambda+1)(2\lambda-1) = 0:$$

это и есть соотношение, которому должно удовлетворять  $\lambda$ ; располагая по степенямь  $\lambda$ , имбемъ

$$0\times\lambda^2+85\lambda+31=0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \infty$$
,  $\lambda_2 = -\frac{31}{85}$ .

Провъримъ, действительно-ли эти значенія д суть требуемыя.

Во-первыхъ посмотримъ, каковы корни даннаго ур-нія при  $\lambda\!=\!\infty$ ; для этого выносимъ  $\lambda$  за скобки:

$$\lambda \left[ \left( 2 - \frac{1}{\lambda} \right) x^2 + \left( 5 + \frac{1}{\lambda} \right) x + \left( 3 + \frac{1}{\lambda} \right) \right] = 0;$$

отсюда видно, что когда  $\lambda$  приближается въ безконечности, корни даннаго ур-нія стремятся въ предъламъ, удовлетворяющимъ ур-нію  $2x^2+5x+3=0$ , откуда  $x'=-\frac{3}{2}$  в x''=-1; отношеніе x':x'' дъйствительно =3:2.

Во вторыхъ, при  $\lambda = -\frac{31}{85}$  данное ур-ніе береть видъ  $147x^2 + 70x + 8$  = 0, откуда  $x' = -\frac{2}{7}$ ,  $x'' = -\frac{4}{21}$ ; дѣйствительно x' : x'' = 3 : 2.

490. *Приложение V*. Каному условію должны удовлетворять ноэффиціенты двухъ нвадратныхъ уравненій

$$ax^2 + bx + c = 0$$
, . . . (1)  $a'x^2 + b'x + c' = 0$ , . . . . (2) чтобы эти ур-нія имѣли одинъ общій корень?

Первое рашенте. Пусть корни ур-нія (1) суть  $\alpha$  и  $\beta$ ; ур-нія (2)  $\alpha$  и  $\beta'$ , гдѣ  $\alpha$ —общій корень; мы имѣемъ 4 уравненія

(7) 
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \cdot \cdot \cdot \cdot (3) & \text{Докажемъ, что для того чтобы данныя} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \cdot \cdot \cdot \cdot (4) & \text{ур-нія имѣли одинъ общій корень, необходимо и достаточно, чтобы ур-нія (7) съ  $\alpha + \beta' = -\frac{b'}{a'} \cdot \cdot \cdot \cdot (5) & \text{тремя неизвѣстными } \alpha, \beta \text{ и } \beta' \text{ имѣли но крайней мѣрѣ одно общее рѣшеніе. Въ са- } \\ \alpha\beta' = \frac{c'}{a'} \cdot \cdot \cdot \cdot (6) & \text{момъ дѣлѣ:} \end{cases}$$$

1) Если ур-нія (1) и (2) им'єють общій корень  $\alpha$ , то ур-нія системы (7) будуть удовлетворены этимъ корнемь  $\alpha$  и двумя не общими корнями  $\beta$  и  $\beta'$ .

2) Если ур-нія (7) имъють общее ръшеніе ( $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\beta$ ), то: корни  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяя ур-мъ (3) и (4), служать корнями (1), а  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяя (5) и (6), будуть корнями ур-нія (2); т. е.  $\alpha$  и будеть общимъ корнемъ данныхъ ур-ній.

Итакъ, искомое условіе есть условіе, при которомъ система (7) имѣетъ общее рѣшеніе; это условіе найдемъ, исключивъ  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\beta'$  изъ ур-ній системы (7). Комбинируя (3) и (5), имѣемъ

$$\beta - \beta' = \frac{ab' - ba'}{aa'}; \cdot \cdot \cdot \cdot (8)$$

комбинируя (4) съ (6), получимъ

$$\alpha(\beta - \beta') = \frac{ca' - ac'}{aa'} \cdot \cdot \cdot \cdot (9).$$

Отсюда:

$$\alpha = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Слъд. язъ (4) имъемъ 
$$\beta = \frac{c(ab'-ba')}{a(ca'-ac')}$$

Подставляя эти величины въ (3), и найдемъ искомое условіе:

$$\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'} + \frac{c(ab'-ba')}{a(ca'-ac')} + \frac{b}{a} = 0,$$

что не трудно принести къ виду

$$(ca'-ac')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0.$$

Второе рышеніе. Полагая a и a' отличными оть нуля, и умноживь ур. (1) на a', а (2) на a, замёнимь ихъ двумя слёдующими, имъ тождественными:  $aa'x^2 + ba'x + ca' = 0$ , . . . (10),  $aa'x^2 + ab'x + ac' = 0$ , . . . (11) изъ которыхъ тотчасъ выводимъ слёдующія замёчанія:

- 1) Если ab' ba' = 0, то ур-нія не могуть имъть никакого общаго ръшенія, если въ то же время не будеть и ac' ca' = 0; но въ такомъ случать оба ур-нія дълаются тождественными, иначе говоря, имъють два общихъ кория.
- 2) Если ac' ca' = 0, то ур-нія не могуть им'єть ни одного общаго корня, если приэтомъ не будеть н ab' ba' = 0; но тогда опять оба ур-нія будуть тождественны.
- 3) Изъ сопоставленія этихъ замѣчаній выводимъ то заключеніе, что если два квадратныя ур-нія имѣютъ одинъ только общій корень, то разности ab' ba' и ac' ca' отличны отъ нуия; слѣд. по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ c и c' не есть ноль.

Зная это, вычтемъ изъ (10) ур-ніе (11); найдемъ

$$(ab'-ba')x+ac'-ca'=0, \ldots (12).$$

По извъстному принципу, система (1) и (2) тождественна системъ (1) и (12); слъд., общій корень, м. б. найденъ изъ послъдней системы; а какъ ур. (12) есть ур-ніе 1-й степени и слъд., имъетъ только одинъ корень, значитъ, если данныя ур-нія имъютъ общій корень, онъ долженъ быть

$$x = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \cdot$$

Будучи общимъ корнемъ системы (1) и (12), онъ долженъ удовлетворять ур-нію (1); такъ что искомое условіе найдемъ, подставивъ найденное для x значеніе въ ур-ніе (1). Итакъ

$$\frac{a(ac'-a'c)^2}{(ab'-a'b)^2} - \frac{b(ac'-a'c)}{ab'-a'b} + c = 0,$$

что легко привести къ виду

$$(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0, \ldots (13).$$

соотношение это просто, симметрочно и легко удерживается въ памяти.

Его можно представить въ другой формъ. Раскрывъ скобки и умноживъ всъ члены на 4, найдемъ:

 $4a^2c'^2+4c^2a'^2-8aca'c'-4ab'bc'-4ba'cb'+4b^2a'c+4b'^2ac=0,$  или, придавъ и вычтя  $b^2b'^2$ , можемъ дать ему видъ:

$$b^{2}b'^{2} + 4a^{3}c'^{2} + 4e^{3}a'^{2} - 4bb'ac' - 4bb'ca' + 8ac'ca' - b^{2}b'^{2} + 4acb'^{2} + 4a'c'b^{2} - 16aca'c' = 0,$$

$$(bb' - 2ac' - 2ca')^{2} - (b^{2} - 4ac)(b'^{2} - 4a'c') = 0$$
(1)

Примпчаніе І. Общій корень раціоналень; слёд. онъ не м. б. мнимымъ. Слёд., когда два квадратныя ур-нія имёють одинъ общій корень, всё ихъ корни дёйствительны и потому

$$b^2-4ac>0$$
 If  $b'^2-4a'c'>0$ .

Это же можно видъть и непосредственно. Если квадратное ур-ніе имъетъ корень  $\alpha+\beta i$ , то другой его корень будетъ  $\alpha-\beta i$ ; а слъд. если два ур-нія имъютъ одинъ общій мнимый корень, то они имъютъ два общихъ корня и слъд. тождественны.

Примъчаніе II. Мы замітили, что два квадратных ур-нія не могуть иміть общаго корня, если ac'-ca'=0, и приэтомь ab'-ba' отлично оть нуля. Слідуєть прибавить: исключая случая, коїда c=c'=0.

Въ самомъ дълъ, въ этомъ случат ac'-ca'=0 и ур-нія будутъ

$$ax^2 + bx = 0,$$
  $a'x^2 + b'x = 0;$ 

очевидно, что они имѣютъ общій корень x=0, и что два другіе корня, опредъиженые ур-ми

$$ax + b = 0, \qquad a'x + b' = 0$$

различны, ибо по положенію, ab' - ba' не равно нулю.

Замѣтимъ, что соотношеніе (13) удовлетворяется и при c=c'=0; слѣд., оно общее и примѣнимо и къ исключительному случаю, о которомъ идетъ рѣчь.

- 491. Приложение VI. Условіе, при которомъ два квадратныхъ ур-нія имъ-ютъ два общихъ корня.
- I. Называя общіє корни уравненій  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $a'x^2 + b'x + c' = 0$  буквами  $\alpha$  и  $\beta$ , будемь им'ять

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$
,  $\alpha + \beta = -\frac{b'}{a'}$ ,  $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ,  $\alpha\beta = \frac{c'}{a'}$ 

откуда необходимо, чтобы

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}$$
 и  $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ , что можно представить въ вид $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$ 

Эти условія, будучи необходимы, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточны, ибо, какъ скоро они выполнены, то называя общую величину равныхъ отношеній (1) буквою К, имѣемъ: a'=aК, b'=bК, c'=cК и потому второе уравненіе беретъ видъ  $K(ax^2+bx+c)=0$  или  $ax^2+bx+c=0$ , т. е. ничѣмъ не отличается отъ перваго, а слѣд. имѣетъ тѣже корни какъ и первое. Итакъ:

Чтобы два квадратных уравненія импли два общих корня, необходимо и достаточно, чтобы их коэффиціенты были пропорціональны.

II. Можно это условіе вывести иначе. Выше мы видъли (§ 490), что полагая a и a' отличными отъ нуля, можно одно изъ данныхъ уравненій замънить ур-мъ

$$(ab' - ba') x + (ac' - ca') = 0.$$

Слёд., если данныя ур-нія иміють два общихь корня, то полиномъ (ab'-ba')x+(ac'-ca'), будучи первой степени, должень обращаться въ ноль при deyx различныхь значеніяхь x, а потому (§ 71) онь должень быть тождественно равень нулю, а для этого (§ 72) необходимо и достаточно, чтобы его коэффиціенты равнялись нулю, т. е. чтобы

$$ab'-ba'=0$$
 in  $ac'-ca'=0$ , othyga  $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ .

492. *Приложение VIII.* — Найти два числа, зная ихъ сумму S и произведение P.

Очевидно, искомыя числа суть корни уравненія

$$x^2 - Sx + P = 0 \dots (1)$$

въ самомъ дълъ, сумма корней этого ур-нія равна S, а произведеніе Р.

Примъръ. — Найти два числа, которыхъ сумма равнялась бы 13, а про-изведение 40.

Искомыя числа суть корни ур-нія  $x^2-13x+40=0$ ; рѣшая его, находимъ: x'=8, x''=5. И въ самомъ дѣлѣ: 8+5=13,  $8\times 5=40$ .

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы ур. (1) имъло корни дъйствительные, т. е чтобы разность  $\mathbb{S}^2$  — 4P была положительна или нуль:

$$\mathbb{S}^2 - 4P \ge 0;$$

отсюда

$$P < \left(\frac{S}{2}\right)^2$$

т. е. наибольшая величина (maximum) произведенія двухь чисель, положительных или отрицательных, импьющих постоянную сумму, равна кваддату ихь полусуммы.

Если бы требовалось найти два числа, зная ихъ разность б и произве-

 $denie\ P$ , то задачу эту можно бы было свести къ предыдущей. Въ самомъ дълъ, если искомыя числа будуть x' и y', то по условію задачи вивомъ

$$x'-y'=\delta$$
  $\pi$   $x'y'=P$ :

но ноложивъ — y'=x'', дадимъ этимъ ур-мъ видъ

$$x'+x''=\delta$$
,  $x'x''=-P$ ,

слъд. x' в x'' суть корни уравненія

$$x^2 - \delta x - P = 0.$$

Если  $\delta$  положительно, сята. x'-y'>0, то для x' нужно взять большій корень ур-нія, а другой корень, взятый съ обратнымъ знакомъ, дастъ y'. Если  $\delta$  отрицательно, нужно сатать наоборотъ.

Условіе возможности задачи выразится слідующими образоми:

$$\frac{\delta^2}{4} + P = 0,$$

откуда видно, что при P положительномъ задача всегда возможна, ибо  $\frac{\delta^2}{4} + P$  будетъ представлять сумму двухъ существенно положительныхъ количествъ.

493. Приложение VIII. — Найти сумму одинаковыхъ степеней корней квадратнаго уравненія  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Пусть корни будуть  $x_1$  и  $x_2$ ; требуется вычислить  $x_1^m + x_2^m$ , не рѣшая ур-нія. Сумму эту для краткости будемъ обозначать знакомъ  $S_m$ .

І. Во-первыхъ, мы имъемъ

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

II. Чтобы найти S2, возьмемъ тождества

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0$$
 . . . . (1),  $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$  . . . . (2) сложивь ихъ, найдемъ

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0$$
, откуда  $S_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ .

Этотъ результать можно найти иначе, замъчая, что

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}$$

III. Чтобы найти  $S_3$ , помножимъ ур. (1) на  $x_1$ , ур. (2) на  $x_2$  и сложимъ ихъ почленио, что дастъ:

$$aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$$
, откуда  $S_3 = -\frac{bS_2 + cS_1}{a}$ ,

или, замъняя S2 и S1 ихъ величинами:

$$S_3 = -\frac{b(b^2 - 3ac)}{a^3}$$
.

Этотъ результатъ можно найти иначе, замъчая, что

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$$

IV. Помножая тождества (1) и (2) соответственно на  $x_1^2$  и  $x_2^2$  и складывая, найдемъ

$$aS_4 + bS_3 + cS_2 = 0$$
, откуда  $S_4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$ .

Иначе найдемъ этотъ результатъ, замъчая, что

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)^2 - \frac{2c^2}{a^2}.$$

Вообще, легко найти  $S_m$ , зная суммы  $S_{m-1}$  и  $S_{m-2}$ ; ибо, номноживъ дества: (1) на  $x_1^{m-2}$ , (2) на  $x_2^{m-2}$ , и сложивъ, имъемъ соотношеніе

$$aS_m + bS_{m-1} + cS_{m-2} = 0$$
,

въ которомъ и содержится общее ръшенје задачи: при ея помощи можно по-

ромъ  $S_1 = -\frac{b}{a}$ ,  $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$ ; сябд.

$$S_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}.$$

Положивъ m=3, имвемъ  $aS_0 + bS_0 + cS_1 = 0$ , откупа

$$S_3 = -\frac{b}{a} \cdot S_2 - \frac{c}{a} S_1 = -\frac{b}{a} imes (\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}) - \frac{c}{a} imes (-\frac{b}{a}) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$$
, и т. д.

494. Пусть требуется найти сумму одинаковых степеней обратных величинг корней квадратнаго уравненія.

Называя эту сумму черезъ S\_m, имъемъ

$$\begin{split} \mathbf{S}_{-m} &= \left(\frac{1}{x_1}\right)^m + \left(\frac{1}{x_2}\right)^m = \frac{1}{x_1^m} + \frac{1}{x_2^m} = \frac{x_1^m + x_2^m}{x_1^m x_2^m} = \frac{\mathbf{S}_m}{\left(\frac{c}{a}\right)^m}, \text{ with} \\ \mathbf{S}_{-m} &= \frac{a^m}{c^m} \cdot \mathbf{S}_m \ . \end{split}$$

Такъ напр., отсюда найдемъ:

$$\begin{split} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= -\frac{b}{c}; \ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}; \ \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = -\frac{b(b^2 - 3ac)}{c^3}; \\ & \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}; \ \text{M. T.} \ \text{Д.} \end{split}$$

495. Построеніе корней квадратнаго уравненія.

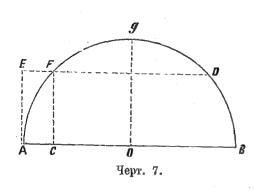
Ръциан геометрическій вопросъ съ помощію алгебры, всегда получаемъ уравненія однородныя; такія ур-нія мы и будемъ разсматривать.

- 1. Уравненіе вида  $x^2 = m.n$  даеть пропорцію m: x = x: n; сл. построеніе линін х приводится къ нахожденію средней пропорціональной между ли-HIAMU m u n.
- 2. Полное уравненіе. Обозначая буквами р и к отношенія двухъ линій къ линейной единицъ, имъемъ четыре вида ур-ній:

$$x^2 + px + k^3 = 0$$
;  $x^2 - px + k^2 = 0$ ;  $x^2 + px - k^2 = 0$ ;  $x^2 - px - k^2 = 0$ .

Такъ какъ первое выводится изъ втораго, а третье изъ четвертаго перемъною x на — x, то достаточно построить корни 2-го и 4-го.

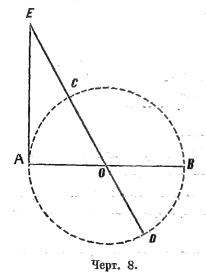
Представивъ 2-е съ видъ  $x(p-x)=k^2$ , замъчаемъ, что вопросъ приводится къ построенію сторонъ x и p-x прямоугольника, равновеликаго квадрату стороны k, зная сумму измъреній прямоугольника.



Для этого на прямой AB — р описываемъ полуокружность; въ точкъ А возставляемъ къ линіи AB перпендикуляръ AE — k и черезъ точку
Е проводимъ прямую ED параллельно
AB, пересъкающую окружность въ D
и F. Легко видъть, что прямая
EF — AC изображаетъ одинъ корень
ур-нія, а линія DE — ВС — другой.
Въ самомъ дълъ

$$AC + BC = AB = p$$
,  
 $AC \times BC = CF^2 = AE^2 = k^2$ .

Для возможности задачи необходимо, чтобы прямая ED встръчала окружность; слъд. задача невозможна, когда  $AE>0G=\frac{AB}{2}$ , или когда  $k>\frac{p}{2}$ , потому-что при этомъ условіи ED не встръчаеть окружности. Когда  $AE=0G=\frac{AB}{2}$ , или  $k=\frac{p}{2}$ , прямая ED касается окружности въ точкъ G, и корни получаются равные  $AO=0B=\frac{p}{2}$ . Наконецъ, когда  $AE<0G=\frac{AB}{2}$ , или  $k<\frac{p}{2}$ , прямая ED пересъкаеть окружность, и корни получаются неравные: AC и CB. Все это вполнъ согласно еъ тъмъ, что при условіи  $k^2>\frac{p^2}{4}$  корни уравненія



мнимы, при  $k^2 = \frac{p^2}{4}$  дъйствительные равные, а при  $k^2 < \frac{p^2}{4}$  дъйствительные неравные.

Четвертое ур-ніе приводится въ виду  $x(x-p)=k^2$  и соотвътствуетъ вопросу: построить измъренія прямоугольника равновеликаго данному квадрату, по разности p этихъ измъреній. На прямой AB=p, какъ на діаметръ, описываемъ окружность; въ точкъ А проводимъ къ ней касательную AE=kи изъ точки Е проводимъ съкущую ECD черезъ центръ. Имъемъ

ED = 
$$x'$$
, EC =  $-x''$ ,

DE - CE = DC = AB =  $p$ ,

EC × ED = AE<sup>2</sup> =  $k^2$ .

Очевидно, построеніе всегда возможно; и это обстоятельство вполит согла-

сно съ тъмъ, что ур-ніе 4-е; имъя свободный членъ отрицательный, имъетъ всегда дъйствительные кории.

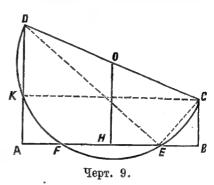
Другой прикмъ. — Если ур-нія 2-е и 4-е имъють видъ

$$x^2 - px + m$$
.  $n = 0$ ...(2)  $x^2 - px - m$ .  $n = 0$ ...(4)

то для примъненія указаннаго прієма, слъдовало бы предварительно найти среднюю пропорціональную k между m и n; нижеслъдующее построеніе позволяеть избъжать этого предварительнаго построенія, давая, кътому-же, способъ, примънимый во всъхъ случаяхъ.

Для построенія корней ур-нія (2) беремъ AB = p; въ точкѣ А возставляемъ къ ней перпендикуляръ AD = m, въ точкѣ В перпендикуляръ BC = n, проводя ихъ въ одну сторону отъ прямой AB.

Проведя прямую CD, описываемъ на ней, какъ на діаметръ, окружность, которая, вообще, пересъчетъ AB въ двухъ точкахъ E, F; искомыя линіи будуть AE и EB, или AF и FB. Въ самомъ дълъ, изъ подобія треугольниковъ DAE и ECB имъ-



емъ: АЕ: CB = AD: EB, откуда  $AE \times EB = m$ . n; кромъ того, но построенію, AE + EB = AB = p.

Перпендикуляръ, опущенный изъ средины 0 линіи DC на AB, пересъкаетъ хорду FE въ ея срединъ H; отсюда выходитъ, что AF == EB, и слъд. AE == FB.

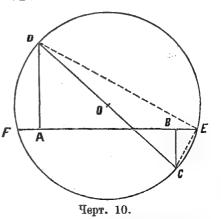
Для возможности задачи нужно, чтобы окружность CD встръчала AB, а это требуеть, чтобы OH было не больше  $\frac{\mathrm{CD}}{2}$ .

Но ОН = 
$$\frac{m+n}{2}$$
; СD<sup>2</sup> = СК<sup>2</sup> + DК<sup>2</sup> = AB<sup>2</sup> +  $(m-n)^2$ ; отсюда легко ви-

Примичание. Если m = n, CD будеть параллельна AB, AD — касательна къ окружности въ D, и перевернувъ чертежъ, найдемъ обыкновенное построеніе.

Для построенія корней (4), къ AB, равной данной разности p, возставляемъ въ точкахъ A и В перпендикуляры AD =m и BC =n, по разныя стороны отъ AB; на F прямой CD, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность, пересѣкающую прямую AB въ точкахъ E и F. Корни будутъ

$$x' = AE$$
,  $x'' = -BE$ .



Въ самомъ дёлё, разность абсолютныхъ величинъ этихъ линій (или ихъ алгебранческая сумма) есть AE - BE = AB = p, а произведеніе ихъ = m, n, ибо по-

добные треугольники ADE и BCE даютъ: AD: AE = BE: BC, или AE  $\times$  BE = AD  $\times$  BC = m. n.

Задача всегда возможна, ибо всегда имъетъ мъсто пересъчение прямой AB съ окружностью DC, такъ какъ послъдняя, по самому построению, имъетъ точки С и D по объ стороны прямой AB.

Такимъ образомъ, измѣняя направленіе перпенцикуляра, соотвѣтствующаго тому изъ множителей т и п, который отрицателенъ, мы тѣмъ же самымъ построеніемъ находимъ оба кория ур-нія, причемъ отрицательный коренъ приходится на продолженіи АВ: противоположности въ знакѣ соотвѣтствуетъ противоположность направленія.

Примичаніе. — Если m и n равны, средина прямой AB будеть въ центръ окружности; если на AB, какъ на діаметръ, описать окружность концентричную первой, BC будеть касательною къ ней, и какъ OC = OE, найдемъ обыкновенное построеніе.

## 496. Задачи.

1. Изследовать, а priori, корни уравненій:

$$x^{2}-12x+35=0;$$
  $x^{2}-10x+26=0;$   $40x^{2}-51x+14=0;$   $11x^{2}+37x-28=0;$   $81x^{2}-144x+64=0;$   $25x^{2}-20x+7=0;$   $5x^{2}-17x+3=0;$   $6x^{2}+15x-21=0;$   $4x^{2}-11x-6=0;$   $7x^{2}-5x+11=0;$   $9x^{2}-6x+1=0;$   $4x^{2}+24x+36=0.$ 

- 2. Составить для каждаго изъ этихъ уравненій: 1) ур-ніе съ противоположными знаками корней; 2) ур-ніе, корни котораго были бы обратны корнямъ даннаго; 3) ур-ніе съ корнями, уменьшенными на \(\lambda\); 4) ур-ніе съ корнями, умноженными на \(\lambda\).
- 3. Составить квадратное ур-ніе, корнями котораго были бы: 1) 10 и 5, 2; 2)  $\frac{7}{8}$  и  $\frac{2}{5}$  3)  $\frac{7}{11}$  и 4; 4)  $\frac{8}{9}$ ; 5)  $\frac{3a+b}{2}$  и  $\frac{3a-b}{2}$ ; 6)  $\frac{a-b}{2a+b}$ ,  $\frac{a+b}{2a-b}$ .

4) Составить квадратное ур-ніе съ соизм'тримыми коэффиціентами, им'тющее корнемъ:

$$\sqrt{7}-4$$
, или  $\frac{3}{4}+\sqrt{2}$ , или  $\frac{5}{3-\sqrt{2}}$ , или  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ .

Составить квадратное ур-ніе съ дѣйствительными коэффиціентами, имѣющее корнемъ:

$$3\sqrt{-5}$$
, when  $3\sqrt{2}$ .  $i-4$ , when  $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ , when  $\frac{1}{2+\sqrt{5} \cdot i}$  when  $(3+\sqrt{2}\cdot i)$   $(4+3\sqrt{2}\cdot i)$ , where  $\frac{5+\sqrt{-3}}{5-\sqrt{-3}}$ .

6. Опредълить  $\lambda$  такъ, чтобы кории  $x_1$  и  $x_2$  уравненія

$$2x^2 + (2\lambda - 1)x + (\lambda - 2) = 0$$

удовлетворями соотношенію  $3x_1 - 4x_2 = 11$ .

7. Опредълить х такъ, чтобы одинъ корень уравненія

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 3) x^2 + (3\lambda - 1) x + 2 = 0$$

быль вдвое больше другаго.

- 8. Опредёлить  $\lambda$  такъ, чтобы корни уравненія  $9x^2 (2 \lambda)x 6 + \lambda = 0$  были: 1) равны по величинѣ и съ одинаковымъ знакомъ; 2) равны по величинѣ, но противоположны по знаку.
- 9. Если  $x_1$  и  $x_2$  суть корни уравненія  $x^2 + px + q = 0$ , опредѣлить, при какомъ соотношеніи между p и q будеть:

1) 
$$\frac{x'}{x''} = m$$
; 2)  $x_1^2 + x_2^2 = m^2$ ; 3)  $x_1^2 - x_2^2 = m^2$ ; 4)  $x_1^3 + x_2^3 = m$ ; 5)  $x_1^3 - x_2^3 = m$ .

- 10. Въ уравнени  $x^2 5x + q = 0$  опредълить q такъ, чтобы:
- 1) одинъ изъ корней былъ  $3\frac{1}{2}$ ; 2) 5x' 3x'' = 3; 3) x'' = 4x'; 4)  $x_1^2 + x_2^2 = 17$ ;
- 5)  $x_2^2 x_1^2 = 15$ .
  - 11. Въ уравненін  $x^2 4ax + a^2 = 0$  опредълить a такъ, чтобы:
- 1)  $x_1 x_2 = 2\sqrt{3}$ ; 2)  $x_1^2 + x_2^2 = 56$ ; 3)  $x_1^3 + x_2^3 = 192$ ; 4)  $5x + 7x_2 = 72 \sqrt{108}$ .
- 12. Въ уравненін  $x^2 + 4(p-2)x + 3p^2 + 5 = 0$  опредёлить p такъ, чтобы одинъ изъ корней былъ вдвое больше другаго.
- 13. Дано ур-ніе  $x^2 + px + q = 0$ , имъющее корни  $x_1$  и  $x_2$ . Составимъ ур-ніе, корнями котораго были бы: 1)  $x^1 + \frac{1}{x'}$  и  $x_2 + \frac{1}{x_2}$ ; 2)  $\frac{1}{x_1^2}$  и  $\frac{1}{x_2^2}$ ; условіе дъйствительности корней этого ур-нія; 3)  $x_1 + 2x_2$  и  $x_2 + 2x_1$ .
- 14. Составить ввадратное ур., котораго вории x' и x'' удовлетворяли бы условіямъ:

$$x'.x'' + x' + x'' - a = 0,$$
  $x'.x'' - a(x' + x'') + 1 = 0;$ 

каково должно быть a, чтобы кории этого уравненія были д'яйствительны? чтобы они были положительны?

15. Найти соотношенія, связывающія корни ур-ній

$$x^2-2x\sqrt{p^2-2q}+p^2-2q=0$$
 II  $x^2+px+q-0$ .

Предполагая, что построенъ прямоугольникъ изъ корней 2-го, указать линіи, выражающія корни 1-го.

- 16. Предполагая, что ур-нія  $x^2 + px + q = 0$  и  $x^2 + p'x + q' = 0$  им'єють одинь общій корень, требуется составить уравненіе, корнями котораго были бы не общіє корни данных ур-ній.
- 17. Даны уравненія:  $x^2 + ax + 1 = 0$ ,  $x^2 + x + a = 0$ . Опредёлить a такъ, чтобы оба ур-нія имёли одинъ общій корень.
- 18. Какова должна быть связь между коэффиціентами ур-нія  $ax^2 + bx + c = 0$ , чтобы одинь изъ корней быль квадратомъ другаго?
- 19. Какую величину нужно дать коэффиціенту b ур-нія  $ax^2 + bx + ad^4 = 0$ , чтобы одинь изъ корней быль кубомь другаго?
  - 20. Определить х и и такъ, чтобы ур-нія

$$(2\lambda+1)x^2-(3\lambda-1)x+2=0$$
 н  $(\mu+2)x^2-(2\mu+1)x-1=0$  им\*эли два общихъ корня.

21. Опредѣлить д такъ, чтобы ур-нія

$$3x^2 - (\lambda - )x + \lambda + 1 = 0$$
 m  $2x^2 + (2\lambda - 1)x + 2\lambda + 2 = 0$ 

имѣли одинъ общій корень; каковъ этоть корень?

- 22. Доказать, что условіе, необходимоє п достаточноє для того, чтобы ур-нія  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $(ab' ba')x^2 + 2(ac' ca')x + (bc' cb') = 0$  им'ели одинь общій корень, состоить въ томъ, чтобы то или другоє изъ шихъ им'ело равные кории.
  - 23. По примъру § 484 ръшить ур-нія

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} = \frac{c}{c-a} + \frac{c}{c-b};$$

$$\frac{x}{a} + \frac{b}{x} + \frac{b^2}{x^2} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}.$$

## ГЛАВА XXXII.

Квадратный триномъ: разложение его на множители первой стечени; теорема объ измѣнения знака. — Приложения. — Задачи.

497. Нвадратный триномъ.—Если въ полиномѣ  $ax^2+bx+c$  подъ a, b и c разумѣть постоянныя количества, а подъ 'х перемънное, измѣняющееся въ области дѣйствительныхъ чиселъ (отъ —  $\infty$  до 0, и отъ 0 до  $+\infty$ ), то полиномъ этотъ, называемый квадратнымъ триномомъ, будетъ измѣняться по величинѣ и знаку. Такъ, при x=0, онъ =c; при x=1, равенъ a+b+c; при x=-10, равенъ 100a-10b+c; и т. д. Между этими величинами одии могутъ быть положительны, другія отрицательны. Тѣ значенія x, при которыхъ триномъ обращается въ 0, называются кориями тринома; ихъ мы найдемъ, приравнявъ триномъ нулю, и рѣшивъ квадратное ур-ніе  $ax^2+bx+c=0$ .

Квадратный триномъ обладаеть замъчательными свойствами, изъ числа которыхъ въ этой главъ мы изучимъ: 1) разложение тринома на множители; 2) измънение его знака, и затъмъ займемся приложениями этихъ свойствъ.

## Разложеніе квадратнаго тринома на множители первой степени.

**498. Теорем А.**—Квадратный трином равен произведению коэффиціента при  $x^2$  на два двучленных множителя, равных разностям между x и каждым из корней тринома.

Первое доказательство. Обозначивъ триномъ буквою y и вынеся за скобки a, найдемъ

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right);$$

дополнимъ квадратъ бинома, первые два члена котораго суть: $x^2 + \frac{b}{a}x$ ; приня-

мая x за первый членъ бинома, второй найдемъ, раздъливъ  $\frac{b}{a}x$  на 2x, что даетъ  $\frac{b}{2a}$ ; прибавляя въ скобки и вычитая  $\frac{b^2}{4a^2}$ , получимъ

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Различаемъ три случая:  $b^2 - 4ac > 0$ ,  $b^2 - 4ac = 0$ ,  $b^2 - 4ac < 0$ .

 $1.\,\,b^2-4ac>0.\,\,$  Въ этомъ случав дробь  $rac{b^2-4ac}{4a^2}$  положительна, а потому  $rac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  величина дъйствительная; триномъ беретъ видъ

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] \cdot$$

Примъняя сюда формулу разложенія  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ , найдемъ:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right), \quad \cdots \quad (1)$$

причемъ вст три множителя дыйствительные.

Этому разложенію можно дать видь:

$$y = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

и замъчая, что  $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  и  $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  суть кории ур-нія  $ax^2+bx+c=0$ , или, что тоже, кории тринома, можемъ, назвавъ эти кории черезъx' и x'', дать триному видъ

$$y = a(x - x')(x - x'')$$
. . . . . . . . . . . . (1')

гдъ всъ множители дъйствительны.

II.  $b^2 - 4ac = 0$ . Триномъ (форм. 1) приводится къ виду

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Замѣтивъ, что  $x+\frac{b}{2a}=x-\left(-\frac{b}{2a}\right)$ , и что  $-\frac{b}{2a}$  есть общая величина равныхъ корней при условіи  $b^2-4ac=0$ , мы назвавъ эту величину буквою x', можемъ дать триному видъ

$$y = a(x - x')^2.$$

Таково разложение тринома въ случай действительныхъ равныхъ корней.

III.  $b^2-4ac<0$ . При этомъ условіи триномъ имѣетъ корни мнимые; ему можно дать такой же видъ, какъ и при дѣйствительныхъ неравныхъ корняхъ, т. е. (1) иди (1'), но оба двучленные множители будутъ мнимые.

Впрочемъ, для дальнъйшихъ изслъдованій удобнъе дать триному въ этомъ случать иной видъ. Замътивъ, что изъ неравенства  $b^2-4ac<0$  слъдуетъ

 $4ac-b^2>0$ , такъ-что дробь  $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$  будеть положительная, представимъ y въ видъ

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right],$$

и замътимъ, что въ квадратныхъ скобкахъ находится сумма двухъ существенно-положительныхъ количествъ.

499. Второе доказательство. - Представивъ триновъ въ видъ

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

замѣчаемъ, что  $\frac{b}{a} = -(x' + x'')$  и  $\frac{c}{a} = x'.x''$ , гдѣ x' и x'' суть норни тринома. Подстановка дастъ

$$y = a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = a[x^2 - x'x - x''x + x'x''].$$

Вынося въ первыхъ двухъ членахъ за скобки x, и въ двухъ остальныхъ — x'', послъдовательно имъемъ

$$y = a[(x-x')x - x''(x-x')] = a(x-x')(x-x'').$$

Такъ какъ соотношенія между коэффиціентами и корнями, на которыхъ основано это доказательство, существують и для дёйствительныхъ и для мнимыхъ корней, то и полученное разложеніе имбеть мёсто для тёхъ и другихъ.

Когда дъйствительные кории равны между собою, то, положивъ въ предыдущей формулъ x' = x'', найдемъ

$$y = a(x - x')^2 = [\sqrt{a}(x - x')]^2$$
:

триномъ представляеть точный квадратъ выраженія  $\sqrt{a}\,(x-x')$ .

**500.** Третье доказательство. — Если x' и x'' будуть корни тринома  $ax^2 + bx + c$ , то, предполагая, что они различны, замёчаемь, что триномь обращается въ ноль при подстановкё въ него двухъ различных значеній x' и x'' вмёсто x; а потому онъ дёлится на произведеніе биномовь x-x' и x-x''; слёд.

$$ax^2 + bx + c = (x - x')(x - x'')$$
. Q.

Q есть цёдое относительно x частное нудевой степени, ибо дёлитель одинаковой степени съ дёлимымъ; слёд. Q найдемъ, раздёливъ высшій членъ  $ax^2$  дёлителя; слёд. Q = a, и потому

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Примъчаніе. — Доказательство предполагаеть, что x' и x'' неравны; но если теорема върна для x' и x'' неравныхь, то она остается върна, какъ бы мала ни была разность между x' и x''; значить она върна и въ предъльномъ случав, когда корни равны.

Впрочемъ, для случая равныхъ корней можно дать самостоятельное доказательство теоремы. Въ самомъ дѣлѣ, при равныхъ корняхъ  $b^2=4ac$ , откуда  $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$ ; слѣд.

$$ax^{2} + bx + c = a\left(x^{2} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^{2} + \frac{b}{a}x + \frac{b^{2}}{4a^{2}}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2}$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right);$$

но каждый изъ равныхъ корией  $= -\frac{b}{2a}$ , такъ-что и въ данномъ случав

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''),$$

только здёсь  $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ 

**501.** Примъры.—І. Разложить на множители триномъ  $y = -3x^3 + 5x + 8$ .

Ръшивъ уравненіе —  $3x^2 + 5x + 8 = 0$ , находимъ корни тринома: x' = -1,  $x'' = \frac{8}{3}$ ; слъд.

$$y = -3(x+1)(x-\frac{8}{3}) = -(x+1)(3x-8).$$

II. Разложить на множители триномъ  $y = 49x^2 - 70x + 25$ .

Ръшивъ уравненіе  $49x^2-70x+25=0$ , находимъ равные корни:  $x'=x''=\frac{5}{7};$  слъд.

$$y = 49 \left(x - \frac{5}{7}\right)^2 = (7x - 5)^2$$
.

III. Раздожить триномъ  $y = -9x^2 + 6x + 1$ .

Корни тринома равны:  $x' = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ ,  $x'' = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$ ; саёд.

$$y = -9\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{2}}{3}\right)$$

IV. Разложить триномъ  $y = 4x^2 - 12x + 13$ .

Корни тринома суть:  $x' = \frac{3-2i}{2}$ ,  $x'' = \frac{3+2i}{2}$ ; сябд.

$$y = 4\left(x - \frac{3-2i}{2}\right)\left(x - \frac{3+2i}{2}\right) = (2x - 3 + 2i)(2x - 3 - 2i).$$

Такъ какъ корни тринома мнимые, то его нужно представить въ иной формъ — въ видъ суммы квадратовъ; найдемъ:

$$y = (2x - 3)^2 + 4$$
.

**502**. *Приложенія*. — І. Составленіе квадратнаго уравненія по даннымъ корнямъ.

Пусть требуется составить квадратное ур-ніе съ корнями  $x'=-\frac{3}{5}$ ,  $x''=\frac{7}{15}$ . Оно должно быть вида (x-x')(x-x'')=0; сл.

пайдемъ 
$$\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{7}{15}\right)=0$$
, или  $x^2+\frac{2x}{15}-\frac{21}{75}=0$ , или  $75x^2+10x-21=0$ .

II. Часто можно примънять разложение квадратнаго тринома на множители къ сокращению дробей.

Пусть требуется сократить дробь  $\frac{6x^2-5x-6}{4x^3-9x}$ . Разложивъ на множители числителя, получимъ

$$6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(2x-3)(3x+2);$$

знаменатель  $=x(4x^2-9)=x(2x+3)(2x-3)$ .

Сокративъ дробь на 2x-3, найдемъ  $\frac{3x+2}{2x^2+3x}$ .

Другой примъръ: сократить дробь  $\frac{x^3-19x^2+119x-245}{3x^2-38x+119}$ .

Раздагая на множителей знаменателя, найдемъ

$$3x^2 - 38x + 119 = 3(x - 7)(x - \frac{17}{3}) = (x - 7)(3x - 17);$$

для сокращенія дроби, надо попытаться, не ділится ли числитель на x-7 или на 3x-17; найдемъ

$$x^3 - 19x^2 + 119x - 245 = (x^2 - 12x + 35)(x - 7);$$

сокращая дробь на x-7, получимъ дробь  $\frac{x^2-12x+35}{3x-17}$ , не подлежащую дальнъйшему упрощеню.

# Измененія знака квадратнаго тринома.

- **502.** Теорема. Когда корни тринома  $ax^2 + bx + c$  мнимые или дъйствительные равные, т. е. когда  $b^2 4ac \le 0$ , то при всъх дъйствительных значеніях х, трином неизмънно сохраняет знак коэффиціента а. Если же корни тринома дъйствительные неравные, т. е. если  $b^2 4ac > 0$ , то при всъх значеніях перемъннаго х, лежащих внъ корней (т. е. меньших меньшаго, а также больших большаго корня), он сохраняет знак коэффиціента а; при всъх же значеніях х, лежащих между корнями, знак тринома противо-положен знаку коэффиціента а.
- I. Когда  $b^2-4ac<0$ , триномъ имъетъ мнимые сопряженные корни; слъд.  $x'=\alpha+\beta i, \quad x''=\alpha-\beta i, \quad \text{гдъ } \alpha \text{ и } \beta$ —количества дъйствительныя. Разложение будетъ:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = a[(x - \alpha)^2 + \beta^2].$$

Изъ этой формы тринома видно, что при всякомъ дъйствительномъ значеніи x, положительномъ или отрицательномъ, выраженіе въ скобкахъ, какъ сумма квадратовъ дъйствительныхъ количествъ, всегда положительно; а стало быть произведеніе этого выраженія на a всегда будеть имъть знакъ количества a,

каково бы ни быле x. Итакъ, если a > 0, триномъ будетъ всегда положителенъ; если a < 0, онъ всегда будетъ отрицателенъ.

Можно дать другое доказательство. Изъ неравенства  $b^2-4ac<0$  имѣемъ  $4ac>b^2$ , и раздѣливъ обѣ части на существенно положительное количество  $4a^2$ , находимъ:  $\frac{c}{a}>\frac{b^2}{4a^2}$ . Сяѣдовательно, можно положить  $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}+\mathrm{K}^2$ , гдѣ К дѣйствительно и отлично отъ нуля. Триномъ беретъ видъ

$$ax^{2} + bx + c = a\left(x^{2} + \frac{b}{a}x + \frac{b^{2}}{4a^{2}} + K^{2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2} + K^{2}\right],$$

аналогичный уже найденному. Далъе доказательство ведется вышеуказаннымъ способомъ.

II. Пусть  $b^2-4ac=0$ : кории тринома дъйствительные равные; означая общую величину ихъ буквою x', и имъемъ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2$$
.

Произведение неизмънно сохраняеть знакъ a, каково бы ни было дъйствительное значение x, пбо факторъ  $(x-x')^2$  положителенъ при всякомъ дъйствительномъ x.

Можно вести доказательство еще такъ: изъ  $b^2-4ac=0$  имъемъ  $4ac=b^2$ ; раздъливъ объ части на  $4a^2$ , находимъ  $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$ . Представивъ триномъ въ видъ  $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$  и замънивъ  $\frac{c}{a}$  дробью  $\frac{b^2}{4a^2}$ , получимъ

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

откуда очевидно, что триномъ неизмѣнно сохраняетъ знавъ коэффиціента a при сякомъ дѣйствительномъ x.

III. Пусть, наконецъ,  $b^2-4ac>0$ : триномъ имъстъ корни дъйствительные неравные; пусть они будутъ x' и x'', причемъ x' < x''. Триномъ можно представить въ видъ

a(x-x')(x-x'').

Разобьемъ скалу возрастающихъ значеній x на три области: 1) отъ —  $\infty$  до меньшаго корня x'; 2) отъ меньшаго корня x' до большаго x''; 3) отъ большаго корня x'' до  $+\infty$ :

$$-\underbrace{\infty,\ldots,x'}_{1}\underbrace{\ldots,x'',\ldots,+\infty}_{3}$$

Когда x остается въ первой области, т. е. меньше меньшаго корня x', а слъдовательно и подавно меньше x'', объ разности x-x' и x-x'' будуть отрицательны; произведеніе ихъ положительно, а потому все произведеніе a(x-x')(x-x'') сохраняеть знакь коэффиціента a.

Когда x находится во второй области, т. е. больше x', но меньше x'', тогда x-x'>0, а x-x''<0; произведение разностей отрицательно, а потому все произведение  $a\left(x-x'\right)\left(x-x''\right)$  имьеть знакь, противоположный знаку корофиціента a.

Наконецъ, когда x лежитъ въ области (3), т. е. больше x'', а потому и подавно больше x', оба бинома x-x' и x-x'' положительны; ихъ произведение положительно, а потому все произведение a(x-x')(x-x'') имъетъ знакъ козоонціента a.

Такимъ образомъ при измѣненіи x отъ —  $\infty$  до —  $\infty$  триномъ два раза мѣняетъ знакъ; причемъ перемѣнѣ знака предшествуетъ обращеніе тринома въ ноль (при x=x' и при x=x'').

#### Резюме:

$$y = ax^2 + bx + c$$

(x' и x''—корни тринома, причемъ x' < x'').

504. Примъры.—І. Триномъ  $x^2-2x+3$  имъетъ корни мнимые, ибо  $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1-3<0$ ; приэтомъ коэффиціентъ при  $x^2$  положителенъ, слъд. при всъхъ значеніяхъ x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$  триномъ остается неизмѣнно положительнымъ.

II. Триномъ —  $4x^2+12x-9$  имъетъ корни дъйствительные равные, ибо  $b'^2-ac=6^2-(-4)\cdot(-9)=0$ ; приэтомъ, коэффиціентъ при  $x^2$  отрицателенъ, слъд. при всъхъ x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$  триномъ остается неизмънно отрицательнымъ.

III. Триномъ  $x^2-6x+5$  имъстъ корни дъйствительные неравные: x'=+1 и x''=+5. Слъд. при всякомъ значеніи x отъ  $-\infty$  до +1, а также при всъхъ x-хъ отъ +5 до  $+\infty$  триномъ положителенъ; при всъхъ значеніяхъ x, лежащихъ между +1 и +5, онъ отрицателенъ.

IV. Корни тринома  $15+2x-8x^2$  суть  $-\frac{5}{4}$  и  $+\frac{3}{2}$ ; слёд. при всёхъ x между  $-\infty$  и  $-\frac{5}{4}$ , а также между  $+\frac{3}{2}$  и  $+\infty$ , онъ отрицателенъ; при всякомъ x между предёлами  $-\frac{5}{4}$  и  $+\frac{3}{2}$  положителенъ.

**505.** Сивиствія.—І. Если трином  $ax^2 + bx + c$  миняет знакт при подстановки вт него послидовательно вмисто x сначала количества a, потом  $\beta$ , то уравненіе

$$ax^2 + bx + c = 0$$

импеть корни дъйствительные неравные и одинь изъ нихъ заключается меж- ду  $\alpha$  и  $\beta$ .

Во-первых ур. имъетъ корни дъйствительные неравные, ибо въ противномъ случать имълн бы  $b^2-4ac < 0$ , а при этомъ условіи триномъ при всякомъ x сохраняль бы знакъ коэффиціента a, что противоръчить условію.

Во-вторыхъ, обозначивъ корни черезъ x' и x'' п полагая x' < x'', имъемъ слъдующую скалу дъйствительныхъ значеній x:

$$-\underbrace{\infty \ldots x'}_{1} \underbrace{\ldots x''}_{2} \underbrace{\ldots + \infty}_{3}$$

Сказано, что при подстановкѣ вмѣсто x количествъ  $\alpha$  и  $\beta$  триномъ мѣняетъ знакъ; слѣд. если напр. при  $x = \alpha$  триномъ имѣетъ знакъ коэффиціента  $\alpha$ , то  $\alpha$  заключается внѣ корней, т. е. или въ (1), или въ (3) области; при  $x = \beta$ , триномъ, мѣняя знакъ, получитъ знакъ —  $\alpha$ , а потому  $\beta$  содержится между корнями, т. е. во (2) области. Такимъ образомъ, если  $\alpha$  находится въ (1) области, то между  $\alpha$  и  $\beta$  заключается корень x'; если же  $\alpha$  лежитъ въ области (3), то между  $\alpha$  и  $\beta$  будетъ корень x''.

0 БРАТНО: Если между двумя цислами  $\alpha$  и  $\beta$  заключается корень ур-нія  $ax^2+bx+c=0$ , и только одинь, то знаки, принимаемые первою частью ур-нія при подстановки вмисто x чисель  $\alpha$  и  $\beta$ , противоположны.

По условію, между  $\alpha$  и  $\beta$  завлючается только одинъ корень: пусть это будетъ меньшій корень x', и пусть  $\alpha < \beta$ ; тогда скала дъйствительныхъ значній x будетъ

II. Когда триномъ  $ax^2+bx+c$  сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ при подстановкъ вмъсто х количествъ а и  $\beta$ , то между а и  $\beta$  заключается четное число (0 нли 2) корней уравненія  $ax^2+bx+c=0$ .

Въ самомъ дѣлѣ, триномъ имѣетъ два корня, слѣд. между  $\alpha$  и  $\beta$  могутъ заключаться 0, или 1, или 2 корня; но въ данномъ случаѣ между  $\alpha$  и  $\beta$  не можетъ содержаться только одинъ корень, ибо въ этомъ предположеніи, на осн. слѣд. І, обр., результаты подстановокъ  $\alpha$  и  $\beta$  вмѣсто x имѣли бы разные знаки, что противорѣчитъ условію. Слѣд. или между  $\alpha$  и  $\beta$  заключаются оба корня, или ни одного не содержится.

### Приложенія.

**506**. І. Когда ac < 0, корни ур-нія  $ax^2 + bx + c = 0$  — дъйствительные, неравные и имъють противоположные знаки.

Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ вмѣсто x ноль, замѣчаемъ, что триномъ обращается въ c, а слѣд. знакъ его противоположенъ знаку коэффиціента a. Слѣд. ур. имѣетъ корни дѣйствительные, неравные, и такъ какъ 0 заключается между этими корнями, они имѣютъ противоположные знаки.

**507.** II. Когда A и B импьють одинаковые знаки, уравненіе  $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-\beta}=C$  импьеть корни дъйствительные неравные, и одинь изъ нихъ, и только одинъ, заключается между  $\alpha$  и  $\beta$ .

Дадимъ ур-нію цълый видъ, собравъ всь члены въ первую часть; сдълавъ это, найдемъ:

$$A(x-\beta) + B(x-\alpha) - C(x-\alpha)(x-\beta) = 0.$$

Замѣнивъ x сначала количествомъ  $\alpha$ , потомъ  $\beta$ , получимъ результаты:  $A(\alpha-\beta)$ ,  $B(\beta-\alpha)$ ; такъ какъ A и B— одного знака, разности же  $\alpha-\beta$  и  $\beta-\alpha$  имѣютъ знаки противоположные, то заключаемъ, что оба результата имѣютъ противоположные знаки, а потому: уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные неравные, и одинъ, и только одинъ изъ нихъ, содержится между  $\alpha$  и  $\beta$ .

**508.** III. Дано ур-ніе  $ax^2 + bx + c = 0$ , имьющее дъйствительные неравные корни. Узнать, не ръшая ур-нія, будеть-ли данное количество  $\lambda$  меньше меньшаго корня, или оно заключается между корнями, или же больше большаго корня?

Для рѣшенія вопроса подставляемь  $\lambda$  вмѣсто x въ первую часть ур-нія; если окажется, что результать  $a\lambda^2+b\lambda+c$  этой подстановки имѣетъ знавъ количества — a, то этимъ будетъ доказано, что  $\lambda$  содержится между корнями; если, напротивъ, результать  $a\lambda^3+b\lambda+c$  будетъ имѣть знавъ количества +a, то должны заключить, что  $\lambda$  находится внѣ корней, т. е. что оно или меньше меньшаго корня, или больше большаго. Чтобы рѣшить, какой изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, замѣтимъ, что полусумма корней, равная —  $\frac{b}{2a}$ , есть количество содержащееся между корнями; а потому, если  $\lambda$ , находясь внѣ корней, будетъ меньше —  $\frac{b}{2a}$ , то очевидно,  $\lambda$  будетъ меньше меньшаго корня; если же  $\lambda$  будетъ больше —  $\frac{b}{2a}$ , то оно больше большаго корня.

ПРИМВРЪ 1. — Пусть дано ур-ніе  $x^2 - 22x + 80 = 0$ , имьющее дийствительные неравные корни: x' и x'', и пусть x' < x''. Требуется расположить корни x' и x'' и число 12 въ порядкъ возрастающих величиъ?

Подставляя въ первую часть 12 вийсто x, находимъ;  $12^2-22\times 12+80=-40$ : результатъ подстановки имйетъ знакъ противоположный коэффиціенту при  $x^2$ ; сайд. 12 заключается между корнями:

$$x' < 12 < x''$$
.

Примъръ 2. — Расположить въ порядкъ возрастающих величинъ корни x' и x'' того-же ур-нія и числа 4 и 20.

Результать подстановки 4 вмѣсто x въ первую часть есть:  $4^2-22\times 4+80>0$ , т. е. того же знака, какъ коэффиціенть при  $x^2$ ; слѣд. 4 находится внѣ корней. Далѣе: полусумма корней равна 11; а какъ 4<11, то заключаемъ, что 4 меньше меньшаго корня.

Подстановка 20 вмѣсто x даеть  $20^2-22\times20+80>0$ , слѣд. 20 находится внѣ корней. Далѣе: 20> полусуммы корней 11, слѣд. 20 больше большаго корня. Итакъ

$$4 < x' < 12 < x'' < 20$$
.

ПРИМЪРЪ 3.— Переспиь шаръ радіуса В плоскостью такъ, чтобы объемь сферическаго сегмента AMB былъ равновеликъ объему цилиндра, импющаго тоже основаніе, а высоту равную разстоянію центра шара отъ этого общаго основанія.

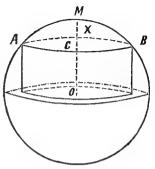
Пусть MC = x; ур-ніе задачи будеть

$$\frac{\pi x^2}{3}(3R-x) = \pi(R-x).\overline{AC}^2 = \pi(R-x)x(2R-x).$$

Одинъ изъ ворней x=0, очевидный à priori; раздъливъ ур. на  $\pi x$ , получимъ

$$3(R-x)(2R-x)-x(3R-x)=0,$$
 where 
$$2x^2-6Rx+3R^2=0.$$

Чтобы ръшеніе этого ур-нія служило отвътомъ на задачу, нужно, чтобы оно было дъйствительнымъ, положительнымъ и < R.



Черт. 11.

 $b'^2-ac=(3\mathrm{R})^2-6\mathrm{R}^2=3\mathrm{R}^2$ , — количеству положительному: слъд. оба корня дъйствительны. Ихъ произведеніе, равное  $\frac{3}{2}\mathrm{R}^2$ , положительно, слъд. оба корня имъютъ одинаковые знаки; сумма ихъ, равная  $3\mathrm{R}$ , положительна: сл. оба корня положительны. Подставивъ въ первую часть  $\mathrm{R}$  вмъсто x, находимъ въ результатъ —  $\mathrm{R}^2$ : слъд.  $\mathrm{R}$  заключается между корнями, т. е., называя корни буквами x' и x'', и полагая x' < x'', имъемъ

$$x' < R < x''$$
:

заключаемъ, что одинъ изъ корней меньше R, другой больше R.

Такимъ образомъ задача витетъ *одно ръшеніе*, выражаемое меньшимъ корнемъ

$$x' = \frac{R(3-\sqrt{3})}{2}$$
.

ПРИМВРЪ 4. — Описать около шара такой конусь, чтобы отношение его полной поверхности къ поверхности шара было равно данному числу ш.

Легко видъть, что если за неизвъстное принять высоту конуса x, уравненіе задачи будеть

$$x^2 - 4mRx + 8mR^2 = 0.$$

Чтобы x, выведенный изъ этого ур-нія, представляль рёшеніе данной задачи, необходимо, чтобы онъ быль количествомъ дёйствительнымъ, положительнымъ и > 2R. — Корни будуть дёйствительны, если  $(2Rm)^2 - 8R^2m > 0$ , или m(m-2) > 0, или, наконецъ, такъ какъ m > 0, если m > 2. Пусть это условіе удовлетворено. — Произведеніе корней положительно, слёд. они имёютъ одинаковые знаки; сумма ихъ (4mR) положительна, сл. оба они положительны. — Остается разсмотрёть, какова ихъ величина сравнительно съ 2R. Подстановка 2R вмёсто x въ первую часть даетъ  $+4R^2$ , т. е. результатъ одинаковаго знака съ коэффиціентомъ при  $x^2$ ; заключаемъ, что 2R лежитъ внё корней; слёд. или оба корня < 2R, или оба > 2R. Полусумма корней = 2mR, а

какъ m > 2, то она не меньше 4R; но 2R меньше этой величины, сл. оба корня больше 2R, и задача имъеть 2 ръшенія.

509. Задача. — Дать общую форму условій, необходимых и достаточных для того, чтобы корни уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

предполагая, что они дъйствительны, были оба больше, или оба меньше даннаго количества  $\lambda$ .

Во-первыхъ, согласно требованію, необходимо, чтобы  $\lambda$  лежало внѣ корней, а потому подстановка этого числа на мѣсто x въ триномъ  $ax^2 + bx + c$  должна давать результать одинаковаго знака съ a, т. е. должно быть

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0.$$

Это условіе выражаеть только, что х не содержится между корнями; остается выразить, что:

1) въ первомъ случат оба корня больше  $\lambda$ , т. е.

$$x' > \lambda$$
 н  $x'' > \lambda$ , откуда  $x' + x'' > 2\lambda$ , или  $\frac{x' + x''}{2} > \lambda$ , или, наконецъ,  $-\frac{b}{2a} > \lambda$ .

Итакъ, условія, neoбходимы я для того, чтобы оба корня были больше  $\lambda$ , таковы:

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0$$
 If  $-\frac{b}{2a} > \lambda$ .

Будучи необходимы, они вмъстъ съ тъмъ и достаточны, ибо какъ скоро они выполнены, то изъ перваго слъдуетъ, что  $\lambda$  не содержится между корнями, а изъ втораго должно заключить, что  $\lambda$  меньше каждаго изъ корней, ибо, допустивъ, что корни меньше  $\lambda$ , имъли-бы

$$x'+x''<2\lambda$$
, has  $-\frac{b}{2a}<\lambda$ .

2) Такимъ же образомъ найдемъ, что условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы оба корня были меньше  $\lambda$ , будуть:

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0 \quad \text{if} \quad -\frac{b}{2a} < \lambda.$$

**510.** Задача. Дать общую форму условія, необходимаго и достаточнаго для того, чтобы данное количество  $\lambda$  содержалось между корпями ур-нія  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Необходимо и достаточно, ттобы результать подстановки числа  $\lambda$  на мъсто x въ триномъ  $ax^2 + bx + c$  имъль знакъ, противоположный знаку a.

Каковъ бы ни былъ знакъ а, это условіе будеть

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)<0.$$

#### 511. Задачи.

1. Разложить на множителей первой степени триномы:

$$2x^2 - 3x - 5;$$
  $-2x^2 - 3x + 5;$   $9x^2 - 9x + 2;$   $x^2 + x + 1;$ 

$$4x^{2} + 17; \quad 2 + 11x - 5x^{2}; \quad x^{2} + 17x + 16; \quad 20x - x^{2} + 69;$$

$$x^{2} + 8x + 28; \quad 4x^{2} - 12x + 9; \quad 48x - 27x^{2} - 13; \quad x^{2} + 3; \quad x^{2} - ax - 6a^{2};$$

$$x^{2} + a^{2}x - 2a^{4}; \quad x^{2} - 2ax + a^{2} - b^{2}; \quad x^{3} - 4m(x - m) - n^{2};$$

$$x^{2} - 2(a + b)x + 10ab - 3(a^{2} + b^{2}); \quad x^{2} - ax - a\sqrt{b} - b; \quad x^{2} + 2mx + m^{2} + a^{2};$$

$$4m^{2}x^{2} - 4mpx + p^{2} - 1; \quad a^{4}x^{2} - 2a^{2}mx + m^{2} + 4.$$

2. Сократить дроби:

$$\frac{15x^2+41x+28}{20x^2+43x+21}, \quad \frac{12y^2-y-6}{3y^2+5y+2}, \quad \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x-x\sqrt{3}-3\sqrt{3}};$$

$$\frac{x^2-2bx-4a(a-2b)-3b^2}{x^2-4ax+4a^2-b^2}, \quad \frac{2x^3-28x^2+90x}{10x^4-150x^3+590x^2-450x};$$

3. Какъ расположены числа 15 и 17 относительно корней уравненія

$$x^2 - 18x + 32 = 0$$
?

- 4. Расположить кории ур-нія  $3x^2 17x + 10 = 0$  и числа 0, 3 и 6 въ порядкі возрастающих значеній, не різная ур-нія.
- 5. Изследовать измененія знака тринома  $acx^2 + x (ad bc) + bd$ , въ которомь a, b, c и d числа положительныя.
- 6. Показать, что кории ур-нія (A-x)  $(C-x)-B^2=0$  всегда д'яйствительны, пользуясь теоремою объ изм'яненін знака тринома.
- 7. Дано уравненіе  $3(x-\alpha)-4(x-\beta)\equiv 2(x-\alpha)(x-\beta)+8(x-\alpha)$ , въ котором'я  $\alpha>\beta$ . Узнать, имфеть-ин опо дъйствительные корин или мнимые, не приводя его къ виду  $dx^2+bx+c\equiv 0$ .
  - 8. Определить а такъ, чтобы триномъ

$$(\lambda + 3) x^{2} + (\lambda + 1) x - (\lambda - 1)$$

быль точнымь квадратомь, и привести его къ новому виду, въ которомъ онъ приэтомъ м. б. представленъ.

#### ГЛАВА XXXIII.

Рёшеніе неравенствъ: квадратныхъ, высшихъ степеней, прраціональныхъ. — Прихоженія. — Задачи.

# Целое квадратное неравенство.

512. Цълыя квадратныя неравенства могутъ быть двоякаго вида:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
, with  $ax^2 + bx + c < 0$ ;

но умноживъ второе на —1, приведемъ его къ виду нерваго; сабд. съ теоретической точки зрънія достаточно указать ръшеніе неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0$$
 . . . . (1)

Следуетъ различать два случая:  $b^2 - 4ac \ll 0$  и  $b^2 - 4ac > 0$ .

1-й случай:  $b^2 - 4ac \ll 0$ .

При этомъ усновіи корни тринома будуть дъйствительные равные, или мнимые; и извъстно, что какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случать, при встать дъйствительныхъ значеніяхъ x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$  триномъ сохраняетъ неизмѣнно знакъ коэффиціента  $\alpha$ . Поэтому надо различать случаи:  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ .

Если a>0, триномъ всегда останется положительнымъ, и слъд. неравенству (1) удовлетворяютъ всъ дъйствительныя значенія x.

Если-же a < 0, триномъ всегда останется отрицательнымъ: неравенство не можетъ быть удовлетворено никакимъ дъйствительнымъ значеніемъ x.

2-й случай:  $b^2 - 4ac > 0$ .

Въ этомъ случат триномъ имтетъ ворни цтйствительные неравные; мы ихъ найдемъ, ртиновъ ур.  $ax^2 + bx + c = 0$ : пусть они будутъ x' и x'', и пусть x' < x''.

Если a>0, то триномъ, сохраняя знакъ перваго члена при всёхъ значеніяхъ x, лежащихъ внё корней, останется при всёхъ этихъ значеніяхъ положительнымъ; слёд. неравенству будутъ удовлетворять съ одной стороны всё значенія x, меньшія меньшаго корня x', съ другой всё x-сы, большіе большаго корня x':

$$x < x'$$
 in  $x > x''$ .

Если a < 0, то триномъ, сохраняя знакъ противоположный первому члену при всёхъ значеніяхъ x, лежащихъ между корнями, будетъ положителенъ при

$$x' < x < x''$$
.

513. Примъръ І. — Рошить неравенство: —  $3x^2 + 7x - 5 < 0$ .

Здёсь  $b^2-4ac=7^2-4$  (— 3). (— 5) = — 11, слёд, корин тринома минмые, а потому при всёхъ дёйствительныхъ значеніяхъ x, сохраняя знакъ перваго члена, онъ будетъ отрицателенъ; такъ что неравенство удовлетворяется всякимъ дёйствительнымъ значеніемъ перемённаго.

II РИМ В РЪ II. — Ръшить перавенство  $3x^2 - 10x + 3 > 0$ .

Здёсь  $b'^2-ac=5^2-3$ . 3=16: кории тринома действительные неравные, именно:  $x'=\frac{1}{3}$ , x'=3.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ былъ положителенъ, т. е. имълъ знакъ перваго члена, а это имъетъ мъсто при всъхъ значеніяхъ x, лежащихъ внъ корней. Поэтому неравенству удовлетворяютъ всъ

$$x<\frac{1}{3}$$
, a tarme  $x>3$ .

Примъръ III. — Ръшить перавенство  $4x^2 + 5x - 19 < 0$ .

Здѣсь  $b^2-4ac=5^2-4$  . 4 . (-19)=329: корни тринома дѣйствительные неравные, именно:

$$x' = \frac{-5 - \sqrt{329}}{8}, \ x'' = \frac{-5 - \sqrt{329}}{8}.$$

Неравенство требуеть, чтобы знакь тринома быль противоположень знаку перваго члена, и потому x должно заключаться между корнями, т. е.

$$\frac{5+\sqrt{329}}{8} > x > \frac{-5-\sqrt{329}}{8}$$

II РИМБРЪ IV. — Ръшить перавенство  $\frac{3x-5}{7-x} > 0$ .

Чтобы частное было положительно, нужно чтобы дёлимое и дёлитель имёли одинаковые знаки, или, что тоже, надо, чтобы произведение ихъ было положительно, т. е. чтобы

$$(3x-5)$$
  $(7-x) > 0$ , where  $-3x^2 + 26x - 35 > 0$ .

Отсюда, какъ въ примъръ III, найдемъ, что

$$\frac{5}{3} < x < 7$$
.

Примъръ V. — Ръшить неравенство  $x^2 + 2ax - a^2 > 0$ .

Крайніе члены противоположны по знаку, слёд. корни тринома дёйствительные неравные; а вменно, найдемъ, что

$$x' = a(\sqrt{2} - 1)$$
.  $x'' = -a(\sqrt{2} + 1)$ .

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ сохраняль знакъ 1-то коэффиціента, а въ случать дъйствит. неравныхъ корней это имбетъ мъсто при всъхъ значеніяхъ x, лежащихъ вит корней.

Отсюда:

- 1) Если a>0, и слъд. x'>x'', неравенству удовлетворяють всъ значенія  $x>a\,(\sqrt{2}-1)$ , а также всъ  $x<-a\,(\sqrt{2}+1)$ .
- 2) Если a < 0, и слёд. x' < x'', неравенству удовлетворяють всё  $x < a \ (\sqrt{2} 1)$ , а также всё  $x > -a \ (\sqrt{2} + 1)$ .

Примъръ VI. — Ръшить неравенство

$$(n-3)$$
  $(n-4)$   $x^2-8a$   $(n-3)$   $x-12a^2 > 0$ .

Находимъ корни тринома; для этого решаемъ ур.

$$(n-3)$$
  $(n-4)$   $x^2-8a$   $(n-3)$   $x-12a^2=0$ ,

изъ котораго

$$x = \frac{4a(n-3) \pm \sqrt{16a^2(n-3)^2 + 12a^2(n-3)(n-4)}}{(n-3)(n-4)}.$$

Нодрадикальное количество  $=4a^2(n-3)\{4(n-3)+3(n-4)\}$ =  $4a^2(n-3)(7n-24)$ ; такимъ образомъ найдемъ

$$x' = \frac{2a\left[2\left(n-3\right) + \sqrt{\left(n-3\right)\left(7n-24\right)}\right]}{\left(n-3\right)\left(n-4\right)}; \quad x'' = \frac{2a\left[2\left(n-3\right) - \sqrt{\left(n-3\right)\left(7n-24\right)}\right]}{\left(n-3\right)\left(n-4\right)}$$

Знакъ тринома зависить какъ отъ знака коэффиціента (n-3) (n-4), такъ и отъ природы корней, слъд. отъ подрадикальнаго количества, а потому

нужно разсмотрёть нёсколько случаевь, давая по всё значенія въ слёдующихъ интерваллахъ:

$$n - \infty$$
  $+ 3 \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{24}{7} \cdot \cdot \cdot \cdot + 4 \cdot \cdot \cdot \cdot + \infty$ 

Первый интервалль. — Давая n значенія въ первомъ интервалль, т. е. меньшія 3, будемъ имъть: n-3<0, 7n-24<0, n-4<0; слъд. козофиціенть при  $x^2$  больше 0; подрадикальное количество >0, и корни дъйствительные. Неравенству будутъ удовлетворять значенія x, лежащія внъ корней; нужно, слъд., сравнить корни. Пишемъ наугадъ неравенство

$$\frac{2a[2(n-3)+\sqrt{(n-3)}(7n-24)]}{(n-3)(n-4)} > \frac{2a[2(n-3)-\sqrt{(n-3)}(7n-24)]}{(n-3)(n-4)} \dots (1)$$

Такъ какъ (n-3) (n-4)>0, то можемъ откинуть знаменателя, не измъняя знака неравенства; затъмъ, сокращаемъ на 2, откидываемъ отъ объихъ частей общіе члены 2a(n-3), сокращаемъ на полож. количество  $2\sqrt{(n-3)(7n-24)}$  и получимъ такимъ образомъ тождественное съ (1) неравенство

$$a > -a$$
 with  $2a > 0$ 

Если a>0, это неравенство, а слъд. и испытуемое, върно; слъд. будетъ x'>x''. Если же a<0, то и 2a<0, а потому въ испытуемомъ неравенствъ первая часть должна быть меньше второй, т. е. x'< x''. Заключаемъ, что, при a>0 неравенству удовлетворяютъ

BCK 
$$x < x''$$
, a Tarme  $x > x'$ ;

при a < 0 ему удовлетворяютъ

BCE 
$$x < x'$$
, a tarme BCE  $x > x''$ 

Второй интерваллъ. Для значеній n, большихъ 3, но меньшихъ  $\frac{24}{7}$ , будетъ: n-3>0, 7n-24<0, n-4<0. Слъд. (n-3)(n-4)<0; подрадивальное воличество <0, значить корни мнимые, а потому триномъ будетъ отрицателенъ, и данному неравенству, которое требуетъ, чтобы триномъ былъ положителенъ, удовлетворить нельзя.

ТРЕТІЙ ИНТЕРВАЛІЪ. Для  $\frac{24}{7} < n < 4$  будетъ: n-3>0, 7n-24>0, n-4<0; слъд. коэффиціентъ при  $x^2$  отрицателенъ, а корни дъйствительные. Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имълъ знакъ противоположный коэффиціенту при  $x^2$ , а этому требованію удовлетворяютъ всѣ значенія x, лежащія между корнями.

Для сравненія корней пишемъ неравенство (1); умножая объ его части на отрицательное количество (n-3)(n-4), должны измънить знакъ неравенства; откинувъ, затъмъ, общіе члены и сокративъ на полож. количество  $2\sqrt{(n-3)(7n-24)}$ , найдемъ

$$a < -a$$
, where  $2a < 0$ .

Если a>0, это неравенство невёрно, а потому смыслъ испытуемаго неравенства надо измёнить, слёд. будеть x'< x''. Если a<0, то и 2a<0, а

потому испытуемое неравенство върно; и слъд. x' > x''. Заключаемъ, что при a > 0, неравенству удовлетворяютъ всъ x, большія x', но меньшія x'':

$$x'' > x > x'$$
;

при a < 0, значенія x заключаются въ предвлахъ

Четвертый интерваллъ. Когда n>4, то будеть: n-3>0, 7n-24>0, n-4>0; (n-3)(n-4)>0, а корни дъйствительные.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имълъ знакъ перваго коэффиціента, что имъ́етъ мъ́сто для x, лежащихъ внъ корней.

Сравненіе корней въ этомъ случав покажеть, что при a>0 будеть x'>x'', при a<0 будеть x'< x''. Заключаемь, что при a>0 данному неравенству удовлетворяють

$$x > x'$$
, a tarme  $x < x''$ .

при a < 0 ему удовлетворяють

$$x < x' \qquad \text{ If } \qquad x > x''.$$

ПРИМБРЪ. VII. Ришить неравенство

$$\frac{x^2+x-6}{2a+1} > x+6(2a-1).$$

Общій знаменатель =2a+1; но какъ знакъ его неизвъстенъ, то мы не можемъ, въ видахъ освобожденія неравенства отъ дробей, множить объ его части на 2a+1, не сдълавъ предварительно того или другаго предположенія о знакъ этого двучлена. Итакъ, нужно разобрать два случая: 2a+1>0 и 2a+1<0.

Первый случай: 
$$2a+1>0$$
, пли  $a>-\frac{1}{2}$ .

Въ тэкомъ случав, умноживъ обв части на 2a+1 и не перемвняя смысла неравенства, получимъ тождественное съ даннымъ неравенство:

$$x^{2} + x - 6 > (2a + 1)x + 6(2a - 1)(2a + 1).$$
  
 $x^{2} - 2ax - 24a^{2} > 0$ :

кории тринома первой части дъйствительные неравные, именно: -4a и +6a.

Неравенство требуетъ чтобы триномъ имълъ знакъ одинаковый съ коэфонціентомъ при  $x^2$ , сл. x должно содержаться внъ корней -4a и +6a. Такимъ образомъ нужно знать, который изъ этихъ корней больше; а это зависитъ отъ знака a. Но a, будучи  $>-\frac{1}{2}$ , можетъ имътъ значенія отъ  $-\frac{1}{2}$  до 0 (отрицательныя), и отъ 0 до  $+\infty$  (положительныя). Когда a<0, то очевидно -4a>6a; при a>0, наоборотъ -4a<6a.

Такимъ образомъ

NIN

$$a > -\frac{1}{2} \begin{cases} a < 0 & \dots & x < 6a, & \text{a tarme } x > -4a. \\ a > 0 & \dots & x < -4a, & \text{a tarme } x > 6a, \end{cases}$$

Второй случай. 
$$2a+1<0$$
, нам  $a<-\frac{1}{2}$ 

Умножая объ части перавенства на отрицательное количество 2a+1 и измъняя смыслъ неравенства, придемъ къ слъдующему неравенству, тождественному съ даннымъ.

$$x^2 - 2ax - 24a^2 < 0$$
.

Оно требуеть, чтобы триномъ первой части имъль знакъ, противоположный коэффиціенту при  $x^2$ , и этому требованію удовлетворяють значенія x, лежащія между корнями — 4a и — 6a тринома.

Такъ какъ a, будучи  $<-\frac{1}{2}$ , отрицательно, то -4a>+6a. и потому вначенія x, удовлетворяющія неравенству при

$$a < -\frac{1}{2}$$
 cyth  $+6a < x < -4a$ .

Примъчаніе. Можно бы было получить тѣ же результаты, умноживъ обѣ части предложеннаго неравенства на положительное количество  $(2a+1)^2$ .

**514.** Приложеніе І. При какихъ условіяхъ 0 будеть заключаться между корнями уравненія.

$$x(x-1)-p(p-1)-q(q-1)-2pq=0.$$

Необходимо и достаточно, чтобы результать подстановки нуля вийсто x имблъзнакъ, противоположный знаку коэффиціента при  $x^2$ , т. е. чтобы

$$-p(p-1)-q(q-1)-2pq<0$$
, или  $(p+q)^2-(p+q)>0$  или, наконецъ,  $(p+q)(p+q-1)>0$ ,

А этому неравенству можно удовлетворять двояко: или полагая p+q>1, или p+q<0.

515. Приложеніе II. Какимъ условіямъ должно удовлетворять количество  $\alpha$  для того, чтобы  $-\frac{1}{2}$  содержалась между корнями уравненія

$$x(x+1)(\alpha^2+3\alpha+3)+a^2=0.$$

Необходимо и достаточно, чтобы результать подстановки —  $\frac{1}{2}$  вм'ясто x въ первую часть быль отрицательный, т. е. чтобы было

$$-\frac{1}{4}(\alpha^2+3\alpha+3)+\alpha^2<0$$
, him  $\alpha^2-\alpha-1<0$ .

Этому неравенству удовлетворимъ, взявъ

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

**516.** Приложеніе III. Какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты полинома

$$z = Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + 2B'x + 2By + A''$$

для того, чтобы онг оставался положительными при всяких значеніях х и у? Первое условіє состоить въ томъ, что A должно быть >0, пбо при A<0,

если корни ур-нія относительно x

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + 2B'x + 2By + A'' = 0 \dots (1)$$

будуть дъйствительны, подиномь z будеть отрицателень при тъхъ значеніяхь x, которыя содержатся между корнями, а если мнимы, то z постоянно будеть отрицателень; слъд. онь не быль бы положителень при всякомь x.

Если A>0, то полиномъ z будетъ всегда положителенъ, если корни ур-нія (1), р $\pm$ шеннаго относительно x, будутъ мнимыми, что ведетъ къ неравенству:

$$(B''^2 - AA')y^2 + 2(B'B'' - AB)y + B'^2 - AA'' < 0;$$

а этотъ квадратный относительно y триномъ будетъ постоянно отрицателенъ, если

$$B''^2 - AA' < 0$$
 m  $(B'B'' - AB)^2 - (B''^2 - AA')(B'^2 - AA') < 0$ .

След., искомыя условія таковы:

$$A > 0$$
,  $B''^2 - AA' < 0$   $B (B'B'' - AB)^2 - (B''^2 - AA')(B'^2 - AA'') < 0$ .

517. Приложение IV. — Изслыдовать корни уравнения

$$(\lambda + 2)x^2 + 2(\lambda + 1)x - (\lambda - 1) = 0$$

при измъненіи  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Прежде всего нужно знать, какъ взять  $\lambda$ , для того чтобы корни ур-нія были дъйствительны. Необходимо и достаточно для этого, чтобы было

$$(\lambda + 1)^2 + (\lambda + 2)(\lambda - 1) \ge 0$$
, when  $2\lambda^2 + 3\lambda - 1 \ge 0$ ...(1)

Кории тринома  $2\lambda^2+3\lambda-1$ , какъ видно à priori, дъйствительные неравные; именно

$$\lambda_1 = -\frac{3+\sqrt{17}}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{17}-3}{4}.$$

Чтобы удовдетворить неравенству (1), нужно  $\lambda$  давать значенія, лежащія внѣ корней. Итакъ, при  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$  ур-ніе пиѣетъ мнямые корня; при  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$  — дѣйствительные равные, а при  $\lambda < \lambda_1$  и  $\lambda > \lambda_2$  — дѣйствительные неравные. Изслѣдуемъ теперь знаки дѣйствительныхъ корией при измѣненіи  $\lambda$  отъ —  $\infty$  до  $\lambda_1$  и отъ  $\lambda_2$  до  $+\infty$ ; они зависять отъ знаковъ коэффиціентовъ, а послѣдніе мѣняютъ свой знакъ при переходѣ черезъ 0; поэтому, надо знатъ тѣ значенія  $\lambda$ , при которыхъ коэффиціенты обращаются въ нули: эти значенія суть

$$\lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = -1, \quad \lambda_3 = +1.$$

Составимъ теперь нижеслъдующую скалу возрастающихъ значеній х:

$$-\infty.....-2.....-\frac{3+\sqrt{17}}{4}.....-1....+\frac{\sqrt{17}-3}{4}.....+1.....+\infty$$

$$\lambda_{3} \qquad \lambda_{1} \qquad \lambda_{4} \qquad \lambda_{2} \qquad \lambda_{5}$$

1. — При  $\lambda = \pm \infty$  уравненіе, если въ немъ вынести  $\lambda$  за скобки, беретъ видъ

$$\lambda \left[ \left( 1 + \frac{2}{\lambda} \right) x^2 + 2 \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) x - \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] = 0;$$

и слъд. при  $\lambda = -\infty$  кории его должны удовлетворять ур-нію

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$
.

Эти корни суть:

$$x' = -(1+\sqrt{2}), \quad x'' = \sqrt{2}-1.$$

 $2.-\lambda<-2$ . Произведеніе корней  $=-\frac{\lambda-1}{\lambda+2}$ ; но если  $\lambda<-2$ , то к подавно  $\lambda<1$ ; слёд.  $\lambda+2<0$  и  $\lambda-1<0$ , а потому произведеніе корней отрицательно, и слёд. знаки ихъ противоположны.

Сумма корней  $=-\frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}$ ; но  $\lambda$ , будучи меньше -2, меньше и -1; слъд.  $\lambda+2<0$  и  $\lambda+1<0$ , и цотому сумма корней отрицательна; заключаемъ, что отрицательный корень имъетъ большую абсолютную величину.

 $3.-\lambda=-2.$  Отсюда  $\lambda+2=0$ , и слъд. одинь корень безконечень, другой удовлетворяеть ур-нію

$$2(-2+1)x-(-2-1)=0$$
, или  $-2x+3=0$ , отнуда:  $x'=-\infty$ ,  $x''=\frac{3}{2}$ .

 $4.-2<\lambda<-rac{3+\sqrt{17}}{4}.$  — Въ этомъ случав  $\lambda+2>0$ ; затвмъ,  $\lambda$ , будучи меньше  $-rac{3+\sqrt{17}}{4}$ , будетъ меньше н -1 и +1, сл.  $\lambda+1<0$  и  $\lambda-1<0$ . Произведеніе корней, равное  $-rac{\lambda-1}{\lambda+2}$ , положительно: знаки корней одинаковы. — Сумма корней, равная  $-rac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}$ , положительна, слёд: оба корня дъйствительные, неравные и положительные.

 $5. - \lambda = -\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ . Въ этомъ случат, количество  $b'^2 - ac$  обращается въ ноль, и ур. имъетъ корни дъйствительные равные; общая величина ихъ выражается формулою  $-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$ . Вычисливъ ее, имъемъ

$$x' = x'' = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$
.

 $6. - \frac{3+\sqrt{17}}{4} < \lambda < \frac{\sqrt{17}-3}{4}$ . — Количество  $b'^2-ac$  становится отрицательным, и ур-ніе имъєть корни мнимые сопряженные.

7. — При  $\lambda = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$  снова  $b'^2 - ac = 0$ , и ур-ніе им'єсть корни дий-

$$x' = x'' = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$
.

 $8.-\frac{\sqrt{17}-3}{4}<\lambda<+1.$  При этомъ будетъ:  $\lambda-1<0,\ \lambda+1>0,\ \lambda+2>0,$  отвуда легко убъдиться, что произведение корней положительно, сумма же ихъ отрицательна, а потому ур-ние имъетъ корни дъйствительные, неравные и оба отрицательные.

9. —  $\lambda = +1$ . Въ такомъ случат  $\lambda - 1 = 0$ , след. произведение корней

равно нулю: одинъ корень равенъ нулю, другой удовлетворяеть ур-нію 3x+4=0; слъд.

$$x' = -\frac{4}{3}, \quad x'' = 0.$$

 $10. - \lambda > +1$ ; то, очевидно,  $\lambda > -1$  и  $\lambda > -2$ ; савд.  $\lambda -1 > 0$ ,  $\lambda +1 > 0$ ,  $\lambda +2 > 0$ , поэтому произведеніе корней и сумма ихъ отрицательны, а савд. ур-ніе имветь корни дойствительные, неравные, съ противоположными знаками, и отрицательный корень имьеть большую абсолютную величину.

11. —  $\lambda = +\infty$ . Результать тоть же, что въ первомъ случат:

$$x' = -(1+\sqrt{2}), \quad x'' = \sqrt{2}-1.$$

### Раціональныя дробныя неравенства.

518. Когда непзейстное входить въ неравенстви въ знаменатели, то мы можемь уничтожить знаменателя, если онь представляеть количество существенно-положительное. Во вста остальных случаях приводять вст члены неравенства къ одному знаменателю и собирають ихъ въ первую часть. Тажить образомъ получается неравенство вида

$$\frac{P}{Q} > 0$$
, han  $\frac{P}{Q} < 0$ ,

гдъ Р и Q суть полиномы, содержащіе х. Замъчая, что по правилу внаковъ при умноженіи и дъленіи, произведеніе количествъ Р и Q всегда имъетъ тотъ же знакъ, какъ и ихъ частное, можно предыдущія неравенства замънить тождественными имъ:

$$PQ > 0$$
, или  $PQ < 0$ .

Къ тому же результату мы пришли бы, умножая объ части того или другаго неравенства на существенно положительное количество Q2.

Затъмъ раздагаютъ полиномы P и Q на множители 1-ой степени относительно x, и получаютъ неравенство вида:

$$A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) . . . . > 0,$$

гдъ A не содержить x. Затъмъ распредъляютъ количества  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , . . . . въ порядкъ возрастающихъ величинъ. Пусть напр. будетъ

$$-\infty < \alpha < \beta < \gamma \dots < +\infty$$
.

Очевидно, каждый двучленный множитель будеть сохранять неизмённый знакь до тёхъ поръ, пока x, увеличиваясь, не перейдеть значеніе, обращающее этоть множитель въ ноль. Такимъ образомъ можно указать знакъ произведенія для всякаго отдёльнаго интервалла, и слёд. указать тё интерваллы, въ которыхъ произведеніе сохраняеть требуемый неравенствомъ знакъ.

**519**. Примъръ I. — Въ какихъ предълахъ нужно измънятъ x, чтобы удовлетворить неравенству

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3} > 1.$$

Перенеся 1 въ первую часть и приведя къ общему зцаменателю, получимъ неравенство

$$\frac{2x^2-4}{2x^2-5x+3} > 0.$$

Умноживъ объ части на существенно-положительное количество  $(2x^2-5x-3)^2$ , найдемъ неравенство, тождественное предложенному:

$$2(x^2-2)(2x^2-5x+3)>0$$

или, по разложеніи  $x^2-2$  и  $2x^2-5x-3$  (триномовъ, имѣющихъ корни дѣй-стептельные неравные, и слѣд. изиѣняющихъ знакъ при изиѣценіи x) па множители 1-й степени:

$$4(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-1)(x-\frac{3}{2})>0.$$

Будемъ давать x значенія въ слѣдующихъ интерваллахъ, въ которыхъ величины, обращающія каждый биномъ въ ноль, расположены въ возрастающемъ порядкѣ:

$$-\underbrace{\cdots}_{1}\underbrace{-\sqrt{2}\cdot\cdots+1}_{2}\underbrace{\cdots+\sqrt{2}\cdot\cdots+\frac{3}{2}\cdot\cdots+\frac{3}{2}}_{5}\underbrace{\cdots}_{5}\underbrace{+\infty}.$$

Если давать x значенія меньшія (—  $\sqrt{2}$ ), то каждый множитель будеть отрицателень; а какъ ихъ четное число, то все произведеніе будеть оставаться положительнымъ.

Если давать x значенія, большія  $(-\sqrt{2})$ , но меньшія +1, а слѣд. и подавно меньшія  $\sqrt{2}$  и  $\frac{3}{2}$ , то множитель  $x+\sqrt{2}$  будеть положителень, остальные же биномы — отрицательны, и такъ какъ число отрицательныхъ множителей — нечетное, все произведеніе будеть отрицательно.

Давая x значенія, большія +1, но меньшія  $+\sqrt{2}$ , находимъ, что два множителя:  $x+\sqrt{2}$  и x-1 будуть положительны, а два:  $x-\sqrt{2}$  и  $x-\frac{3}{2}$  отрицательны; слъд. произведеніе положительно. И такъ далье.

Убъдимся, что данному неравенству удовлетворяютъ значенія x, опредъляемыя нижеслъдующими предълами:

$$x < -\sqrt{2};$$
  $+1 < x < +\sqrt{2};$   $x > +\frac{3}{2}$ 

**520.** If printed II. Primme nepasenemso  $\frac{5x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-3x+1)} < 0$ .

Это неравенство тождественно сабдующему:

$$(5x^2-2x+3)(x-1)(x^2-3x+1)<0.$$

Замъчая, что для тринома  $5x^2-2x+3$  имъемъ: 1-5. 3<0, т. е. что корни его инпиме, заплючаемъ, что онъ всегда будетъ сохранять знакъ перваго коэффиціента, т. е. всегда положителенъ. Поэтому данное неравенство тождественно еще слъдующему простъйшему:

$$(x-1)(x^2-3x+1)<0$$
.

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-1\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)<0.$$

Даемъ х последовательно значенія въ интерваллахъ:

$$-\underbrace{\infty \cdot \ldots \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}}_{1} \underbrace{\ldots \cdot +1}_{2} \underbrace{\ldots + \frac{3+\sqrt{5}}{2}}_{2} \underbrace{\ldots \cdot +\infty}_{4}$$

Когда  $x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , всѣ три множителя, а слѣд. и произведеніе, будутъ отрицательны. При  $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$ , первый множитель положителенъ, два другіе отрицательны, слѣд. произведеніе положительно. При  $1< x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ , первые два множителя >0, третій <0, слѣд. произведеніе <0. Наконецъ, при  $x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  всѣ множители, а съ ними и произведеніе >0. Птакъ, неравенству удовлетворяють:

$$x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2};$$
  $1 < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$ 

**521.** Примъръ III. Рпшить неравенство  $\frac{2ax+3b}{5bx-4a}$  < 4.

Приведя въ общему знаменателю, имфемъ

$$\frac{2(a-10b)x+3b+16a}{5bx-4a}<0,$$

что тождественно неравенству

$$[2(a-10b)x+3b+16a](5bx-4a)<0$$
,

или, по вынесеній изъ первыхъ скобокъ 2(a-10b), а изъ вторыхъ 5b:

$$10(a-10b)b\left(x+\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\right)\left(x-\frac{4a}{5b}\right)<0.$$

Относительно коэффиціента 10(a-10b)b могуть быть предположенія

$$b < 0 \begin{cases} a < 10b \\ a > 10b \end{cases}$$
,  $b > 0 \begin{cases} a < 10b \\ a > 10b \end{cases}$ 

Первый случай: b < 0, a < 10b.

Произведеніе 10(a-10b)b положительно; сл ${}^{\star}$ д. неравенство тождественно съ

$$\left(x + \frac{3b + 16a}{2(a - 10b)}\right)\left(x - \frac{4a}{5b}\right) < 0.$$

Триномъ долженъ имѣть знакъ противоположный коэффиціенту при  $x^2$ , слѣд. x должно заключаться между  $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$  н  $\frac{4a}{5b}$ .

Нужно знать, который изъ этихъ предъловъ большій. Положимъ наугадъ  $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} > \frac{4a}{5b}$ ; т. к. 10(a-10b)b>0, мы можемъ умножить объ части на это произведеніе, и не измѣняя смыслъ перавенства, получимъ ему тождествен-

ное: — (3b+16a)5b>4a.2(a-10b), или —  $15b^2-8a^2>0$ , что невърно, ибо первая часть существенно отрицательна.

Заключаемъ, что  $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\!<\!\frac{4a}{5b}$ , а потому x нужно взять такъ, чтобы  $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\!<\!x\!<\!\frac{4a}{5b}$  .

Второй случай: b < 0, a > 10b.

Произведеніе 10(a-10b)b отрицательно, сл ${}^{\star}$ д. предложенное неравенство тождественно съ

$$\left(x + \frac{3b + 16a}{2(a - 10b)}\right)\left(x - \frac{4a}{5b}\right) > 0.$$

й нотему x не должно заключаться между корнями тринома:  $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$  и  $\frac{4a}{5b}$ . Поемотримъ, который изъ нихъ больше. Допустивъ, что  $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} > \frac{4a}{5b}$  и замъчая, что 10(a-10b)b < 0, умножаемъ допущенное неравенство на это произведение и перемъняемъ смыслъ неравенства; найдемъ тождественное съ нимъ неравенство  $-15b^2-8a^2 < 0$ , что върно.

Заключаемъ, что предположение было правильно, а потому данному неравенству удовлетворяютъ два ряда значений x:

$$x>-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$$
  $\pi$   $x<\frac{4a}{5b}$ 

Третій случай: b > 0, a < 10b.

Оперируя такимъ же образомъ, найдемъ, что предложенному неравенству удовлетворяютъ:

$$x > -\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$$
 H  $x < \frac{4a}{5b}$ 

Четвертый случай: b>0, a>10b.

Вышеуказанный способомъ придемъ на результату:

$$-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}$$

Итакъ, чтобы удовлетворить предложенному неравенству, надо:

При 
$$(a-10b)$$
.  $b>0$  брать:  $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}$ .

При 
$$(a-10b)$$
 .  $b<0$  брать:  $x>-\frac{3b+15a}{2(a-10b)}$ , или  $x<\frac{4a}{5b}$ 

# Рашение ирраціональных неравенствъ.

522. Когда неизвъстное встръчается подъ знакомъ квадратнаго корий, то, вообще говоря, нужно бываеть освободить его изъ подъ знака кория, а для этого нужно изолировать радикаль въ одну часть неравенства. Затъмъ, слъдуетъ опредълить знакъ второй части неравенства, будетъ-ли онъ неизмъннымъ, или

же зависьть отъ предположеній относительно буквъ, входящихъ въ эту часть. Если знако этсть не одинаково со знакомо, стоящимо передо радикаломо, смысль неравенства очевидень. Если же одинаково, то нужно возвысить объ части во квадрать, сохраняя или перемъняя смысль неравенства, смотря потому, будеть-ли этоть общій знако — или —.

**523.** If pumbris 1. — Primer hepasenemso 
$$\sqrt{(x-1)(x-2)} > x-3$$
.

Чтобы  $\sqrt{(x-1)(x-2)}$  быль действителень, надо, чтобы подрадикальное количество было >0: этому требованію удовлетворяють всё x оть  $-\infty$ . . . . до 1, и оть 2 до  $+\infty$ . Затёмь, очевидно, неравенство будеть удовлетворено всёми значеніями x, которыя, не содержась между 1 и 2, будуть меньше 3, ибо въ этомъ случав вторая часть будеть отрицательна. Итакъ, во-первыхъ, для x можно брать всё числа отъ  $-\infty$  до +1, и отъ +2 до +3.

Пусть теперь будеть x>3; объ части будуть положительны, а потому, возвысивь въ квадрать и сохранивь знакъ неравенства, ищемъ числа, удовлетворяющія неравенству

$$x^2-3x+2>x^2-6x+9$$
, или  $x-\frac{7}{3}>0$ .

Это неравенство удовлетворяется всёми значеніями x, большими 3.

Итакъ: предложенному неравенству удовлетворяють всѣ значенія x отъ —  $\infty$  до + 1 и отъ + 2 до +  $\infty$ .

524. Примъръ II. — Рпишть перавенство  $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2}>a$ , во которомь a>0.

Сначала ищемъ, канъ взять x, чтобы оба радикала были мъйстычейьны, иначе, чтобы нодкоренныя количества были положителены. Рассматривня  $x^2-x^2$  какъ неполный квадратный триномъ, замъчаемъ, что онъ будетъ положителенъ, если x взять между его корнями, т. е. если x со x со x со x со x со x со корнями, т. е. если x со x со

$$a > x > 0 \dots (3).$$

Зная это, перенесемъ первый членъ неравенства во вторую часть; найдемъ:  $\sqrt{2ax-x^2}>a-\sqrt{a^2-x^2}$ . Такъ какъ вторан часть положительна, какъ и перван, то, возведя въ квадратъ и не перемъняя смысла ћеравенства, получимъ тождественное данному неравенство:  $2ax>2a^2-2a\sqrt{a^2-x^2}$ , или, раздъливъ объ части на положительное комичество 2a и изолировавъ радикалъ:  $\sqrt{a^2-x^2}>a-x$ . По (3) x<a, слъд. a-x>0, а потому вторичное возвышение въ квадратъ дастъ:  $x^2-ax<0$ . По смыслу этого неравенства x должно заключаться между корнями первой части; слъд.

$$a>x>0$$
.

что не отличается отъ условія дійствительности.

525. ПРИМВРЪ III. — Ръшить перавенство  $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$  (1), въ которомь a и b положительны и a > b.

Пусть сначала x+b>0, т. е. x>-b. Изъ условія a>b слѣдуеть, что x+a>x+b, а потому и x+a>0. Обѣ части предложеннаго неравенства положительны, и потому, возвысивъ ихъ въ квадрать и сохранивъ смыслъ неравенства, получимъ тождественное съ даннымъ неравенство (по отнятіи 1 отъ объихъ частей):

$$\frac{2ax}{x^2+a^2} > \frac{2bx}{x^2+b^2} \cdot \cdot \cdot (2)$$

Изъ числа значеній x, большихъ — b, возьмень сперва положительныя; тогда сокращеніе на положит. количество 2x дасть:  $\frac{a}{x^2+a^2}>\frac{b}{x^2+b^2}$ , или, по освобожденіи отъ дробей,  $ax^2+ab^2>bx^2+a^2b$ , или  $x^2(a-b)>ab(a-b)$ . Сокративъ на положит. количество a-b, дадимъ этому неравенству видъ  $(x+\sqrt{ab})$   $(x-\sqrt{ab})>0$ , и какъ первый множитель >0, то необходимо, чтобы было

$$x > \sqrt{ab}$$
.

Разсмотримъ теперь величины x, содержащіяся между 0 и — b, отрицательныя; въ этомъ случав сокращеніе (2) на 2x дастъ:  $\frac{a}{x^2+a^2}<\frac{b}{x^2+b^2}$ , илк  $(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})<0$ , а какъ второй множитель <0, то необходимо, чтобы  $x>-\sqrt{ab}$ .

Ho a>b, откуда  $ab>b^a$  и  $\sqrt{ab}>b$ , а след.  $-\sqrt{ab}<-b$ ; такимъ образомъ условіе  $x>-\sqrt{ab}$  содержится въ условіи x>-b.

Пусть теперь x+b<0, или x<-b, т. е. x содержится между -b и  $-\infty$ . Дадимъ сначала x значенія между -b и -a, т. е. положимъ x>-a, откуда x+a>0; въ такомъ случав первая часть предложеннаго неравенства будетъ положительна, между тёмъ какъ вторая отрицательна, и потому неравенство (1) будетъ удовлетворено всёми значеніями x между -b и -a.

Давъ x значенія <-a, будемъ имъть x+a<0; а какъ и x+b<0, объ части даннаго неравенства будуть отрицательны, а потому возводя въ квадрать, должны измънить смыслъ неравенства; найдемъ

$$\frac{2ax}{a^2+x^2} < \frac{2bx}{x^2+b^2},$$

откуда, сокративъ на 2x < 0 и т. д., получимъ

$$(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})>0;$$

второй множитель для разсматриваемых в вначеній x отрицателенть, слёд. необходимо, чтобы и  $x+\sqrt{ab}<0$ , откуда

$$x < -\sqrt{ab};$$

такъ накъ это условіе удовлетворено само еобою, то неравенство (1) удовлетворено всёми отрицательными величинами x, меньшими — a.

Итакъ: предложенному перавенству удовлетворяють всё отрицательныя значенія x, и положительныя, большія  $\sqrt{ab}$ ; и стало быть неудовлетворяють только значенія x, содержащіяся между 0 и  $+\sqrt{ab}$ .

**526.** Примъръ IV.—Ръшить неравенство  $\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}} < a-1$ , гдт а данное дъйствительное количество.

Во-первыхъ  $\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}}$  долженъ быть дъйствительнымъ; а для этого надо, чтобы было (3x+a)(x-a)>0, т. е. чтобы x не содержалось между  $-\frac{a}{3}$  и a. Отсюда видно, что надо различать два случая: a<0 и a>0.

Если a<0, надо брать x такъ, чтобы было: x< a, или  $x>-\frac{a}{3}$ ; при a>0 должно брать: или x>a, или  $x<-\frac{a}{3}$ .

Но если a<0, то и a-1<0, и неравенство становится невозможными, ибо оно будеть требовать, чтобы положительное количество было меньше отрицательнаго.

Итакъ, необходимо должно положить a>0; затъмъ необходимо еще, чтобы было a>1; тогда объ части будутъ положительны, и возвысивъ ихъ въ квадратъ, сохранивъ смыслъ неравенства, получимъ тождественное ему

$$\frac{3x+a}{x-a}<(a-1)^2, \quad \text{MJH} \quad \frac{3x+a-(a-1)^2\;(x-a)}{x-a}<0;$$

а по умноженіи объихъ частей на  $(x-a)^2$ :

$$(x-a)[-(a^2-2a-2)x+(a^2-2a+2)a]<0,$$

что можно представить въ видъ

$$(a^2-2a-2)(x-a)(x-\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a)>0.$$

Во-первыхъ, должно быть a-1>0; во-вторыхъ, x можно давать только такія значенія, которыя: или  $<\!-\frac{a}{3}$ , или  $>\!a$ .

Разсмотримъ, каковъ будетъ знакъ коэффиціента  $a^2-2a-2$ ; корни этого тринома, какъ видно à priori, дъйствительные и неравные, одинъ положительный, другой отрицательный; замъняя въ триномъ a единицей, находимъ въ результатъ -3, сл. 1 находится между корнями, и слъд. положит. корень >1; вычисливъ его, находимъ  $a_1=1+\sqrt{3}$ . Мы можемъ давать a только значенія, большія единицы; но эти значенія могутъ быть или < или  $>1+\sqrt{3}$ .

Такимъ образомъ, различаемъ два случая:

Первый случай:  $1 < a < 1 + \sqrt{3}$ .

Такія значенія  $\alpha$  лежать между корнями тринома  $\alpha^2 - 2\alpha - 2$ , а потому онъ отрицателень; значить и произведеніе двухъ другихъ множителей д. б. отрицательнымъ, а потому величины  $\alpha$ , удовлетворяющія неравенству, должны лежать между

$$a \quad \mathbf{n} \quad + \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a;$$

нужно знать сравнительную величину этихъ пределовъ.

Но триномъ  $a^2-2a+2$ , имън корни мнимые, положителенъ при всякомъ a;  $a^2-2a-2$ , при взятыхъ значеніяхъ a, отрицателенъ; слъд.

 $a > \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a$ , и потому должно взять

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}$$
 ·  $a < x < a$ .

Съ другой стороны, для дъйствительности радикала, находящагося въ неравенствъ, x нужно брать или >a, или  $<-\frac{a}{3}$ . Поэтому сравнимъ предълы

$$-\frac{a}{3}$$
 N  $\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}$  · a,

допустивъ, напр., что

$$-\frac{a}{3} > \frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2} \cdot a.$$

Въ разсматриваемомъ случаъ: a>0 и  $a^2-2a-2<0$ ; слъд. умноживъ объ части на  $\frac{a^2-2a-2}{a}$  и перемънивъ смыслъ неравенства, найдемъ ему тождественное

 $-a^2+2a+2<3a^2-6a+6$ , или  $0<4a^2-8a+4$ , или  $0<(2a-2)^2$ , что върно; слъд. върно и допущение. Такимъ образомъ, необходимо и достаточно взять x такъ:

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2} \cdot a < x < -\frac{a}{3}$$

Второй случай.  $a > 1 + \sqrt{3}$ .

Множитель  $a^2-2a-2$  въ этомъ случай >0; сл. необходимо и достаточно, чтобы произведение двухъ другихъ множителей было положительно, слёд. x можетъ принимать всй значенія, не содержащіяся между a и  $\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}$ . a.

Для сравненія этихъ предёловъ, допустимъ, напр.:

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}$$
 ·  $a < a$ .

Такъ какъ въ изследуемомъ случат a и  $a^2-2a-2$  положительны, замъняемъ это неравенство ему тождественнымъ

$$a^2-2a+2 < a^2-2a-2$$
, where  $4 < 0$ ,

что невърно; и потому  $\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a>a;$  такъ что должно взять

**HIH** 
$$x < a$$
, **HIH**  $x > \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2}$ .  $a$ .

Комбинируя эти результаты съ предълами, найденными á priori, находимъ

$$x < -\frac{a}{3}$$
, where  $x > \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a$ .

Итакъ:

при а < 1 предложенное неравенство невозможно;

при  $1 < a < 1 + \sqrt{3}$  ему удовлетворяють:  $\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2}a < x < -\frac{a}{3};$  при  $a > 1 + \sqrt{3}$  ему удовлетворяють: или  $x < -\frac{a}{3}$ , или  $x > \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2}a.$ 

**527.** ПРИМВРЪ V. Ръшить неравенство  $\frac{\sqrt{3x-2a}}{x+a} > \frac{\sqrt{3x-a}}{x+5a}$ , гдт а дъйствительное количество.

Чтобы оба радикала были дъйствительны, нужно, чтобы было  $x>\frac{2}{3}$  а и  $x>\frac{a}{3};$  но одно изъ этихъ условій содержить въ себъ другое, а именно: при a<0 необходимо и достаточно, чтобы было  $x>\frac{a}{3};$ 

Первый случай: a < 0.

при a>0 необходимо и достаточно взять  $x>\frac{2}{3}a$ .

Нужно знать знаки объихъ частей, и для этого сдълать предположенія относительно знаковъ x + a и x + 5a.

1) x+a<0, тогда и подавно x+5a<0; объ части неравенства отрицательны, а потому, возвысивь объ части въ квадратъ, съ перемъною смысла неравенства, и уничтоживъ положительный знаменатель, получимъ:

 $(3x-2a)(x+5a)^2-(3x-a)(x+a)^2 < 0$ , или  $23ax^2+54a^2x-49a^3 < 0$ , или, сокративъ на a < 0:

$$23x^2 + 54ax - 49a^2 > 0.$$

Триномъ первой части, какъ видно à priori, имъетъ корни дъйств. неравные съ противоположными знаками; слъд. чтобы сдълать его >0, необходимо и достаточно дать x значенія, лежащія внъ корней. Корни его суть

$$x' = -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23}a, \qquad x'' = +\frac{\sqrt{1856} - 27}{23}a,$$

и какъ a < 0, то очевидно x' > x''.

Слъдовательно, должно взять

$$x < \frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a$$
, here  $x > -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23} a$ .

Но мы видѣли, что x должно быть  $> \frac{a}{3}$  и < -a. Подставляя въ триномъ (-a) и  $\frac{a}{3}$  вмѣсто x, убѣдимся, что эти величины расположены относительно корней x' и x'' такъ:

$$-\infty \cdot \cdot \cdot \frac{\sqrt{1856-27}}{23}a \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{a}{3} \cdot \cdot \cdot (-a) \cdot \cdot -\frac{\sqrt{1856+27}}{23}a \cdot \cdot +\infty$$

и слъд. невозможно удовлетворить неравенству, если

$$a < 0$$
 H  $x < -a$ .

- 2) a < x < -5a, т, е. x + a и x + 5a противоположны по знаку; первая часть неравенства > 0, вторая < 0; и какъ  $x > \frac{u}{3}$ , неравенство удовлетворено.
- 3) x+5a>0; и подавно x+a>0. Объ части неравенства положительны, потому, возвышая въ квадрать и сохраняя смыслъ неравенства, найдемъ:

$$23x^2 + 54ax - 49a^2 < 0$$

и слъд.

$$\frac{\sqrt{1856} - 27}{23} a < x < -\frac{\sqrt{1856} + 27}{23} a.$$

Кромъ того, должно быть: x>-5a и  $x>\frac{a}{3}$ , что приводится къ x>-5a; а какъ порядокъ величинъ таковъ:

$$-\infty \cdot \cdot \cdot \frac{\sqrt{1856}-27}{23}a \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{a}{3} \cdot \cdot -a \cdot \cdot -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a \cdot \cdot -5a \cdot \cdot +\infty$$

то очевидно, что неравенству удовлетворить жельзя.

Итакъ: когда а< 0, чтобы удовлетворить неравенству, надо взять

$$-a < x < -5a$$
.

Второй случай: a>0.

Чтобы радикалы были дъйствительны, надо чтобы было:  $x > \frac{2}{3}a$ . Слъд. будетъ: x + a > 0 и x + 5a > 0; а потому, возвысивъ въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства, находимъ тождественное данному неравенство (по сокращеніи на a > 0):

$$23x^2 + 54ax - 49a^2 > 0$$
;

откуда заключаемъ, что x нужно взять внъ интервалла корней. А какъ порядокъ величинъ въ данномъ случат таковъ:

$$-\infty \cdot \cdot \cdot -\frac{\sqrt{1856+27}}{23}a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{2}{3}a \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{\sqrt{1856-27}}{23}a \cdot \cdot \cdot + \infty,$$

то: когда a>0, необходимо и достаточно взять

$$x > \frac{\sqrt{1856 - 27}}{23} a.$$

528. Задачи.

Рѣшить неравенства:

- 1.  $x^2 13x + 40 > 0$ ;  $x^2 4x 140 > 0$ ;  $9x^2 12x + 2 < 0$ ;  $x^2 5x < 6000$ ;  $11x^2 + x 180 < 0$ ;  $x^2 3x 4 > 0$ ;  $x^2 12x + 37 > 0$ ;  $a^2 8a + 17 > 0$ ;  $3x^2 8x + 12 < 0$ ;  $x^2 < 10x 16$ ;  $6x^2 7x + 2 < 0$ ;  $12x^2 17x + 6 > 0$ ;  $8x^2 6x + 1 < 0$ ;  $4x^2 + 5x 19 < 0$ ;  $x^2 + 2x + 1 < 0$ ;  $5x^2 + x + 3 > 0$ .  $(x + 1)^3 < 3(x 1)^2$ ;  $38x 7 15x^2 < 0$ ; 29 11x > -x(1 + x).
- 2. Рашить совмастныя неравенства:
  - a)  $x^2 7x + 6 > 0$ ,  $x^2 15x + 56 < 0$ .
  - b)  $x^2 7x + 6 > 0$   $x^2 13x + 30 < 0$ .

c) 
$$x^2 - 7x + 6 < 0$$
,  $x^2 - 13x + 30 < 0$ .

d) 
$$x^2-7x+6>0$$
,  $x^2-13x+30>0$ .

e) 
$$x^2 - 7x + 6 < 0$$
,  $x^2 - 25x + 150 < 0$ .

3. 
$$(a^2+3a+3)(x^2+x)+a^2<0$$
.

4. 
$$3ax^2 - 3b^2x + b^3 - a^3 < 0$$
.

5. 
$$x(x-1)-p(p-1)-q(q-1)+2pq>0$$
.

6. 
$$(2a-b)x^2+bx(2b^2-5a)+2ab^2>0$$
.

7. 
$$(2-3ab) x^2 + 3bx (1-ab) - 3b - 2b^3 < 0$$
.

8. 
$$a(a-1)(x-b)^2 + a'(a'+1)x^2 - 2aa'x(x-b) > 0$$
.

9. 
$$(a-b)(a-10b)x^2-2(a^2-b^2)x+a^2+11ab-2b^2<0$$
.

10. 
$$(m-n)x^2-2(m+n)x+m-n>0$$
.

11. 
$$(m^2 + n^2 - mn)x^2 - 2(m^2 + n^2)x + (m^2 + mn + n^2) > 0$$
.

12. 
$$x^3+1>x^2+x$$
.

14. 
$$2(2x^4+3x^2+1) < 3(x+x^3)$$
.

13. 
$$x(x^2-4)+x-2<0$$
.

15. 
$$2(2x^4+3x^2+1)>3(2x^3+x)$$
.

16. 
$$\frac{x^2-1}{a-1}-\frac{3x}{5}<\frac{x^2}{2a-2}$$

17. 
$$\frac{x^2}{a^2-2a-3}+\frac{x-a}{a+1}<\frac{2x+a}{a-3}$$

Изследовать вории следующихъ уравненій при измененіи  $\lambda$  отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ :

18. 
$$(2\lambda + 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x - (\lambda - 2) = 0$$
.

19. 
$$(3\lambda - 1)x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda = 0$$
.

20. 
$$(\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda + 1)(2x - 1) = 0$$
.

21. 
$$(\lambda - 2)x^2 + (\lambda - 3)x + (\lambda - 4) = 0$$
.

22. 
$$(\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda + 1)x + 2ac = 0$$
.

23. 
$$(\lambda^2 + 3\lambda + 7)x^2 + (\lambda - 1)x - 15 = 0$$
.

24. 
$$\lambda x^2 - (2\lambda + 1)x + 3\lambda - 1 = 0$$
.

25. Вывести условіе д'яйствительности корней ур-нія

$$(3\lambda + 1)x^2 - (4\lambda + 1)x + 12\lambda = 0$$

и определить пределы х для того, чтобы оба кория были больше 2.

- 26. Что нужно, чтобы кории уравненія  $ax^2 + bx + c 2a = 0$ , предполагая, что они дійствительны, были оба больше 2?
- 27. Рѣшить ур-ніе  $\frac{ax}{x-a}+x=b$  и изслѣдовать его корни. Что нужно, чтобы оба корня были больше 10a?

Изследовать корни следующих ур-ній при измененін  $\lambda$  оть —  $\infty$  до  $+\infty$ .

28. 
$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 3(\lambda - 3) = 0$$
.

29. 
$$x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$$
.

30. 
$$\lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$$
.

31. Опредѣлыть предѣлы для h, подъ условіемъ, чтобы для всякаго дѣйствительнаго x удовлетворялось неравенство

$$x^2+2hx+h>\frac{3}{16}$$
.

Решить следующія дробныя неравенства:

32. 
$$x + \frac{1}{x} > 1$$
. 33.  $\frac{ax - 4b}{2bx + 3a} > 5$ .

34. 
$$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-7x+12}<\frac{1}{x^2-4x+3}$$

35. 
$$\frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+15} < 2$$
. 36.  $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+12} > 0$ .

37. 
$$\frac{x^2-1}{5x^2+4x} < 0.$$
 38.  $3+\frac{1}{x-1} > \frac{1}{2x+1}$ 

39. 
$$\frac{2x-25}{2x^2+4x-6}+\frac{2x+11}{2x^2-2}>\frac{1}{x+3}$$

40. 
$$\frac{5x^2+3x}{8x-5} > 10.$$
 41.  $\frac{x^2-7x+12}{x^2+5x+6} < 3.$ 

42. 
$$\frac{x^3-12x+35}{(x+3)(x^3+5x+4)} > 0.$$
 43.  $\frac{5x^3-2x+3}{(x-1)(x^2-x+1)} < 0.$ 

44. Рѣшить неравенство 
$$\frac{(x-a)(x-c)}{(x-b)(x-d)} < 0$$
, полагая, что  $a < b < c < d$ .

45. 
$$\frac{(x-1)(x-3)^2(x^2+1)}{(x+5)(x^2+x+3)(x-4)} > 0$$
. 46.  $\frac{x^2+3}{x^2-4} > \frac{2(x-1)}{x^2(x^2-4)}$ .

Решить ирраціональныя неравенства:

47. 
$$\frac{(x^2-5x+6)(\sqrt{x-2})}{x^2+4x+3} > 0.$$
 48.  $\sqrt{\frac{2x^2-3}{2}} > x+5.$ 

49. 
$$x^2 < 2a\sqrt{2x^2-a^2}$$
, notatas  $a > 0$ .

50. 
$$4(a^2-x^2)-a\sqrt{a^2-x^2}-2a^2>0$$
.

51. 
$$\sqrt{a^2+5ax+4x^2} < 2x+3a$$
.

52. 
$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} < \sqrt{2}$$
.

53. 
$$\sqrt{a+\frac{1}{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{a}}-2\sqrt{2}>0.$$

54. 
$$\frac{\sqrt{a^4+2x^4}}{3a-x} < 3a+x$$
. 55.  $\sqrt{\frac{6x-5a}{x+2a}} > 2a+1$ .

$$56. \quad \frac{\sqrt{x-a}}{x+a} < \frac{\sqrt{x+a}}{x-2a}.$$

#### ГЛАВА ХХХІУ.

Раціональныя уравненія, приводимыя въ квадратнымъ. — Биквадратное ур-ніе; изслъдованіс его корней. — Разложеніе биквадратнаго тринома на множители первой и второй степени. —Преобразованіе сложныхъ радикаловъ:  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ ,  $\sqrt[4]{A} + \sqrt{B}$  ит.п.

529. Ръшение бинвадратнаго уравнения. — Уравнение четвертой степени называется бинвадратными, когда оно содержити только четныя степени неизвистнаго. Спъдовательно, общая форма его есть

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$
 . . . . (1).

Его ръшение приводится къ ръшению квадратнаго уравнения. Въ самомъ дълъ, примемъ за неизвестное  $x^2$ , положивъ

$$x^2 = y \dots (2)$$
.

Ур-ніе (1) приметъ видъ

$$ay^2 + by + c = 0 \dots (3)$$
.

Ръшивъ его, найдемъ два корня

$$y' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad y'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Подставляя въ ур-ніе (2) вмъсто y сначала y', потомъ y'', находимъ

$$x^2=y', \qquad x^2=y''$$
 отнуда  $x=\pm\sqrt{y'}, \qquad x=\pm\sqrt{y''},$  или  $x=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}, \qquad x=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ 

Итакъ, биквадратное ур-ніе имъетъ четыре кория, попарно равные и противоположные по знаку.

530. Изслѣдованіе корней. Мы знаемъ, что корни уравненія  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  суть корни уравненія

$$x^2 = y$$
,

въ которомъ у означаетъ одинъ изъ корней уравненія

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Слъдоватенльо: всякому дъйствительному и положительному значенію у соотвътствують два дъйствительныя значенія х, равныя по величинь и противоположныя по знаку; каждому дъйствительному и отрицательному значенію у сооовътствують два значенія х мнимыя сопряженныя; наконець, каждое мнимое значеніе у даеть два мнимыя значенія для х.

Итакъ, приходимъ къ следующему изследованію:

I.  $b^2-4ac>0$ . Корни ур-нія  $ay^2+by+c=0$  дъйствительные неравные: одного знака, если ихъ произведеніе  $\frac{c}{a}$  положительно, и съ противоположными знаками, если  $\frac{c}{a}$  отрицательно.

Въ первомъ случат  $\left(\frac{c}{a}>0\right)$ , оба кория положительны, если ихъ сумма  $-\frac{b}{a}$  положительна, и отрицательны, если  $-\frac{b}{a}$  отрицательно. Если оба значенія y положительны, вст четыре значенія x дъйствительны; если оба значенія y отрицательны, вст четыре значенія x миимы. Во второмъ случат  $\left(\frac{c}{a}<0\right)$  два значенія y противоположны по знаку, поэтому два значенія x дъйствительны, два другія миимы.

II.  $b^2-4ac=0$ . Корни уравненія  $ay^2+by+c=0$ — дъйствительные равные: ихъ общая величина  $=-\frac{b}{2a}$ .

След. биквадратное ур. имееть четыре корня попарно равные:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}};$$

они дъйствительны, если  $\frac{b}{a} < 0$ , и мнимы, если  $\frac{b}{a} > 0$ .

III.  $b^2-4ac<0$ . Корни ур-нія  $ay^2+by+c=0$ — мнимые, слёд. и всё четыре корня биквадратнаго ур-нія мнимые, ибо квадратный корень изъ p+qi есть мнимое выраженіе того же вида.

Результаты этого изследованія можно резюмировать въ виде следующей таблицы:

$$b^2-4ac>0$$
  $\left\{egin{array}{c} \dfrac{b}{a}<0\ . & . & . & . & 4$  корня дѣйствительные, попарно равные и противоположные по знаку.  $\dfrac{b}{a}>0\ . & . & . & . & . & . & 4$  корня мнимые.  $\dfrac{c}{a}<0\ . & . & . & . & . & 2$  корня дѣйствительные, равные и противоположные по знаку;  $2$  корня мнимые.  $\dfrac{b}{a}<0\ . & . & . & . & . & . & 4$  корня дѣйствительные, попарно равные  $\dfrac{b}{a}>0\ . & . & . & . & . & . & 4$  корня мнимые.

Примъчаніе. Отсюда видно, что нужны три условія для того, чтобы всъ четыре корня биквадратнаго ур-нія были дъйствительны; именно:

$$b^2 - 4ac \ge 0$$
,  $\frac{c}{a} > 0$ ,  $\frac{b}{a} < 0$ ;

и одно условів, чтобы два корня были действительны, а два инимы; именно:

$$\frac{c}{a} < 0$$
.

531. Примъры. — І. Ръшить урасненіе  $64x^4 - 244x^2 + 225 = 0$ .

Положивъ  $x^2 = y$ , находимъ квадратное ур-ніе

$$64y^2 - 244y + 225 = 0$$
;

въ немъ:  $b'^2 - ac = 122^2 - 64 \times 225 = 484 > 0;$   $\frac{225}{64} > 0;$   $-\frac{244}{64} < 0;$ 

слъд. оба значенія y — дъйствительныя, неравныя и положительныя, а потому биквадратное ур-ніе имъеть всъ четыре корня дъйствительные. Находимъ:

$$y = \frac{122 \pm \sqrt{122^2 - 64 \times 225}}{64} = \frac{122 \pm 22}{64};$$
  
 $y' = \frac{9}{4}, y'' = \frac{25}{16};$ 

откуда:

$$x^{I} = +\frac{3}{2}$$
,  $x^{II} = -\frac{3}{2}$ ,  $x^{III} = +\frac{5}{4}$ ,  $x^{IV} = -\frac{5}{4}$ .

II. — Promume ypasnenie  $5x^4 + 12x^2 + 4 = 0$ .

Положивъ  $x^2 = y$ , находимъ ур-ніе  $5y^2 + 12y + 4 = 0$ ; въ немъ  $b'^2 - ac = 36 - 5 \times 4 = 16 > 0$ ;  $\frac{c}{a} = \frac{4}{5} > 0$ ;  $\frac{b}{a} = \frac{12}{5} > 0$ . Слъд. корни его дъйствительные, неравные, оба отрицательные; а потому данное ур. имъетъ всъ четыре корня мнимые. Находимъ

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{5} = \frac{-6 \pm 4}{5};$$
$$y' = -\frac{2}{5}, \quad y'' = -2.$$

Саъд. 
$$x^{\text{I}} = +\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot i$$
,  $x^{\text{II}} = -\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot i$ ,  $x^{\text{III}} = +\sqrt{2}.i$ ,  $x^{\text{IV}} = -\sqrt{2}.i$ .

III. — Primums yp-nie  $3x^4 - 26x^2 - 3 = 0$ .

Положивъ  $x^2 = y$ , находимъ ур-ніе  $3y^2 - 26y - 9 = 0$ . Въ немъ:  $b'^2 - ac$   $= 13^2 + 3$ . 9 = 169 + 27 = 196 > 0;  $\frac{c}{a} = -3 < 0$ ;  $\frac{b}{a} = -\frac{26}{3} < 0$ ; слёд. оно имѣетъ корни дъйствительные неравные, съ противоположными знаками, а потому предложенное ур-ніе имѣетъ два дъйствительных корня и два мнимых».

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{196}}{3} = \frac{13 \pm 14}{3}$$
;

откуда

$$y'=+9; y''=-\frac{1}{3};$$

слъд. 
$$x^1 = +3; x^{11} = -3; x^{111} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot i; x^{1V} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot i.$$

IV. — Ръшить уравнение  $x^4 - 10x^2 + 61 = 0$ .

Положивъ  $x^2=y$ , получинъ ур-ніе  $y^2-10y+61=0$ , въ которомъ  $b'^2-ac=25-61=-36$ ; слъд. оба значенія y мнимы, и потому данное ур-ніе имъетъ четыре мнимых корня. Находимъ

$$y'=5+12i$$
 ,  $y''=5-12i$ .  
 $x=\pm\sqrt{5\pm12}i$  .

Слъц.

Преобразовавъ это выражение по способу § 440, найдемъ:

$$x^{1}=3+2i$$
,  $x^{11}=3-2i$ ,  $x^{111}=-3-2i$ ,  $x^{1V}=-3+2i$ .

 $V. - P_{nuumb}$  ypasnenie  $x^4 - 10x^2 + 28 = 0$ .

Положивъ  $x^2 = y$ , имъемъ ур-ніе  $y^2 - 10y + 28 = 0$ , въ которомъ  $b'^2 - ac = 25 - 28 = -3 < 0$ ; слъд. корни его мнимые, именно

$$y=5\pm\sqrt{3}$$
. i.

Сабд, четыре мниные кория предложеннаго заключаются въ формулъ

$$x=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{3}}$$
. i.

Примъняя въ ней преобразованіе, указанное въ § 440, найдемъ:

$$\pm\sqrt{5\pm\sqrt{3} \cdot i} = \pm\left[\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}}\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}}\cdot i\right].$$

Такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x^{\text{I}} &= \sqrt{\frac{2\sqrt{7} + 5}{2}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{7} - 5}{2}} \times i \; ; \; \; x^{\text{II}} &= -\sqrt{\frac{2\sqrt{7} + 5}{2}} - \sqrt{\frac{2\sqrt{7} - 5}{2}} \times i; \\ x^{\text{III}} &= \sqrt{\frac{2\sqrt{7} + 5}{2}} - \sqrt{\frac{2\sqrt{7} - 5}{2}} \times i \; ; \; \; x^{\text{IV}} &= -\sqrt{\frac{2\sqrt{7} + 5}{2}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{7} - 5}{2}} \times i. \end{aligned}$$

**532.** Приложеніе. — Доказать, что уравненіе  $\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4$  имъеть всь четыре кория дъйствительные, каковы бы ни были дъйствительныя количества a u b.

Помноживъ объ части на  $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$ , дадимъ уравненію цълый видъ  $x^2(x^2-b^2)+x^2(x^2-a^2)-4(x^2-a^2)(x^2-b^2)=0$ .

Положивъ  $x^2 = y$ , получаемъ квадратное относительно у ур.

$$y(y-b^2)+y(y-a^2)-4(y-a^2)(y-b^2)=0.$$

Подставияя въ первую часть вийсто y сперва  $a^2$ , потомъ  $b^2$ , замичаемъ, что результы этихъ подстанововъ:  $a^2(a^2-b^2)$  и  $b^2(b^2-a^2)$  имикотъ противоположные знаки; след. корни относительно y—действительные и неравные, и одинъ изъ нихъ содержится между  $a^2$  и  $b^2$ . Далие: коэффиціентъ при  $y^2$  отрицателенъ (— 2); подстановна-же 0 на-мисто y даетъ —  $4a^2b^2$ ; след. О находится внё корней, и след. меньше обоихъ корней, ибо мы уже знаемъ, что одинъ изъ корней положителенъ. Итакъ, оба корня: y' и y'' действительны и положительны, каковы бы ни были a и b, а след. всё четыре корня даннаго ур-нія действительны.

Къ этому заключению можно придти и иначе. Ур-ніе относительно у приводится къ виду:

$$2y^2 - 3(a^2 + b^2)y + 4a^2b^2 = 0.$$

Подрадинальное количество формулы корней есть

$$9(a^2+b^2)^2-32a^2b^2$$
, или  $9a^4-14a^2b^2+9b^4$ .

Но этотъ квадратный относительно  $a^2$  триномъ имъетъ корни мнимые, ибо  $49b^4 - 81b^4 < 0$ , слъд, при всякихъ a и b знакъ его одинаковъ съ знакомъ 9,

т. е. положителенъ. Поэтому оба значенія y дъйствительны. Ихъ произведеніе  $2a^2b^2$  показываетъ, что они одного знака, а сумма ихъ  $\frac{3}{2}(a^2+b^2)$  показываетъ, что оба они положительны. Слъд. четыре корня предложеннаго ур-нія всегда дъйствительны.

533. Теорема. — Сумма корней биквадратнаго ур-нія равна нулю, произведеніе их равно  $\frac{v}{a}$ , а сумма квадратов их равна  $-\frac{2b}{a}$ .

Въ самомъ дълъ, четыре корня  $x^{\rm I}$ ,  $x^{\rm II}$ ,  $x^{\rm III}$ ,  $x^{\rm IV}$  попарно равны и противоположны по знаку, слъд. сумма ихъ = 0. — Во вторыхъ,  $(+\sqrt{y'})^2 + (-\sqrt{y'})^2 + (-\sqrt{y'})^2 + (-\sqrt{y'})^2 = 2(y'+y'')$ ; но y'+y'', какъ сумма корней квадр. ур-нія  $ay^2 + by + c = 0$ , равна  $-\frac{b}{a}$ , слъд. сумма квадратовъ корней даннаго ур-нія  $= -\frac{2b}{a}$ . Наконецъ, произведеніе  $(+\sqrt{y'})(-\sqrt{y'})(+\sqrt{y'})(-\sqrt{y''}) = y'y''$   $= \frac{c}{a}$ .

534. Разложеніе биквадратнаго тринома  $ax^4 + bx^2 + c$  на множители первой степени.

Триномъ  $ax^4 + bx^2 + c$ , обращаясь въ ноль при каждомъ изъ четырехъ своихъ корней  $x^1$ ,  $x^{11}$ ,  $x^{11}$ ,  $x^{1V}$ , дёдится на каждый изъ биномовъ  $x - x^1$ ,  $x - x^{11}$ ,  $x - x^{1V}$ , а потому и на ихъ произведеніе; такъ какъ дёлимое и дёлитель — одинаковой степени относительно x, то частное будетъ нулевой степени, и потому приводится къ частному отъ раздёленія высшаго члена  $ax^4$  дёлимаго на высшій членъ  $x^4$  дёлителя. Итакъ:

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x^1)(x - x^{11})(x - x^{111})(x - x^{111}).$$

 $\Pi$  Р и м в Р ы. — I. Разложить трином  $5x^4 - 50x^2 + 45$ .

Корни его суть: ±3, ±1; след.

$$5x^4 - 50x^2 + 45 = 5(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)$$
.

II. Разложить трином  $2x^4 + 7x^2 + 6$ .

Rорни его суть:  $\pm \sqrt{2}$ . i,  $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ . i. Ситяд.

$$2x^{4} + 7x^{2} + 6 = 2(x - \sqrt{2}. i)(x + \sqrt{2}. i)(x - \sqrt{\frac{3}{2}}. i)(x + \sqrt{\frac{3}{2}}. i).$$

III. Разложить трином  $-x^4 + 10x^2 - 169$ .

Корни его суть:  $3 \pm 2i$ ,  $-3 \pm 2i$ . Слъд.

$$-x^4+10x^2-169=-(x-3-2i)(x-3+2i)(x+3-2i)(x+3+2i).$$

535. Разложеніе биквадратнаго тринома съ дъйствительными коэффиціентами на дъйствительные ивадратные множители.

Пусть триномъ  $ax^4 + bx^2 + c$  имѣетъ корни  $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta;$  въ такомъ случаѣ его можно представить подъ видами:

$$ax^{4} + bx^{2} + c = a[(x - \alpha)(x + \alpha)][(x - \beta)(x + \beta)].$$
 (1)

$$= a[(x-\alpha)(x-\beta)][(x+\alpha)(x+\beta)] . . . . . (2)$$

$$=a[(x-\alpha)(x+\beta)][(x+\alpha)(x-\beta)]. \dots (3)$$

Когда четыре корня  $\alpha, --\alpha, \beta, --\beta$  дъйствительны, всъ три разложенія дадуть дъйствительные квадратные множители.

Если два изъ этихъ корней мнимы, то квадратные множители будутъ дъйствительны только въ одномъ изъ этихъ разложеній, именно въ томъ, гдѣ соединены два сопряженные корня для составленія одного и того же множителя.

Наконецъ, если четыре корня мнимы, то опять существуетъ только одно разложение на дъйствительные квадратные множители, то именно, въ которомъ каждый изъ квадратныхъ множителей происходитъ отъ сочетания сопряженныхъ корней. Отсюда

Теорема. — Биквадратный трином съ дъйствительными коэффиціентами всегда можно разложить, по крайней мъръ, одним способом, на произведеніе дъйствительных квадратных множителей.

Чтобы получить это разложеніе, нужно вычислить корни тринома; это вычисленіе усложняєтся вспомогательнымъ вычисленіемъ въ томъ случать, когда встиетыре корни мнимы, т. е. когда  $b^2-4ac<0$ . Въ этомъ последнемъ случать значительно быстрее найдемъ требуемое разложеніе следующимъ пріемомъ. Пусть имбемъ триномъ

$$y = a\left(x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right),$$

въ которомъ предполагается  $b^2-4ac<0$ . Разсматривая  $x^4$  и  $\frac{c}{a}$  какъ крайніе члены квадрата, дополнимъ его, прибавляя и вычитая  $2x^2\sqrt{\frac{c}{a}}$ ; найдемъ

$$y = a \left[ \left( x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^2 - \left( 2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a} \right) x^2 \right].$$

Но накъ  $b^2-4ac<0$ , то 4ac>0, сябд. и  $\frac{c}{a}>0$ , а потому  $\sqrt{\frac{c}{a}}-\kappa o$ -личество дъйствительное. Далье, раздъливъ объ части неравенства  $b^2-4ac<0$  на положительное  $a^2$ , находимъ

$$4\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2} > 0$$
, where  $(2\sqrt{\frac{c}{a}} + \frac{b}{a})(2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}) > 0$ .

Но оба эти множителя не могуть быть отрицательными, ибо ихъ сумма, равная  $4\sqrt{\frac{c}{a}}$ , положительна, слъд. оба они положительны, и потому

$$2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a} > 0.$$

Итакъ, триномъ можно представить въ ведё произведенія двухъ действительныхъ факторовъ:

$$y = a \left[ x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} + x \sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}} \right] x^2 + \sqrt{\frac{c}{a}} - x \sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{a}} \right].$$

II римъръ. Pазложить на два дъйствительные множителя триномъ  $y=x^4-10x^2+28$ .

Имъемъ:

$$y = (x^{2} + 2\sqrt{7})^{2} - (4\sqrt{7} + 10)x^{2}$$
  
=  $(x^{2} + x\sqrt{4\sqrt{7} + 10} + 2\sqrt{7})(x^{2} - x\sqrt{4\sqrt{7} + 10} + 2\sqrt{7}).$ 

536. Преобразованіе сложнаго радинала  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ . — Корни биквадратнаго ур-нія выражаются формулою вида  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ ; и когда В не есть точный квадрать, т. е.  $\sqrt{B}$  несоизмѣримъ, формула эта весьма невыгодна для приближеннаго вычисленія. Попытаемся, если окажется возможно, замѣнить выраженіе этого вида другимъ, которое не содержало бы извлеченія корня изъ несоизмѣримаго числа. Но предварительно докажемъ слѣдующую лемму.

537, Лемма. — Eсли a, b, a' и b' суть числа соизмъримыя, а  $\sqrt{b}$  и  $\sqrt{b'}$  несоизмъримы, то равенство

возможно только тогда, когда a = a' и b = b'.

Въ самомъ дъдъ, изъ равенства  $a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'}$  выводимъ

$$\sqrt{b'} = (a - a') + \sqrt{b}$$
,

или, возвышая объ части въ квадратъ:

$$b' = (a - a')^2 + 2(a - a')\sqrt{b} + b,$$
  
 $(b' - b) - (a - a')^2 = 2(a - a')\sqrt{b}.$ 

или

Допуская, что  $\alpha$  не равно  $\alpha'$ , мы нашли бы отсюда нелѣпый выводъ

$$\sqrt{b} = \frac{(b'-b)-(a-a')^{9}}{2(a-a')}$$
,

т. е. что несоизмъримое число равно соизмъримому. И такъ a=a', а тогда изъ (1) слъдуетъ, что и b=b'.

Зная это, попытаемся найти такія два соизмѣримыя числа x и y, которыя удовлетворяли бы равенству

гдъ A и B положительныя соизмъримыя числа, а  $\sqrt{B}$  несоизмъримъ. Возвысивъ объ части въ квадратъ, найдемъ

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} \cdot \dots \cdot (2)$$

 $\sqrt{xy}$  долженъ быть несоизмѣримъ; въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное и написавъ ур-ніе (2) въ видѣ

$$\sqrt{B} = x + y - A + 2\sqrt{xy}$$

нашли бы, что несоизмъримое число равно соизмъримому. Примъняя къ ур-нію (2) предыдущую лемму, находимъ:

$$x+y=A \pi xy=\frac{B}{4};$$

и это — единственно возможное условіе существованія равенства (2) при x и y

соизмѣримыхъ. Послѣднія уравненія показываютъ, что x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$u^2 - Au + \frac{B}{4} = 0$$

откуда

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}, \dots (3)$$

Видимъ, что преобразованіе  $\sqrt{A+\sqrt{B}}$  въ выраженіе  $\sqrt{x+\sqrt{y}}$ , гдё x и y были бы соизмёрниы, возможно только тогда, когда  $A^2-B$  есть точный квадрать; дёйствительно, въ этомъ случав, положивъ  $A^2-B=K^2$ , гдё K— соизмёрнио, имѣемъ:

$$x = \frac{A + K}{2} \quad \text{if} \quad y = \frac{A - K}{2}.$$

И такъ, если это условіє выполнено, искомоє преобразованіе возможно и выражается тождествомъ

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$
,

и это — единственно возможная форма преобразованія въ разсматриваемомъ случать, ибо ур-ніе (2) распалось на два ур-нія съ 2 неизвъстными, вслъдствіе чего и получились опредъленныя ръшенія для х и у.

Желая подобнымъ же образомъ преобразовать  $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ , не можемъ положить  $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ , ибо это повело бы къ нелѣпому слѣдствію:

$$-\sqrt{B} = 2\sqrt{xy}$$
;

но можно положить равенство

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

откуда, подобно предыдущему, найдемъ:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Но если бы мы искали два количества x и y, удовлетворяющія ур-нію

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$
,

не дълая ограниченія относительно соизмъримости x и y, то задача, очевидно, была бы неопредъленна. Возвышая объ части въ квадратъ, мы нашли бы уравненіе

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$$

которому можно удовлетворить, полагая

$$x+y=A, xy=\frac{B}{4},$$

откуда нашли бы прежнюю форму преобразованія

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$
, . . . . (1)

но можно бы было удовлетворить ур-нію u иначе; что дало бы *другія* значенія для x и y; рѣшеніе (1) было бы однимъ изъ безчисленнаго множества рѣшеній неопредѣленнаго ур-нія  $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ .

**538**. *Примъчаніе*. — Опредъляя x и y, удовлетворяющія ур-нію

мы должны были возвысить это ур. въ квадратъ и решать ур-ніе

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy}$$
. . . . . . . . . . (2)

Но ур-ніе (2) могло бы получиться и изъ ур-нія  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = -\sqrt{x} - \sqrt{y}$ ; такъ-что нужно удостовъриться, что найденныя значенія для x и y дъйствительно удовлетворяють преобразованію  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

И въ самомъ дълъ преобразованіе  $\sqrt{A+\sqrt{B}}=-\sqrt{x}-\sqrt{y}$  не можетъ имътъ мъста при дъйствительныхъ x и y; слъд. система (3) § 537 въ самомъ дълъ отвъчаетъ искомому преобразованію.

 $\Pi$ РИМВРЫ. — I. Преобразовать  $\sqrt{6\pm\sqrt{11}}$ .

Здёсь A = 6, B = 11; слёд.  $A^2 - B = 25 = 5^2$ ; а потому

$$\sqrt{6+\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6+5}{2}} + \sqrt{\frac{6-5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{11} + 1).$$

$$\sqrt{6-\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{11} - 1).$$

II. Преобразовать  $\sqrt{17\pm2\sqrt{70}}$ .

Въ данномъ случат: A = 17; подводя 2 подъ знакъ корня, имтемъ  $2\sqrt{70} = \sqrt{4.70} = \sqrt{280}$ , слъд. B = 280;  $A^2 - B = 17^2 - 280 = 9 = 3^2$ . Такимъ образомъ:

$$\sqrt{17+2\sqrt{70}} = \sqrt{\frac{17+3}{2}} + \sqrt{\frac{17-3}{2}} = \sqrt{10} + \sqrt{7}; \text{ II}$$

$$\sqrt{17-2\sqrt{70}} = \sqrt{10} - \sqrt{7}.$$

III. Преобразовать 
$$\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4m^4}}{2}}$$
.

 $\Theta$ то выраженіе можно представить въ видъ  $\sqrt{rac{a^2}{2}\pm\sqrt{rac{a^4}{4}-m^4}}$ .

Здёсь 
$$A = \frac{a^2}{2}$$
,  $B = \frac{a^4}{4} - m^4$ ;  $A^2 - B = \frac{a^4}{4} - \left(\frac{a^4}{4} - m^4\right) = m^4$ ; слёд.

$$\sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4m^4}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} + m^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} - m^2}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{a^2 + 2m^2} \pm \sqrt{a^2 - 2m^2} \right].$$

539. Приложенія. — І. Опредълить условія, которымь должны удовлетворять коэффиціенты биквадратнаго уравненія  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , для того
чтобы его корни можно было выразить въ видъ алгебраической суммы двухъ
простыхъ радикаловъ.

Корни биквадратнаго ур-нія можно представить въ вид'в

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}};$$

сябд. 
$$A = -\frac{b}{2a}$$
,  $B = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ , и сябд.  $A^2 - B = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$ .

Заключаемъ, что когда  $\frac{c}{a}$  есть точный квадратъ, преобразованіе возможно, и получается формула

$$x = \pm \left[ \sqrt{-\frac{b}{4a} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}} \pm \sqrt{-\frac{b}{4a} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}} \right]$$

Пусть, нанр., дало ур-ніе  $18x^4-45x^2+2=0$ . Здёсь  $\frac{c}{a}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$ ; указанное условіе им'єсть м'єсто, и слёд. корни можно представить въ вид'є

$$x = \pm \left[ \sqrt{\frac{45}{72} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{9}} \pm \sqrt{\frac{45}{72} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{9}} \right] = \pm \left[ \sqrt{\frac{45}{72} + \frac{1}{6}} \pm \sqrt{\frac{45}{72} - \frac{1}{6}} \right]$$
$$= \pm \frac{\sqrt{57} \pm \sqrt{33}}{6\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{12} \left( \sqrt{57} \pm \sqrt{33} \right).$$

Еще примъръ. Въ уравненіи  $ay^4 + 2(a-2b)y^2 + a = 0$  отношеніе 3-го козофицієнта къ 1-му, равное  $\frac{a}{a}$  или 1, есть точный квадратъ, и слъд. корни можно преобразовать въ сумму простыхъ радикаловъ; преобразованіе дастъ

$$y = \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{b-a}$$
.

II. Въ геометріи доказывается, что если  $\alpha$  означаетъ сторону правильнаго, вписаннаго въ кругъ радіуса R, многоугольника, а b — сторону прав. вписмногоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ, то

$$b = \sqrt{2R^2 - \sqrt{R^2(4R^2 - a^2)}}$$
.

Это выраженіе можно превратить въ сумму простыхъ радикаловъ; въ самомъ дълъ,  $A = 2R^2$ ,  $B = R^2(4R^2 - a^2)$ , слъд.  $A^2 - B = a^2R^2$ , и потому

$$b = \sqrt{\frac{2R^2 + aR}{2}} - \sqrt{\frac{2R^2 - aR}{2}} = \sqrt{R(R + \frac{a}{2})} - \sqrt{R(R - \frac{a}{2})}.$$

Пусть, напр., a = R; первый многоугольникъ будетъ правильный шестиугольникъ, второй — правильный двенадцатиугольникъ; получимъ

$$b = R\sqrt{\frac{3}{2}} - R\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$$

**540.** Въ заключение этой главы ръшимъ еще два вопроса, относящиеся къ преобразованию квадратнаго и биквадратнаго корней.

ПЕРВЫЙ ВОПРОСЪ. — Представить выражение

$$U = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

въ видъ произведенія двухъ сомножителей вида  $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ . — Доказать, что

преобразование возможно только при условіи, коїда  $a^2d = bc$ , и что оно выгодно только тоїда, коїда  $a^2 - b$  и  $a^2 - c$  суть точные квадраты.

Въ самомъ дълъ, равенство

$$\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{u}+\sqrt{v}),$$

по возвышения въ квадратъ, даетъ

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=(x+y+2\sqrt{xy})(u+v+2\sqrt{uv}).$$

Этому ур-нію удовлетворимь, положивь

$$a = (x+y)(u+v);$$
  $b = 4(x+y)^2uv;$   $c = 4(u+v)^2xy;$   $d = 16xyuv.$ 

Эти ур-нія, какъ легко видѣть, несовмѣстны, если не имѣется соотношенія  $a^2d = bc$ . Когда это условіе удовлетворено, система неопредѣленна. Эта неопредѣленность объясняется при помощи тождества

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{u} + \sqrt{v}) = (\sqrt{\lambda x} + \sqrt{\lambda y})(\sqrt{\frac{u}{\lambda}} + \sqrt{\frac{v}{\lambda}}),$$

имъющаго мъсто при всякомъ  $\lambda$ ; этимъ доказывается, что разложеніе можетъ быть произведено безчисленнымъ количествомъ способовъ. Неопредъленность эта даетъ возможность допустить между двумя количествами произвольное соотношеніе. Положимъ, напр., x + y = 1. Тогда первыя два ур-нія обратятся въ

$$u+v=a, \qquad uv=\frac{b}{4},$$

откуда

$$u = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}; \qquad v = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}.$$

Внося эти величины въ третье, имѣемъ xy; зная, кромѣ того, что x+y=1, найдемъ

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\sqrt{a^2 - c};$$
  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\sqrt{a^3 - c}.$ 

Изъ этихъ формулъ видно, что если  $a^2-b$  и  $a^2-c$  будутъ точные квадраты, то u, v, x и y будутъ раціональны, и слѣд. преобразованіе выгодно, ибо оно представляетъ произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ каждый есть сумма простыхъ радикаловъ.

Такъ, если 
$$U = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{6}}$$
, то  $a = 1$ ,  $b = \frac{3}{4}$ ,  $c = \frac{8}{9}$ ,  $d = \frac{6}{9}$ ; условіе  $a^2d = bc$  удовлетворено;  $a^2 - b = \frac{1}{4}$ ,  $a^2 - c = \frac{1}{9}$ .

След.  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ ;  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ;  $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ;  $v = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ .

Итакъ

$$U = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+3)}{6}.$$

Втогой вопросъ. — Полагая, что В не есть точный квадрать, представить

$$u = \sqrt[4]{A + \sqrt{B}}$$

подъ видомъ суммы двухъ квадратныхъ корней:  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ . — Указать условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы преобразованіе было выгодно, что можетъ имътъ мъсто въ двухъ различныхъслучаяхъ: когда x и y плиътъ видъ  $x + \sqrt{y}$ ; когда эти количества соизмъримы.

Положивъ 
$$\sqrt[4]{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

и возвысивъ въ четвертую степень, получимъ

$$A + \sqrt{B} = (x + y)^2 + 4xy + 4(x + y)\sqrt{xy}$$

откуда

$$(x+y)^2 + 4xy = A,$$
  $16xy(x+y)^2 = B.$ 

Отсюда видно, что  $(x+y)^2$  и 4xy суть корни ур-нія

$$t^2 - At + \frac{B}{4} = 0;$$

и накъ разность  $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$ , т. е. существенно положительна, т. к. x и y предполагаются дъйствительными, мы должны большій корень ур-нія въ t принять за  $(x+y)^2$ , меньшій за 4xy. Такимъ образомъ

$$(x+y)^2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$
,  $4xy = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$ ;

или, вычитая второй результать изъ перваго

$$(x-y)^{2} = \sqrt{A^{2}-B}$$

Не трудно теперь найти x и y.

Чтобы разсматриваемое преобразованіе было выгодно, нужно чтобы x или y не содержали биквадратных радикаловъ; сл. необходимо, чтобы  $A^2 - B = K^2$ , гдъ K—число раціональное. Тогда

$$(x+y)^2 = \frac{A+K}{2}, (x-y)^2 = K.$$

Въ этомъ случав x и y имъють, вообще, видъ суммы двухъ простыхъ радиваловъ. На если одно изъ чиселъ  $\frac{A+K}{2}$  или K будетъ точнымъ квадратомъ, выраженіе представится въ видъ суммы двухъ квадратныхъ корней изъ выраженій вида  $\alpha+\sqrt{\beta}$ . Если, наконецъ, оба числа:  $\frac{A+K}{2}$  и K — точные квадраты, выраженіз приметь видъ двухъ простыхъ радикаловъ.

Примъры I. 
$$u=\sqrt[4]{6+\sqrt{20}};$$
 найдемъ:  $A=6, K=4;$  слъд.  $(x+y)^2=5; \quad (x-y)^2=4.$  Потому  $U=\sqrt{\sqrt{\frac{5+2}{2}}+\sqrt{\frac{5-2}{2}}}.$ 

II. 
$$U=\sqrt[4]{7}+\sqrt{48};$$
 найдемъ:  $A=7;$   $K=1;$  сяёд.  $(x+y)^2=4;$   $(x-y)^2=1.$  Отсюда  $U=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.$ 

### 541. Задачи.

1. Ръшить биквадратныя ур-нія

$$x^{4} - 13x^{2} + 36 = 0; \quad x^{4} - 2x^{2} - 15 = 0; \quad 4x^{4} + 12x^{2} + 9 = 0; \quad 7x^{4} - 2x^{2} + 1 = 0;$$

$$x^{4} - 74x^{2} + 1225 = 0; \quad 5x^{4} + 7x^{2} - 6732 = 0; \quad x^{4} - 25x^{2} + 144 = 0;$$

$$\frac{5}{x - 1} + \frac{4}{x + 2} + \frac{21}{x - 3} = \frac{5}{x + 1} + \frac{4}{x - 2} + \frac{21}{x + 3} \cdot \quad 3x^{4} - 7x^{2} + 20 = 0;$$

$$15x^{4} - 8x^{2} + 10 = 0.$$

- 2. Составить биквадратное ур-ніе съ соязм'єримыми коэффиціентами, одинмъ изъ корней котораго быль бы  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ .
- 3. Составить биквадратное ур-ніе съ д'яйствительными коэффиціентами, им'яющее корень 5-2i.
  - 4. Какимъ образомъ выбрать а, чтобы уравненіе

$$(\lambda - 2)x^{2} - 2(\lambda + 3)x^{2} + (\lambda - 1) = 0$$

имъло всъ 4 корня дъйствительные, или 2 корня дъйствительные и 2 мнимые, или всъ 4 корня мнимые?

- 5. Между какими предълами должно заключаться  $\lambda$ , чтобы уравненіе  $x^4-2(\lambda-5)x^2+\lambda^2+10\lambda-23=0$  имѣло 0, или 2, или 4 дъйствительныхъ корня?
- 6. Разложить всёми способами на два действительные ввадратные множителя важдый изъ триномовъ:

$$x^4 - 13x^2 + 36$$
;  $x^4 + 5x^2 - 36$ ;  $x^4 + 6x^2 + 8$ ;  $3x^4 - 4x^2 + 15$ .

7. Преобразовать сложные радикалы въ сумму простыхъ:

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} \; ; \; \sqrt{7-4\sqrt{3}} \; ; \; \sqrt{52+30\sqrt{3}} \; ; \; \sqrt{76-32\sqrt{3}} \; ; \; \sqrt{18\pm8\sqrt{5}} \; ;$$

$$\sqrt{49\pm12\sqrt{13}} \; ; \; \sqrt{75-12\sqrt{21}} \; ; \; \sqrt{39\pm6\sqrt{42}} \; ; \; \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}} \; ;$$

$$\sqrt{ab-2a\sqrt{ab-a^2}} \; ; \; \sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}} \; ; \; \sqrt{2+2(1-x)\sqrt{1+2x-x^2}} \; ;$$

$$\sqrt{ab+c^2+\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}} \; ; \; \sqrt{(a+b)^2\pm(a-b)\sqrt{a^2+6ab+b^2}} \; ;$$

$$\sqrt{a^2-ab+\frac{b^2}{4}+2\sqrt{a^3b-2a^2b^2+\frac{ab^3}{4}}} \; ; \; \sqrt{3a^2+2b^2-\sqrt{12a^3b+2a^2b^2+4ab^3+3b^4}};$$

$$\sqrt{9+(12-8x)\sqrt{3x-x^2}} \; ; \; \sqrt{16x^4+y^6+\sqrt{32x^4(8x^4-y^6)+y^{12}}} \; ; \; \sqrt[4]{14+6\sqrt{5}} \; ;$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{97-56\sqrt{3}}} \; .$$

- 8, Доказать, что если b не есть точный квадрать, выраженіе  $\sqrt{a+\sqrt[4]{b}}$  не м. б. приведено къ виду  $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ , гдъ x и y соизмърним.
- 9. Ръшить слъдующія биквадратныя ур-нія и представить ихъ корни, гдѣ возможно, въ видѣ двухъ независимыхъ радикаловъ:

$$175x^{4} - 42x^{2} + 7 = 0; \quad 8x^{4} - 25x^{2} + 18 = 0; \quad x^{4} + 4abx^{2} = (a^{2} - b^{2})^{2};$$

$$4m^{2} = (a + b + x)(a + b - x)(x + a - b)(x - a + b);$$

$$(2,5 - x)^{4} + 0,5625 = 2,5(2,5 - x)^{2}; \quad ab^{2} \cdot x^{4} - 2(a^{3} + b^{5})x^{2} + a(a^{3} + b^{3})^{2} = 0;$$

$$27(a - b)^{3}x^{4} - 2(a^{2} - b^{2})(a^{3} + b^{3})x^{2} + 3(a^{2} - b^{2})(a + b)^{5} = 0;$$

$$4x^{4}(b^{2} - a^{2}) - 4a^{2}b^{2}x^{2} + a^{2}b^{2}(a^{2} - 4b^{2}) = 0; \quad x^{4} - 2(bc + 2a^{2})x^{2} + b^{2}c^{2} = 0;$$

$$ax^{4} - ax^{2} - (1 + x^{2}) + a = 0 \quad \text{(clyvalification)}$$

$$(x^{2}-25)(x^{2}-81)+2x^{2}(x^{2}-81)+x^{2}=150.$$

$$\frac{A^{2}}{x^{2}-a^{2}}+\frac{B^{2}}{x^{2}-b^{2}}+\frac{C^{2}}{x^{2}-c^{2}}=0. \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x+b}=0.$$

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x-11}+\frac{1}{x+11}=0.$$

$$4x^{4}-4(1+n^{2})a^{2}.x^{2}+n^{2}.a^{4}=0.$$

 $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = n(n-1)$  ;  $\frac{x^2}{x^2-a^2} + \frac{x^2}{x^2-b^2} = n+1$  и довазать, что ворни этого ур-нія всегда дѣйствительны.

$$(x^2-1)(x^2-2)+(x^2-3)(x^2-4)=x^4+5.$$

10. Ръшить неравенства:

$$x^4 - 16x^2 + 63 > 0; \ x^4 - 12x^2 + 32 < 0; \ x^4 - 43x^2 + 225 > 0; \ 56 - 5x^2 - x^4 < 0.$$

11. Ръшить неравенства:

$$\frac{3x^{4}-2x^{2}+22}{x^{4}-12x^{2}+35} \geq 2 ; \quad \frac{3x^{4}-4x^{2}+16}{x^{4}-21x^{2}+80}-4 \geq 0.$$

12. Найти сумму квадратовъ, кубовъ, сумму четвертыхъ степеней корней уравненія  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ .

Доказать, что если сумму n-хъ степеней корней этого ур. обозначить знакомъ  $\mathbf{S}_n$ , то имъетъ мъсто соотношеніе:

$$aS_n + bS_{n-2} + cS_{n-4} = 0.$$

13. Доказать, что если a, b, c и d суть кории биквадратнаго уравненія  $x^4+px^2+q=0$ , то им'єють м'єсто соотношенія:

$$a+b+c+d=0$$
;  $ab+ac+ad+bc+bd+cd=p$ ;  $abc+abd+acd+bcd=0$ ;  $abcd=q$ .

- 14. Совратить дробь  $\frac{x^4-34x^9+225}{x^4-25x^2+144}$ .
- 15. При навихъ значеніяхъ m ур-ніе  $x^4-x^2-m=0$  имѣетъ всѣ 4 корня дѣй-ствительные?
- 16. Между вакими предълами должно измънять x для того, чтобы ур-віе  $[(x-a)^2+y^2]^3=16axy^2$ , ръшенное относительно y, имъло всъ корни дъйствительные? (Предполагается a>0),
  - 17. Изсябдовать кории каждаго изъ уравненій:

$$(\lambda - 2)x^4 + 4(\lambda + 3)x^2 + (\lambda - 1) = 0$$
,  $(3\lambda - 1)x^4 - (2\lambda + 1)x^2 + \lambda = 0$  при измъненія  $\lambda$  отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ .

#### ГЛАВА ХХХУ.

Раціональныя уравненія, приводимыя къ квадратнымъ: продолженіе.— Возвратныя уравненія.— Трехчленныя уравненія.— Уравненія вида P.Q.R = 0 и нѣкоторыя другія.

## Возвратныя уравненія четвертой степени.

**542.** Опредъленія. — Уравненіе называется возвратнымо перваго рода, если обратная величина каждаго корня уравненія служить также корнемь этого уравненія.

Уравненіе называется возвратным втораю рода, если обратная величина каждаю корня, взятая съ противоположным знаком, удовлетворяет также уравненію.

543. Ленна. — Eсли два цълыя уравненія съ однимъ неизвъстнымъ, m-й степени, приведенныя къ виду A=0, имъютъ m различныхъ общихъ корней, то коэффиціенты ихъ пропорціональны.

Въ самомъ дълъ, пусть два уравненія

$$ax^{4} + bx^{3} + cx^{2} + dx + e = 0$$
  
$$a'x^{4} + b'x^{3} + c'x^{2} + d'x + e' = 0$$

имъютъ 4 общихъ ворня, т. е. первыя части ихъ обращаются въ ноль при 4-хъ различныхъ значеніяхъ x; тогда и многочленъ

$$a'(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) - a(a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e')$$

обратится въ ноль при тъхъ же значеніяхъ x; но этотъ многочленъ

$$(ba'-ab')x^3+(ca'-ac')x^2+(da'-ad')x+(ea'-ae')$$

третьей степени относительно x; слъд. (§ 71, II) онъ тождественно равенъ нулю; а потому всъ его коэффиціенты равны нулю. Отсюда

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e}$$

**544.** Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы уравненіе было возвратнымь перваго рода.

Необходимо и достаточно, чтобы оно имъло тъже корни, какъ и уравнение съ корнями, обратными корнямъ даннаго.

Пусть имъетъ уравнение четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0;$$

положивъ  $y=\frac{1}{x}$  и исключивъ x, получимъ уравненіе

$$ey^4 + dy^3 + cy^2 + by + a = 0$$
,

корни котораго обратны корнямъ даннаго; слъд., если  $\alpha$  есть одинъ изъ корней перваго, то  $\frac{1}{\alpha}$  удовлетворяетъ второму, а какъ  $\frac{1}{\alpha}$  удовлетворяетъ, по предположенію, и первому, то эти уравненія имъютъ общіє корни. А потому, на основаніи леммы  $\S$  543, имъємъ

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = 1 = \frac{d}{b} = \frac{e}{a}$$

откуда

$$a = e, b = d,$$

т. е. коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ равны и имѣютъ одинаковые знаки. Итакъ возвратное уравнение четвертой степени перваго рода имѣетъ видъ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Примъчаніе І. — Если средній коэффиціентъ разсматриваемаго уравненія равенъ 0, c=0, то уравненія

$$ax^{1} + bx^{3} + dx + e = 0$$
 If  $ey^{4} + dy^{3} + by + a = 0$ 

дадутъ

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = \frac{d}{b} = \frac{e}{a};$$

отсюда: a=+e в b=+d, или a=-e в b=-d; ур-ніе будеть  $ax^4+bx^3-bx-a=0$ .

И въ самомъ дълъ, ур-ніе это—возвратное, ибо, написавъ его въ видъ  $(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0,$ 

вамъчаемъ, что каждый изъ корней +1 и -1 равенъ своему обратному; корни же ур нін  $ax^2+bx+a=0$  обратны одинъ другому, ибо ихъ произведеніе равно 1.

Примъчание II. — Такимъ же образомъ найдемъ, что ур. третьей степени возвратное перваго рода есть

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0, \dots (1)$$

причемъ верхній знавъ берется съ верхнимъ, нижній съ нижнимъ.

**545.** Чтобы ръшить уравненіе  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ , раздълимъ объ части на  $x^2$  (на это имъемъ право, ибо ур-ніе не имъетъ корня, равнаго нулю, слъд.  $x^2$  не обращается въ ноль); найдемъ, сгруппировавъ члены, равно удаленные отъ концовъ:

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0.$$

Положивъ  $x+\frac{1}{x}=y$ , имъемъ отсюда:  $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ ; подставляя, найдемъ

Отсюда найдемъ два значенія для y: y' и y''. Подставляя поочередно эти значенія въ ур-ніе  $x+\frac{1}{x}=y$ , которое можно написать въ видъ

$$x^2 - yx + 1 = 0, \ldots (3)$$

найдемъ всѣ четыре значенія x. Такимъ образомъ рѣшеніе ур-нія (1) сводится къ рѣшенію системы (2) и (3).

**546.** Изслъдованте. — Чтобы величины x, выводимыя изъ (3), были дъйствительны, необходимо, во-первыхъ, чтобы коэффиціенты этого ур-нія были дъйствительны, т. е. чтобы y было дъйствительно; затъмъ необходимо, чтобы разсматриваемое значеніе y удовлетворяло условію

$$y^2 - 4 \ge 0$$
,

т. е. чтобы y находился вит интервала от  $x_0 - 2$  до  $x_0 + 2$ , пначе, чтобы абсолютная величина  $x_0 + 2$  была больше  $x_0 + 2$ . Очевидно, что этих  $x_0 + 2$  достаточно.

**547.** Примъры. — I. *Рошить ур-ніе*  $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$ . Напишемъ его въ видъ

$$2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) - 11 = 0.$$

Положивъ  $x+\frac{1}{x}=y$ , находимъ ур-ніе  $2y^2+y-15=0$ , откуда  $y'=\frac{5}{2}, \quad y''=-3.$ 

Внося эти величины въ ур-ніе  $x + \frac{1}{x} = y$ , имъеть ур-нія:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$
,  $x^2 + 3x + 1 = 0$ ;

откуда: 
$$x^{\text{I}} = 2$$
,  $x^{\text{II}} = \frac{1}{2}$ ,  $x^{\text{III}} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ .  $x^{\text{IV}} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ .

Легко удостовъриться, что  $x^{\text{III}}$ .  $x^{\text{IV}} = 1$ .

II. Изслыдовать корни уравненія  $x^4+2\lambda x^3+(\lambda+1)x^2+2\lambda x+1=0$  при измыненіи  $\lambda$  оть  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Вышеуказаннымъ пріемомъ приводимъ рёшеніе этого ур-нія къ рёшенію системы

$$x^2 - yx + 1 = 0 \dots (1), \quad y^2 + 2\lambda y + (\lambda - 1) = 0 \dots (2).$$

Чтобы корни (1) были дъйствительны, необходимо, во-первыхъ, чтобы y было дъйствительно, и затъмъ, чтобы

$$y^2 - 4 > 0$$
.

Каждое значеніе y, удовлетворяющее этимъ двумъ условіямъ, дастъ дъйствительныя значенія для x.

Ур. (2) даетъ слъдующее условіе дъйствительности y:

$$\lambda^2 - \lambda + 1 \ge 0,$$

условіе, всегда существующее, ябо ур.  $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$  имъсть корни мнимые.

Второе условіє:  $y^2-4 \le 0$  означаєть, что y не должно содержаться между -2 п +2, т. е. y должень быть или <-2, или >+2. Подстановка (-2) вм. y въ первую часть ур-нія (2) даєть

$$3(-\lambda + 1);$$

подстановка (+2) даетъ

$$5\left(\lambda+\frac{3}{5}\right);$$

разсмотримъ скалу значеній х, содержащую значенія, обращающія эти биномы въ ноль:

$$-\underbrace{\cdots \cdots -\frac{3}{5}}_{1} \underbrace{\cdots \cdots +1}_{2} \underbrace{\cdots \cdots +\infty}_{3}$$

Если  $\lambda$  давать величины въ интервацив (1), то результать подстановки (-2) оказывается > 0; след. — 2 находится вив корней ур. (2); но полусумма корней, равная —  $\lambda$ , положительна; след. оба корня больше (-2). — Результать подстановки (+2) отрицателень, сл. +2 содержится между корнями урнія (2). Итакъ, для значеній  $\lambda$ , лежащихъ въ (1) области, расположеніе корней y' и y'' (полагая y' < y'') и чисель — 2 и + 2 таково:

$$\ldots -2 \ldots y' \ldots +2 \ldots y'' \ldots$$

Итакъ: одинъ корень (y'') дастъ два дъйствительныя значенія для x; другой (y') — дна мнимыя значенія.

Для  $\lambda$ , содержащихся во (2) области, результаты подстанововъ (—2) и (—2) положительны, сл. (—2) и (—2) лежатъ внѣ корней; приэтомъ, полусумма корней, равная — $\lambda$ , больше —2, но меньше —2; сл. расположение корней и чиселъ —2 и +2 таково:

$$\ldots -2 \ldots y' \ldots y'' \ldots +2;$$

заключаемъ, что 4 значенія ж мнимы.

Для  $\lambda$ , содержащихся въ (3) области, результать подстановки (— 2) отрицателенъ; слёд. (— 2) содержится между корнями ур. (2); результать подстановки (— 2) положителенъ; слёд. — 2, находясь внё корней, больше y''. Такимъ образомъ одинъ корень (y') дастъ два дёйств. значенія x, другой (y'') — два мнимыхъ значенія x.

**548.** Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы уравненіе было возвратнымь втораго рода.

Необходимо и достаточно, чтоуы ур-ніе питло тт же корни, какъ и ур-ніе, корни котораго обратны корнямъ даннаго и питьють противоположные имъ знаки.

Пусть дано ур-ніе четвертой степени

положивъ  $y=-\frac{1}{x}$  и исключивъ x изъ этого ур-ній и перваго, получинъ ур-ніе.

$$ey^4 - dy^3 + cy^4 - by + a = 0, \dots (2)$$

корни котораго обратны корнямъ даннаго и имѣютъ противоположные имъ знаки. Но, если  $\alpha$  есть корень даннаго (которое, по предположенію, есть возвратное втораго рода), то  $-\frac{1}{\alpha}$  есть также корень этого ур-нія; но  $-\frac{1}{\alpha}$  есть также и корень (2); слъд. оба ур-нія имѣютъ одинаковые корни, а потому

$$\frac{a}{c} = -\frac{b}{d} = 1 = -\frac{d}{b} = \frac{e}{a}$$

откуда:

$$a = e, b = -d.$$

Сявд, общая форма возвратнаго ур-нія четвертой степени втораго рода такова

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0.$$

Примъчание I. — Еслибы средній членъ равнялся нулю, то ур. было бы возвратнымъ втораго рода въ двухъ слъдующихъ случаяхъ:

$$ax^3 + bx^3 \pm bx = a = 0$$

причемъ верхній знакъ надо брать съ верхнимъ, нижній съ нижнимъ.

Когда ур-ніе имъетъ видъ  $ax^4 + bx^3 + bx - a = 0$ , его можно написать въ види:  $a(x^4 - 1) + bx(x^2 + 1) = 0$ , или

$$(x^2+1)[a(x^2-1)+bx]=0,$$

откуда видно, что оно имћетъ два мниныхъ корня: +i и -i.

IIримпчаніе II. — По предыдущему легко уб'єдиться, что уравненіе нечетной степени съ д'єтвительными коэффиціентами не м. б. возвратнымъ втораго рода.

549. Чтобы ръшить уравненіе  $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ , раздълнить объ его части на  $x^2$  и напишемъ его въ видъ:

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x - \frac{1}{x}) + c = 0, \dots (1)$$

положивъ  $x - \frac{1}{x} = y$ , имъемъ:  $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$ ; подстановка въ (1) дастъ

$$ay^2 + by + (c + 2a) = 0$$
 . . . . . . . . . . . (2)

Отсюда найдемъ два значенія y, подставдяя каждое въ ур.  $x-\frac{1}{x}=y$ , которое можно представить въ видѣ:

$$x^{2}-yx-1=0\ldots\ldots(3)$$

Найдемъ четыре корня предложеннаго ур-нія.

Изслъдование. — Если корни ур-нія (2) будуть дёйствительны, то и всё четыре корня даннаго будуть дёйствительны, потому-что корни (3) будуть дёйствительны. Итакъ, условіе дёйствительности всёхъ четырехъ корней даннаго ур. выражается перавенствомъ

$$b^2-4a(c+2a) \gg 0.$$

Примъръ. — Ръшить ур-ніе  $x^4 + 2\lambda x^3 - 3(\lambda + 1)x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ .

Это есть возвратное ур ніс 2-го рода. Раздъливъ его на  $x^2$  и положивъ  $x-\frac{1}{x}=y$ , или, что то же,

$$x^2 - yx - 1 = 0$$

ръшаемъ ур-ніе

$$y^2 + 2\lambda y - (3\lambda + 1) = 0$$
.

Условіе дъйствительности всьхъ корней предложеннаго будетъ

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 \gg 0$$

откуда заключаемъ, что х не должно содержаться между

$$-\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$
 II  $+\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ .

## Двучленныя уравненія.

550. Двучленными уравнениеми называется ур-ніе вида

$$ax^m + b = 0.$$

Раздъливъ объ части на a, и положивъ —  $\frac{b}{a}$  — A, можемъ представить это ур-ніе въ видъ

$$x^m - A = 0$$
, when  $x^m = A$ .

Ръшить это ур-ніе значить найти такое количество x, m-ая степень котораго равнялась бы A; иначе говоря, значить: найти вст значенія корня m-го порядка изх A.

**551.** Теорема. Ръшение ур-нія  $x^m - A = 0$  приводится ка ръшенію ур-нія  $y^m = 1 = 0$ .

Въ самомъ дълъ, пусть  $\alpha$  будеть ариометическій корень m-го порядка изъ A, если A>0, и изъ (-A), если A<0. Ур-ніе  $x^m=A$  приметь одинъ изъ відовъ:  $x^m=\alpha^m$ ,  $x^m=-\alpha^m$ . Положивъ  $x=\alpha y$  и подставивъ это выраженіе въ каждое изъ послъднихъ ур-ній, по сокращеніи на  $\alpha^m$ , найдемъ

$$y^{n} = 1$$
, use  $y^{n} = -1$ .

Такимъ образомъ, чтобы ръшить ур-ніе  $x^m - A = 0$ , нужно: 1) найти абсолютное значеніе  $\sqrt[m]{A}$ , равное  $\alpha$ ; 2) найти всъ корни y', y'', y''',... ур-нія  $y^m = 1 = 0$ ; 3) каждый изъ няхъ помножить на  $\alpha$ .

**552.** Переходимъ къ ръшенію ур-нія  $y^m \pm 1 = 0$ : элементарная алгебра даетъ средства ръшать это ур ніе лишь въ нъкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

I. 
$$m=2$$
; yp-nig cyth:  $y^2-1=0$ ;  $y^2+1=0$ .

Рѣшеніе ихъ извѣстно; корни перваго суть: y' = +1, y'' = -1; корни втораго: y' = +i, y'' = -i.

II. 
$$m=3$$
; yp-His:  $y^3-1=0$ ;  $y^3+1=0$ .

Первое ур-ніе можно представить въ видѣ:  $(y-1)(y^2+y+1)=0$ ; оно распадается на два: y-1=0,  $y^2+y+1=0$ .

Первое имъетъ корень +1; второе — два кория:  $\frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}$ ; такъ-что три кория даннаго ур-нія суть:

$$y'=+1; \ y''=\frac{-1+\sqrt{3} \cdot i}{2}; \ y'''=\frac{-1-\sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

Это значить, что кубичный корень изъ +1 импеть три значенія: одно дий-ствительное и два мнимыхъ.

Легко видёть, что каждый изъ мнимыхъ корней изъ+1 равень квадрату другаго. Въ самомъ дёлё, назвавъ эти корни черезъ  $\alpha$  и  $\beta$ , и замёчая, что они удовлетворяють уравненію  $y^2+y+1=0$ , находимъ:  $\alpha\beta=1$ ; но  $\alpha^3=1$ , слёд.  $\alpha\beta=\alpha^3$ , или  $\beta=\alpha^2$ . Слёд., если  $\alpha$  есть одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ 1, то три корня будуть:  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\alpha^3$ .

Можно и прямымъ возвышеніемъ въ квадратъ убъдиться, что  $y''=y'''^2$  и  $y'''=y''^2$ .

Примъръ. — Ръшить ур-ніе  $x^3 - 343 = 0$ .

По доказанному, надо ариеметическое значеніе  $\sqrt[3]{343}$  т. е. 7 помножить на каждое изъ трехъ значеній кубичнаго корня изъ +1. Найдемъ:

$$x' = +7; \quad x'' = 7 \times \frac{-1 + \sqrt{3} \cdot i}{2}; \quad x''' = 7 \cdot \frac{-1 - \sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

Переходимъ въ ръшенію ур-нія  $y^3+1=0$ . Его можно представить въ видъ  $(y+1)(y^2-y+1)=0$ ; а это уравненіе распадается на два: y+1=0 и  $y^2-y+1=0$ .

Первое имъетъ корень =-1; второе—два корня:  $\frac{1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2}$ ; такъ что три корня даннаго суть:

$$y' = -1;$$
  $y'' = \frac{1 + \sqrt{3} \cdot i}{2};$   $y''' = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot i}{2}.$ 

Эти корни и представляють три значенія кубичнаго корня изъ — 1.

Примъръ. — Ръшить уравнение  $x^3 + 8 = 0$ .

Корни его найдемъ, помноживъ ариометическое значение  $\sqrt[3]{8}$  или 2 на каждый изъ кубичныхъ корней изъ — 1; слъд.

$$x' = -2; \quad x'' = +1 + \sqrt{3} \cdot i; \quad x''' = 1 - \sqrt{3} \cdot i.$$

III. m=4; уравненія:  $y^4-1=0$ ;  $y^4+1=0$ .

Уравненіе  $y^4-1=0$  можно представить въ видъ  $(y^2-1)(y^2+1)=0$ ; оно распадается на два ур нія:  $y^2-1=0$  и  $y^2+1=0$ . Первое имъетъ корни: +1 и -1, второе: +i и -i; такъ-что ур-ніе  $y^4-1=0$  имъетъ четыре корня:

$$y^{\text{I}} = +1$$
,  $y^{\text{II}} = -1$ ,  $y^{\text{III}} = +i$ ,  $y^{\text{IV}} = -i$ 

Чтобы ръшить ур-ніе  $y^4+1=0$ , дополнимъ первую часть его до полнаго квадрата, прибавивъ къ ней и вычтя  $2y^2$ ; найдемъ:

$$y^{4} + 2y^{2} + 1 - 2y^{2} = 0$$
, или  $(y^{2} + 1)^{2} - (\sqrt{2} \cdot y)^{2} = 0$ , или  $(y^{2} + \sqrt{2} \cdot y + 1)(y^{2} - \sqrt{2} \cdot y + 1) = 0$ .

Это ур-ніе распадается на два квадратныхъ:  $y^2 + \sqrt{2} \cdot y + 1 = 0$  и  $y^2 - \sqrt{2} \cdot y + 1 = 0$ . Ръшивъ ихъ, найдемъ 4 кория:

$$y_1 = \frac{y_1}{y_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm i),$$
  $y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 \pm i).$ 

Уравненіе  $y^4+1=0$  можно рѣшить иначе, разсматривая его какъ возвратное, въ которомъ коэффиціенты трехъ среднихъ членовъ равны нулю. Раздѣливъ его на  $y^2$ , имѣемъ  $y^2+\frac{1}{y^2}=0$ ; положивъ  $y+\frac{1}{y}=z$ , имѣемъ отсюда:  $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$ ; слъд.  $z^2-2=0$ , откуда  $z^1=+\sqrt{2}$  и  $z^{11}=-\sqrt{2}$ . Подставлая поочередно оба значенія z въ ур-ніе  $y+\frac{1}{y}=z$ , получаемъ два урнія  $y^2-\sqrt{2}$ . y+1=0 н  $y^2+\sqrt{2}$ . y+1=0, которыя рѣшены выше.

Примъръ І.—Уравненіе  $x^4 - 81 = 0$  имъетъ 4 кория, которые найдемъ, умноживъ ариеметическое значеніе  $\sqrt[4]{81}$ , т. е. 3 на четыре значенія корня четвертаго порядка изъ +1; именю

$$x^{I} = +3$$
,  $x^{II} = -3$ ,  $x^{III} = +3i$ ,  $x^{IV} = -3i$ .

Примъръ II. — Ур-ніе  $x^4 + 16 = 0$  имъєть четыре мнимыхь корня, которые найдемъ, умноживъ четыре значенія корня 4-го порядка изъ — 1 на арием. значеніе  $\sqrt[4]{16}$ , т. с. на 2. Получимъ:

$$x^{\text{I}} = \sqrt{2}(1+i), \quad x^{\text{II}} = \sqrt{2}(1-i), \quad x^{\text{III}} = \sqrt{2}(-1+i), \quad x^{\text{IV}} = \sqrt{2}(-1-i).$$

IV. m = 5; yp-his:  $x^5 - 1 = 0$  is  $x^5 + 1 = 0$ .

Первое ур. можно представить въ видъ:  $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ ; оно распадается на два ур-нія

$$x-1=0$$
...(1) If  $x^4+x^8+x^2+x+1=0$ ...(2)

изъ которыхъ первое даетъ x' = +1. Второе же есть еозератное ур. перваго рода, ибо коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ, равны; слѣд. рѣшеніе его приводится къ рѣшенію системы двухъ уравненій:

$$x^2 - yx + 1 = 0$$
  $\pi$   $y^2 + y - 1 = 0$ .

Корни ур-нія въ y дъйствительные, неравные и противоположны по знаку; необходимо и достаточно, чтобы эти корни не заключались между — 2 и +2, чтобы корни ур-нія (2) были дъйствительны. Но  $2^2+2-1>0$ , слъд. положительный корень содержится между 0 и +2. Точно такъ же  $(-2)^2+(-2)-1>0$ , слъд. отрицательный корень содержится между 0 и (-2). Слъд. всъ четыре корня ур-нія (2) мнимы. Для нахожденія ихъ ръщаемъ сначала ур. въ y; оно даетъ

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ръщая ур-ніе въ x, имъ-мъ

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$
;

подставляя сюда вийсто y сперва  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ , затйемъ  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , получимъ еще четыре корна, такъ-что всй пять корней ур-нія  $x^3-1=0$  суть:

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot i}{4}; \quad x_3 = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot i}{4};$$

$$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot i}{4}; \quad x_5 = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \cdot i}{4}.$$

Чтобы рёшить ур.  $x^5+1=0$ , разлагаемъ первую часть на множителя и получаемъ уравненіе  $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$ , распадающееся на два ур-нія: x+1=0 и  $x^4-x^3+x^2-x+1=0$ , рёшеніе которыхъ аналогично вышеуказанному. Впрочемъ, легко показать, что корни ур-нія  $x^5+1=0$  отличается отъ корней ур-нія  $x^5-1=0$  только знаками; въ самомъ дёлё, положивъ въ данномъ ур-ніи x=-x', получимъ ур-ніе  $x'^5-1=0$ , тождественное съ рёшеннымъ, саёд. для x' имёемъ 5 вышенаписанныхъ формулъ; а какъ x=-x', то перемёневъ въ этихъ формулахъ знаки, прямо имёемъ пять корней ур-нія  $x^5+1=0$ . Это замёчаніе относится ко всёмъ двучленнымъ урніямъ  $x^m-1=0$  и  $x^m+1=0$ , въ которыхъ m нечетно.

V. 
$$m=6$$
; yp-His:  $x^6-1=0$  H  $x^6+1=0$ .

Первое ур. можно представить въ видѣ  $(x^3-1)(x^3+1)=0$ ; сл. оно разлагается на два кубичныхъ ур-нія:  $x^3-1=0$  и  $x^3+1=0$ , рѣшенія которыхъ уже извѣстны, такъ-что  $x^5-1=0$  имѣетъ шесть корней:

$$x_1=1; \ x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \ x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \ x_4=-1; \ x_5=\frac{1-i\sqrt{3}}{2};$$

$$x_6=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравненія.  $x^6+1=0$  можно представить въ видѣ  $(x^2)^3+1=0$ , т. е.  $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=0$ ; оно распадается на два: квадратное ур.  $x^2+1=0$  и биквадратное  $x^4-x^2+1=0$ , рѣшеніе которыхъ извѣстно.

VI. m=7. Уравненія  $x^7 \pm 1 = 0$  неразръшимы средствами элементарной адгебры.

VII. 
$$m=8$$
; yp-nia  $x^3-1=0$  n  $x^3+1=0$ .

Первое можно написать въ видъ  $(x^4-1)(x^4+1)=0$ ; оно распадается на два  $x^4-1=0$  и  $x^4+1=0$ , корни которыхъ уже найдены въ пунктъ III.

Ур. ніе  $x^8+1=0$  можно написать въ видѣ  $(x^4+1)^2-2x^4=0$  или  $(x^4+\sqrt{2}\cdot x^2+1)(x^4-\sqrt{2}\cdot x^2+1)=0$ ; оно распадается на два биявадратныхъ ур. нія  $x^4+\sqrt{2}\cdot x^2+1=0$ , и  $x^4-\sqrt{2}\cdot x^2+1=0$ , ръщеніе которыхъ извѣстно.

Подобнымъ образомъ могли бы ръшить элементарно еще нъкоторыя двучленныя ур-нія.

На частныхъ примърахъ мы видъли, что число значеній корня, или ръшеній двучленнаго ур-нія всегда оказывается равно показателю корня или степени ур-нія. Общее доказательство этой истины дано въ главъ XXIX. § 453.

## Трехчленныя уравненія.

553. — Трехчленными ур-ми называется ур-ніе вида

$$ax^m + bx^n + c = 0.$$

Въ частномъ случат, когда m=2n, т. е. ур-ніе имтеть видъ

$$ax^{2^n} + bx^n + c = 0$$
,

рѣшеніе его приводится въ рѣшенію двухъ ур-ній:  $\kappa \epsilon adpamнало$  и  $d\epsilon y$ иленнало. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ  $x^n=y$ , и слѣд.  $x^{2n}=y^2$ , получаемъ ур-ніе

$$ay^2 + by + c = 0$$
,

имъющее два корня: y = y' и y = y''; подставляя эти значенія y въ ур-ніе  $x^n = y$ , получаемъ два двучленныхъ ур-нія

$$x^n = y'$$
 in  $x^n = y''$ ,

изъ коихъ каждое имъетъ n корней, такъ-что предложенное ур-ніе имъетъ 2n корней.

Очевидно, биквадратное ур. есть частный случай трехчленнаго.

 $\Pi$  Р  $\Pi$  м B Р B. — Ръшить ур-ніе  $1000x^6 - 6119x^3 + 9261 = 0$ .

Положивъ  $x^3 = y$ , имъемъ ур.  $1000y^3 - 6119y + 9261 = 0$ , откуда

$$y = \frac{6119 \pm \sqrt{37442161 - 37044000}}{2000} = \frac{6119 \pm 631}{200}$$
;

слъд.

$$y' = \frac{6750}{2000} = \frac{27}{8}; \quad y'' = \frac{5488}{2000} = \frac{343}{125}.$$

Вопросъ приводится къ рътенію двухъ двухчленныхъ ур-ній

$$x^3 = \frac{27}{8}$$
 m  $x^3 = \frac{343}{125}$ ,

наъ которыхъ и находимъ шесть корней предложеннаго:

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \times \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5} \times \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

# Уравненія вида Р.Q.R = 0 и искоторыя другія.

554. Канова бы ни была степень уравненія, вторая часть котораго равна нулю, но если окажется возможнымъ разложить первую часть его на множители первой, или второй степени, или вида  $ax^4 + bx^2 + c$ , или  $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a$ , то ур-ніе возможно рёшить средствами элементарной алгебры. Въ самомъ дёлё, чтобы произведеніе множителей было нулемъ, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ нихъ былъ нулемъ; слёд. рёшеніе уравненія PQR = 0 приводится къ рёшенію отдёльно ур-ній P = 0, Q = 0, R = 0, которыя, по предположенію, разрёшимы элементарными средствами.

Приводимъ примфры.

1. Promume yp-nie  $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ .

Написавъ его въ видѣ  $x(ax^2 + bx + c) = 0$ , заплючаемъ, что его корни суть корни ур-ній: x = 0,  $ax^2 + bx + c = 0$ ; т. е.

$$x'=0, \ x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \ x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

II. Provide  $7x^3 - 5x^2 - 4x + 2 = 0$ .

Непосредственно видно, что ур. удовлетворяется при x=1; слъд. первая часть его, обращаясь при x=1 въ ноль, дълится на x-1; выполнивъ дъленіе, дадимъ ур-нію видъ  $(x-1)(7x^2+2x-2)=0$ , откуда видно, что оно распадается на два ур-нія: x-1=0 и  $7x^2+2x-2=0$ .

Ръшая ихъ, получаемъ:

$$x=1, x=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{7}$$

III. Promums yp-nie:  $(3x^4-7x^2+4)^2-(2x^4-5x^2+2)^2=0$ .

Разложивъ на множители, получимъ

$$(5x^4 - 12x^2 + 6)(x^4 - 2x^2 + 2) = 0$$

ур ніе, распадающееся на два биквадратныхъ, изъ которыхъ найдемъ

$$x = \pm \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{6}}{5}}$$
 II  $x = \pm \sqrt{1 \pm i}$ .

**555.** Уравненія  $aQ^2 + bQ + c = 0$  и  $aQ^4 + bQ^2 + c = 0$ , гдѣ Q есть квадратный или биквадратный по буквѣ x полиномъ заключаютъ въ себѣ четыре типа ур-ній:

$$a(rx^{2} + sx + t)^{2} + b(rx^{2} + sx + t) + c = 0;$$

$$a(rx^{4} + sx^{2} + t)^{2} + b(rx^{4} + sx^{2} + t) + c = 0;$$

$$a(rx^{2} + sx + t)^{4} + b(rx^{2} + sx + t)^{2} + c = 0;$$

$$a(rx^{4} + sx^{2} + t)^{4} + b(rx^{4} + sx^{2} + t)^{2} + c = 0.$$

Чтобы решить такого рода ур-нія, полагаемъ, смотря по случаю:

$$\min rx^2 + sx + t = 0, \min rx^4 + sx^2 + t = 0, \dots (a)$$

ръщая ур-нія въ Q, найдемъ для Q два или четыре значенія; внося каждое изъ значеній Q въ вспомогательныя ур-нія  $(\alpha)$ , найдемъ соотвътствующія значенія x.

556. Следующие четыре типа уравненій:

$$aP^2 + bPP' + cP'^2 = 0; aQ^2 + bQQ' + cQ'^2 = 0;$$
  
 $aP^4 + bP^2P'^2 + cP'^4 = 0$  if  $aQ^4 + bQ^2Q'^2 + cQ'^4 = 0$ ,

въ которыхъ P и P' суть триномы вида  $rx^2+sx+t$ , а Q и Q' — вида  $rx^4+sx^2+t$ , ръщаются помощію двухъ квадратныхъ, либо двухъ биквадратныхъ ур-ній.

Для ръшенія ихъ полагаемъ, смотря по случаю;

$$\frac{P}{P'}$$
=R плп  $\frac{Q}{Q'}$ =R;

приходится затъмъ ръшать квадратное, дибо биквадратное ур. въ R, которое дасть для R два, дибо четыре значенія; внося значенія R во вспомогательное ур., найдемъ соотвътствующія значенія x.

557. Примъры. — І. Ръшить ур.  $(x-a)(x-3a)(x-8a)(x+4a) = b^4 - 35a^2b^2$ .

Последовательныя преобразованіи дають:

$$(x^2 - 4ax + 3a^2)(x^2 - 4ax - 32a^2) = b^4 - 35a^2b^3,$$
  
$$(x^2 - 4ax)^2 - 29a^2(x^2 - 4ax) - (96a^4 + b^4 - 35a^2b^2) = 0.$$

Принявъ  $x^2 - 4ax$  за вспомогательное неизвъстное, находимъ

$$x^2 - 4ax = \frac{29a^2 \pm (35a^2 - 2b^2)}{2}$$
;

ръшая каждое изъ этихъ квадратныхъ ур-ній, найдемъ всъ 4 корня предложеннаго.

II. Prowums yp. 
$$(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0$$
.

Раздъливъ объ части на  $x^{\mathfrak s}$  (что, замътимъ, не поведетъ за собою уничтоженія нъкоторыхъ корней, ибо при x=0 ур. не удовлетворяется), дадимъ ур-нію видъ

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^4-10\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2+9=0$$
,

откуда

$$\frac{x^2-x+1}{x} = \pm \sqrt{5 \pm 4}$$

Такимъ образомъ имъемъ 4 ур-нія

$$\frac{x^2-x+1}{x}=\pm 1$$
 w  $\frac{x^2-x+1}{x}=\pm 3$ ,

изъ которыхъ находимъ:

$$x=1, x=\pm i, x=2\pm\sqrt{3}, x=-1.$$

III. Provides 
$$yp \cdot \frac{(x^2 + ax + 1)^2}{(x^2 + bx + 1)(x^2 + cx + 1)} = d$$
, the  $d = \frac{(a - b)(a - c)}{bc}$ .

Последовательныя преобразованія дають:

$$\begin{aligned} d\left\{x^2 + ax + 1 - (a - b)x\right\} \left\{x^2 + ax + 1 - (a - c)x\right\} - (x^2 + ax + 1)^2 &= 0, \\ (d - 1)(x^2 + ax + 1)^2 - d(2a - b - c)(x^2 + ax + 1)x + d(a - b)(a - c)x^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда, раздѣливъ на  $x^2$  и принявъ за неизвѣстное  $\frac{x^2+ax+1}{x}$ , имѣемъ:

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{d(2a - b - c) \pm \sqrt{d^2(2a - b - c)^2 - 4d(d - 1)(a - b)(a - c)}}{2(d - 1)}, \text{ with } \frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{d(2a - b - c) \pm \sqrt{d^2(2a - b - c)^2 - 4d(d - 1)(a - b)(a - c)}}{2(d - 1)}$$

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{d(2a - b - c) \pm \sqrt{d^2(b - c)^2 + 4d(a - b)(a - c)}}{2(d - 1)}.$$

Но, по условію, 
$$d = \frac{(a-b)(a-c)}{bc}$$
; слёд.

$$d^{2}(b-c)^{2}+4d(a-b)(a-c)=d^{2}(b+c)^{2}$$

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{d\left\{2a - b - c \pm (b + c)\right\}}{2(d - 1)}, \text{ T. 6.}$$

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{(a - b)(a - c)\left\{2a - b - c \pm (b + c)\right\}}{2a(a - b - c)}.$$

Итакъ, нахождение x приводится къ ръщению ур-ний

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{(a - b)(a - c)}{a - b - c}, \frac{x^2 + ax + 1}{x} = \frac{(a - b)(a - c)}{a}$$

что не представляеть уже затрудненій.

#### 558. Задачи.

Ръшить возвратныя уравненія:

1. 
$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$$
.

2. 
$$x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$$
.

3. 
$$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$$
.

4. 
$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$
.

5. 
$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

5. 
$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$
. 6.  $30x^4 - 101x^3 + 138x^2 + 101x + 30 = 0$ .

7. 
$$65x^{4} - 198x^{3} + 274x^{2} - 198x + 65 = 0$$
. 8.  $5x^{4} - 12x^{3} + 30x^{2} - 12x + 5 = 0$ . 9.  $x^{5} + px^{4} + qx^{3} + qx^{2} + px + 1 = 0$ . 10.  $x^{5} + px^{4} + qx^{3} - qx^{2} - px - 1 = 0$ .

$$6. \ 3x^{2} - 12x^{2} + 30x^{2} - 12x + 3 = 0.$$

11. 
$$4x^6 - 24x^5 + 57x^4 - 73x^3 + 57x^2 - 24x + 4 = 0$$
.

12. 
$$6x^6 - 23x^3 + 10x^4 + 14x^3 + 10x^2 - 23x + 6 = 0$$
.

13. 
$$abx^3 - (a+b)(1+ab)x^3 + \{(1+a^2)(1+b^2) + 2ab\}x^2 - (a+b)(1+ab)x + ab = 0.$$

14. 
$$a^2bcx^4 - a[c(a^2 + b^2) + b(a^2 + c^2)]x^3 + [2a^2bc + (a^2 + b^2)(a^2 + c^2)]x^2 - a[c(a^2 + b^2) + b(a^2 + c^2)]x + a^2bc = 0.$$

15. Рѣшитъ ур.  $x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81 = 0$ .

#### Ръшить трехчленныя уравненія:

16. 
$$x^6 + 4x^3 = 96$$
.

17. 
$$x^6 - 91x^3 + 1728 = 0$$
.

18. 
$$x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$$
.

19. 
$$x^{10} - 12x^5 = 56133$$
.

20. 
$$x^8 - [a^2(2+\sqrt{2}) + b^2(2-\sqrt{2})][a^2(2-\sqrt{2}) + b^2(2+\sqrt{2})]x^4 + (a^2-b^2)^4 = 0.$$

#### Рѣшить уравненія:

21. 
$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2$$
.

22. 
$$4x^4 + \frac{x}{2} = 4x^3 + 33$$
.

23. 
$$x^3 + x + 2 = 0$$
.

24. 
$$x^3 + x + a^3 + a = 0$$
.

25. 
$$ax^3 + x + a + 1 = 0$$
.

$$26. \ 2x^{10} = 3x^6 - x^8.$$

25. 
$$ax^3 + x + a + 1 = 0$$
.  
27.  $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ .

28. 
$$8x^3 + 16x - 9 = 0$$
.

29. 
$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$$
.

30. 
$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$
.

$$31. \ x^4 + 4a^3x = a^4.$$

32. 
$$x^5 + 4x = 5x^3$$
.

33. 
$$8x^3 - 16ax^2 + 8a^2x - a^3 = 0$$
.

34. 
$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$$
.

35. 
$$8x^3 - 13x^2 + 3x + 2 = 0$$
.

36. 
$$x^3 - 3ax^2 + 4a^2x + 8a^3 = 0$$
. 37.  $R(x + R)^2 = ax(x + 2R) - (x + R)^3$ .

38. 
$$(2x^3 + x^2 + x)^2 - 26(2x^3 + x^2 + x) + 88 = 0$$
.

39. 
$$(x^4 + x^2 + 1)^2 - 38(x^4 + x^2 + 1) + 105 = 0$$
.

40. 
$$x^3 - 6x^2 - 10x - 8 = 0$$
, зная, что одинъ изъ корней = 4.

- 41. (x-5)(3x+8)(7x-9)=x(2x-1)(2x+1), зная, что одинъ изъ его корней цѣлый.
- 42.  $x^3-11x^4-7x^3+323x^2-186x-2520=0$ , зная, что три изъ его корней последовательныя целыя числа, сумма квадратовъ которыхъ = 110.
- 43.  $x^5 24x^4 + 163x^3 48x^2 1676x 1440 = 0$ , зная, что въ числъ его корней есть три послъдовательныя цълыя числа, дающія въ произведеніи 720.

44. 
$$x^4 - ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0$$
.

45. 
$$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1) - m(x^2 + cx + 1)(x^2 + dx + 1) = 0$$
.

46. 
$$(x^2 - ax + b)(x^2 - 3ax + b)(x^2 - 4ax + b)(x^2 - 6ax + b) = 7a^4x^4$$
.

47. (x+a)(x+a+1)(x+a+2)(x+a+3)+h=0, п показать, что корни его мнимы, если h>1, попарно равны при h=1, и дъйствительны, если h<1.

48. 
$$x(x+a)(x+b)(x+a+b)+h=0$$
.

49. 
$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x+2} + \frac{3x}{x+3} + \frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0.$$

50. 
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 0$$
, и, общье, ур-ніе 
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+a+b} = 0;$$

кромѣ того, показать, что всѣ три корня всегда дѣйствительны, и даже соизмѣримы, если  $a^2+b^2$  есть квадрать.

51. 
$$(x+p)(x+p+1)(x+p+2)(x+p+3) - (x+q)(x+q+1)(x+q+2)(x+q+3) = 0$$
.

52. При какомъ соотпошенін между коэффиціентами уравненія  $ax^4 + bx^8 + cx^2 + dx + f = 0$  можно его представить въ вид'в

$$(2x^2 + 3x + \gamma)^2 + p(2x^2 + 3x + \gamma) + q = 0.$$

### ГЛАВА XXXVI.

## Прраціональныя уравненія.

559. Ирраціональными ур-ми называется такое, въ которомъ неизвёстныя входять подъ знакомъ одного или несколькихъ радикаловъ. Решеніе такихъ ур-ній требуеть освобожденія неизвастных изъ-подъ радикаловъ. Можно доказать, что всякое ур-ніе можеть быть освобождено оть радикаловь, каковы бы ни были ихъ показатели. Доказательство этой теоремы и основывающійся на ней общій методъ рёшенія ирраціональныхъ ур-ній мы помёщаемъ въ концё курса, въ особомъ приложении. Въ настоящей же главъ разсмотримъ другой пріемъ, болье элементарный, приложимый лишь въ нъкоторыхъ случаяхъ, обыкновенно встръчающихся въ практикъ элементарныхъ вычисленій. Онъ состоить въ томъ, что изолирують радикаль и затымь возводять ур-ніе въ степень, изображаемую показателемъ изолированнаго корня. Такимъ образомъ освобождають ур-ніе отъ ирраціональности того числа, который быль отділень. Повторяя эту операцію столько разъ, сколько нужно для уничтоженія всёхъ радикаловъ, приводять такимъ образомъ ур-ніе къ раціональному виду. Но нужно помнить, что этотъ методъ приложимъ лишь въ некоторыхъ исключительныхъ случаяхъ. Такъ, этимъ способомъ можно освободить ур-ніе отъ квадратныхъ корней, каково бы ни было ихъ число.

ТЕОРЕМА. Всякое ур. можно освободить от радикаловь второй степени, каково бы ни было ихъ число, возвышениемь въ квадратъ объихъ частей иъсколько разъ.

Докажемъ эту теорему. Пусть будеть  $\sqrt{k}$  тогь радикаль, который желають уничтожить. Для того приведемъ ур-ніе къ виду  $P + Q\sqrt{k} = 0$ , гд $^k$  P и Q количества раціональныя или ирраціональныя, но не содержащія  $\sqrt{k}$ . Изолируя члень  $Q\sqrt{k}$  во второй части и возвышая об $^k$  части въ квадрать, получимъ ур-ніе  $P^2 = Q^2k$ , уже не содержащее радикала  $\sqrt{k}$ . Такимъ же образомъ можно освободить ур-ніе отъ другого, третьяго,.... квадратныхъ корней, сколько бы ихъ ни было.

Освободивъ такимъ образомъ ур-ніе отъ радикаловъ, рѣшаемъ полученное раціональное ур. вышеизложенными пріемами. Но легко доказать, что оно можетъ имѣть постороннія рѣшенія, не удовлетворяющія данному ур-нію.

560. ТЕОРЕМА.— Если объ части уравненія возвысить въ одинаковую степень, то получится уравненіе, вообще, не тождественное данному: оно необходимо удовлетворяется всъми корнями даннаю ур-нія, но можеть импть и постороннія ръшенія.

Въ самомъ дѣлѣ: І. Пусть дано ур-ніе

Возвысивъ объ его части въ квадратъ, найдемъ ур-ніе

Всякій корень ур-нія (1), ділая A равнымъ B, обращаеть разность (A — B) віз ноль, и слід. удовлетворяєть ур-нію (2).

Но последнее ур-ніе удовлетворяєтся еще теми значеніями неизв'єстнаго, при которых A + B обращаєтся въ ноль, т. е. корнями новаго ур-нія A = -B. Такимъ образомъ не всё корни ур-нія (2) необходимо удовлетворяють и (1).

Итакъ, ръшивъ ур-ніе (2), необходимо еще удостовъриться, удовлетворяють ли полученныя ръшенія ур-нію (1), т.-е. обращають ли эти ръшенія А и В въ количества одинаковаго знака.

Корни ур-нія A = -B называють посторонними или паразитными ръ-шеніями, введенными возвышеніемъ въ квадрать.

II. Возвышая объ части ур-нія A = B въ кубъ, найдемъ:  $A^3 = B^3$ ; но это ур. не тождественно данному, ибо содержить корни трехъ ур-ній

$$A = B$$
,  $A = B\alpha$ ,  $A = B\alpha^2$ ,

гдь а одинь изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ единицы.

III. Возвысивъ ур-ніе A = B въ четвертую степень, найдемъ ур.  $A^4 = B^4$ , которое опять общѣе даннаго, пбо удовлетворяется корнями четырехъ уравненій:

$$A = B$$
,  $A = -B$ ,  $A = Bi$ ,  $A = -Bi$ .

IV. Вообще, возвысивъ ур. A = B въ m-ую степень, получимъ ур.:

$$A^m = B^m$$
, или  $(A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + B^{m-1}) = 0$ ,

которое кром'в корней даннаго ур-нія удовлетворяєтся еще корнями ур-нія  $A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + B^{m-1} = 0.$ 

Можетъ оказаться, что это послъднее не содержитъ ръшеній, отличныхъ отъ корней ур-нія A — В; но такой случай исключителенъ.

Покажемъ на нъсколькихъ примърахъ примъненіе этого метода, причемъ главнымъ образомъ обратимъ вниманіе на ур-нія, содержащія радикалы второго порядка.

561. Примъръ І. — Ръшить уравненіе  $2x + \sqrt{5x - 4} = 12$ , содержащее только одинь радикаль.

Изолируя ирраціональный членъ, имбемъ:

$$\sqrt{5x-4}=12-2x;$$

возвысивъ въ квадратъ и приведя въ норядокъ члены, получимъ:

Корни этого ур-нія могуть удовлетворять одному изъ двухъ ур-ній:

$$\sqrt{5x-4}=12-2x$$
....(2),  $\sqrt{5x-4}=-12+2x$ ....(3)

такъ какъ и то, и другое, по возвышени въ квадратъ, одинаково даетъ ур-ніе (1). Замѣчая, что въ ур-хъ (2) и (3) передъ радикаломъ находится знакъ +, заключаемъ, что и вторыя части ихъ должны быть положительны; слѣд. дѣйствительные корни ур-нія (2) должны удовлетворять неравенству 12-2x>0, откуда x<6; а ур-нія (3) неравенству 12+2x>0, откуда x>6. Итакъ, предложенному ур-нію могутъ удовлетворять только корни, меньшіе 6.

Ръшивъ ур-ніе (1), находимъ:  $x' = 9\frac{1}{4}, x'' = 4$ .

x' нужно отбросить, а удержать x'; искомое ръшеніе: x=4.

Въ этомъ примъръ легко провърить найденные результаты, хотя, теоре-тически, это не необходимо.

Подстановка x = 4 въ предложенное ур-ніе даеть:

$$\sqrt{5 \times 4 - 4} = 12 - 2 \times 4$$
, min  $4 = 4$ .

Подстановка  $x=9\frac{1}{4}$  въ ур. (3) даетъ:  $\sqrt{\frac{37}{4}} \times 5-4=-12+\frac{37}{4} \times 2$ , или  $\frac{13}{2}=\frac{13}{2}$ .

Другой пріємъ. — Можно рѣшить данное ур. иначе, введеніемъ вспомогательнаго неизвъстнаго. Преобразуемъ ур. такъ, чтобы имѣть въ немъ раціональный членъ 5x — 4; для этого множимъ обѣ части на  $\frac{5}{2}$ , а потомъ вычитаемъ изъ нихъ по 4. Такимъ образомъ получаемъ тождественное съ даннымъ
уравненіе:

 $5x - 4 + \frac{5}{2}\sqrt{5x - 4} = 26.$ 

Положивъ  $\sqrt{5x-4}=y\dots(4)$ , даеть этому ур-нію видъ  $y^2+\frac{5}{2}$  y=26, откуда: y'=4,  $y''=-\frac{13}{2}$ . Но буквою y обозначенъ радикалъ положительный, поэтому отбрасываемъ y'' и удерживаемъ y'=4. Подставляя во вспомогат. ур. (4) вивсто y число 4, получаемъ ур.  $\sqrt{5x-4}=4$ , затъмъ 5x-4=16, откуда x=4

Этоть способъ позволяеть безъ труда отличать величины x, удовлетворяющія ур-нію, оть паразитных корпей.

562. Примъръ II. — Решить ур-піе  $x-1=\sqrt{3x-5}$ .

Возведя объ части въ квадрать и приведя въ порядокъ, получаемъ:

Корни этого ур-нія могутъ удовлетворять одному изъ двухъ уравненій: данному и  $x-1=-\sqrt{3x-5}\dots(2)$ , данному, если эти корни больше 1, и ур-нію  $x-1=-\sqrt{3x-5}$ , если они меньше 1. Рѣшивъ ур. (1), находимъ: x'=3, x''=2; оба корня >1, сл. оба удовлетворяютъ данному, но не удовлетворяютъ ур-нію (2), которое, так. обр., не имѣетъ рѣшеній.

563. Примъръ III. — Ръшить ур-ніе  $x + \sqrt{a^2 - x^3} = b$ , въ которомъ a и b — дъйствительныя и положительныя количества.

Изолируя радикаль, инфемь

$$\sqrt{a^2-x^2}=b-x\ldots\ldots\ldots(1)$$

Возвышая въ квадратъ и приводя въ порядокъ, имжемъ ур.

$$2x^2-2bx+(b^2-a^2)=0$$
...(2)

изъ котораго:

$$x' = \frac{b + \sqrt{2a^3 - b^2}}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$
  $x'' = \frac{b - \sqrt{2a^3 - b^2}}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$ .

Слёд. действительные ворни ур-нія (1) отличаются тёмъ признавомъ, что должны удовлетворять условію

$$x < b$$
.

Корни (3) и (4) будуть дъйствительны при условіи  $b^2-2a^2 < 0$ ; но квадратный относительно b триномъ  $b^2-2a^2$  имъєть корни:  $a\sqrt{2}$  и  $-a\sqrt{2}$ ; а какъ b положительно и должно заключаться между этими величинами, то необходимое и достаточное условіе дъйствительности x' и x'' есть

$$b 
eq a\sqrt{2}$$
.

Сверхъ того, дъйствительные кории должны быть меньше b.

Чтобы опредълить, какъ b расположено относительно корней ур-нія (2), изслъдуемъ знакъ подстановки b вмъсто x въ первую часть ур-нія (2). Результатъ подстановки =

$$b^2 - a^2$$
.

Если b < a, эта разность < 0, и саъд. b заключается между корнями x' и x'', а саъд. меньшій корень x'' < b, и потому удовлетворяеть предложенному ур.; другой корень x' > b, и сл. удовлетворяеть ур-нію (5).

Если b>a, что совивстно съ условіемъ  $b \approx a\sqrt{2}$ , то разность  $b^2-a^2$  положительна, и потому b заключается внё корней ур. (2), и какъ b больше полусуммы корней  $\left(\frac{b}{2}\right)$ , ибо b положительно, то b больше обоихъ корней; слёд. при  $a\sqrt{2}>b>a$  оба корня удовлетворяютъ данному ур-нію.

Итакъ, если измѣнять в въ ряду

$$0 \underbrace{\ldots \ldots}_{1} a \underbrace{\ldots \ldots}_{2} a \sqrt{2} \underbrace{\ldots \ldots}_{3} + \infty,$$

то: 1) когда в содержится въ первомъ интерваллъ, данное ур. имъетъ одно ръ-

шеніе x''; 2) когда b находится въ интервали 2, данное ур. имъетъ 2 ръшенія x' и x''; 3) если  $b > a\sqrt{2}$ , ур. не имъетъ дъйствительныхъ корней.

Въ предъльныхъ случаяхъ, ръшенія даннаго ур-нія будутъ:

При 
$$b = 0$$
 . . . . .  $x = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  
«  $b = a$  . . . . .  $x' = a$ ,  $x'' = 0$ ;  
•  $b = a\sqrt{2}$  . . . . .  $x' = x'' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

564. Когда ур. содержить два квадратных радикала, подъ которыми находится неизвъстное, нужно ихъ изолировать въ одной и той же части ур-нія, возвысить ур. въ квадратъ, затъмъ изолировать единственный оставшійся радикалъ, и возвысить ур. еще разъ въ квадратъ: въ результатъ получимъ урніе раціональное. Можно поступать еще такъ: изолируя одинъ изъ радикаловъ, возвышаемъ въ квадратъ, изолируемъ остающійся послъ этого радикалъ, и снова возвышаемъ ур-ніе въ квадратъ: ур-ніе обратится въ раціональное.

Такъ, если данное ур. будетъ

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$$
,

то возвысивъ въ квадратъ, найдемъ А + В + 2 $\sqrt{AB}$  = С°, или 2 $\sqrt{AB}$  = С° - - А - В; возвысивъ еще разъ, получимъ

$$4AB = (C^2 - A - B)^2$$

ур-ніе раціональное; но оно не тождественно данному, ибо можеть быть удовлетворено корнями какого-либо изъ четырехъ ур-ній:

 $+\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ ,  $+\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$ ,  $-\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$ ,  $-\sqrt{A}-\sqrt{B}=C$ , изъ ноихъ каждое приводитъ къ ур-нію  $4AB=(C^2-A-B)^2$ ; необходима, поэтому, провърка ръшеній на данномъ ур-ніи.

565. Примъръ І. — Ръшить уравненіе  $\sqrt{40+x} = \sqrt{18+2x}+1$ . Возвысивъ въ квадратъ, находимъ

$$40 + x = 18 + 2x + 2\sqrt{18 + 2x} + 1$$

или, изолируя радикалъ и дёлая приведеніе:  $21-x=2\sqrt{18+2x}$ ; возвысивъ еще разъ въ квадратъ:  $441-42x+x^2=72+8x$ , пли  $x^2-50x+369=0$ , откуда: x'=41, x''=9.

Эти корни не необходимо удовлетворяють данному ур-нію; они могуть удовлетворять какому либо изъ ур-ній:

$$\sqrt{40 + x} = \sqrt{18 + 2x + 1} \dots (1)$$

$$\sqrt{40 + x} = -\sqrt{18 + 2x + 1} \dots (2)$$

$$-\sqrt{40 + x} = \sqrt{18 + 2x + 1} \dots (3)$$

$$-\sqrt{40 + x} = -\sqrt{18 + 2x + 1} \dots (4).$$

Во-первыхъ устраняемъ ур. (2), ибо, написавъ его въ видъ  $\sqrt{40+x}+\sqrt{18+2x}=1$ , замъчаемъ, что при положительномъ x (а таковы x' и x'')

первая часть всегда больше 1. Точно такъ же, ур. (3) не можетъ быть удовлетворено нивакимъ дъйствительнымъ значеніемъ x, ибо первая часть его <0, вторая же >0. Такимъ образомъ, найденные корни могутъ удовлетворять только ур-мъ (1) и (4). По ур. (1) разность  $\sqrt{40+x}-\sqrt{18+2x}$ , какъ равная +1, должна быть >0; по (4) она д. б. <0. Сл. необходимо, чтобы было:  $\sqrt{40+x}>\sqrt{18+2x}$ , или 40+x>18+2x, или x<22. Слъд. данному ур-нію удовлетворяетъ x''=9; x'=41 удовлетворяетъ ур-нію (4). Легко нотвердить то и другое прямою подстановкою.

566. Примъръ II. — Решить ур-ніе

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{c+x},\ldots \ldots (1)$$

въ которомъ а, b и с произвольныя дъйствительныя количества.

Возвысивъ объ части въ нвадратъ, находимъ

$$a + x + b + x + 2\sqrt{x^2 + (a + b)x + ab} = c + x$$

или, изолируя радикалъ и упрощая:

$$2\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}=(c-a-b)-x$$
 . . . (2).

Возвысивъ еще разъ въ квадратъ и приведя въ порядокъ:

$$3x^2 + 2(a+b+c)x + [4ab - (c-a-b)^2] = 0$$
. (3).

Ръшивъ ур. ніе (3), находимъ:

$$x = \frac{-(a+b+c) \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}}{3}.$$

Корни будуть дъйствительны при условіи

$$c^2 - (a+b)c + a^2 + b^2 - ab \ge 0$$
 . . . . . . . . (4)

Чтобы изслёдовать это неравенство, посмотримъ, будутъ-ли корни тринома въ c дёйствительны или мнимы, составивъ для этого разность  $(a+b)^2-4(a^2+b^2-ab)$ , которая приводится къ  $-3(a-b)^2$ ; слёд. корни тринома въ c мнимы, а потому онъ всегда положителенъ, а корни ур. (3) всегда дёйствительны.

Изследуемъ, удовлетворяютъ-ли они ур-нію (1), а для этого заметимъ, что прежде всего они должны удовлетворять ур-нію (2); но всякій действительный корень ур нія (2) долженъ быть меньше c-a-b; поэтому, нужно убедиться, иметъ-ли ур. (3) корни, меньшіе c-a-b. Въ этихъ видахъ въ триномъ (3) подставимъ вмёсто x количество c-a-b; результатъ подстановки =

Триномъ (5) имъетъ дъйствительные корни а и b. Если c будетъ заключаться между a и b, то триномъ (5) будетъ отрицателенъ; если же c будетъ дежать внъ интервалла между a и b, триномъ (5) будетъ
положителенъ. Итакъ: когда c заключается между a и b, результатъ
подстановки количества c-a-b вмъсто x въ триномъ (3) отрицателенъ, а патому c-a-b содержится между корнями этого тринома, т. е.
одинъ и только одинъ изъ корней ур-нія (3) будетъ меньше c-a-b, и по-

тому будетъ удовлетворять ур-нію (3). Если с межитъ внё интервалла между a и b, триномъ (5) будетъ положителенъ, слёд. c-a-b будетъ заключаться внё корней ур-нія (3), т. е. или оба корня > c-a-b, или оба они < c-a-b. Какой изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, — это зависитъ отъ сравнительной величины c-a-b съ полусуммою корней ур. (3), т. е. съ  $-\frac{1}{3}(a+b+c)$ . Если будетъ  $c-a-b<-\frac{a+b+c}{3}$ , или  $c<\frac{a+b}{2}$ , то c-a-b будетъ < c-a-b, и потому не удовлетворяютъ ур-нію (2). Если же  $c-a-b>-\frac{a+b+c}{3}$ , т. е. если c больше количествъ a и b, оба корня больше c-a-b, и потому оба удовлетворяютъ ур-нію (2).

Но если какой-либо изъ корней ур. (3) удовлетворяеть ур-нію (2), то онъ служить корнемъ одного изъ ур-ній

ибо передъ удвоеннымъ произведениемъ радикаловъ въ ур-ніи (2) находится знакъ —; но очевидно, что никакой дъйствительный корень не можетъ удовлетворять ур·нію (7), слъд. онъ удовлетворятъ ур-нію (6).

Итакъ, если напр. a < b:

$$-\infty$$
  $\underbrace{\ldots}_{1}$   $\underbrace{a}$   $\underbrace{\ldots}_{2}$   $\underbrace{b}$   $\underbrace{\ldots}_{3}$   $\underbrace{+}$   $\underbrace{\infty}_{3}$ 

то предыдущее изслёдованіе приводить въ такимъ заключеніямъ: 1) когда c находится въ интервалл $\hat{s}$  1, ни одинъ изъ корней ур-нія (3) не удовлетворяетъ данному; 2) когда c находится въ интервалл $\hat{s}$  2, данному ур. удовлетворяетъ меньшій корень ур-нія (3); 3) когда c находится въ интервалл $\hat{s}$  3, оба корня ур. (3) удовлетворяютъ данному.

567. Что касается провърки корней, то иногда ее можно дълать и другими пріемами. Пусть, напр., требуется ръшить ур-ніе

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a}$$
.

Возвышая первый разъ въ квадратъ, найдемъ:  $2\sqrt{a^2-x^2}=-a$ ; возвысивъ въ квадратъ другой разъ, получимъ:  $4a^2-4x^2=a^2$ , или  $x^2=\frac{3}{4}a^2$ , откуда  $x=\pm\frac{a}{2}\sqrt{3}$ . Подставляя то или другое значеніе x въ данное ур., одинаково находимъ, по сокращеніи на  $\sqrt{a}$ :

$$\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

Такт какт объ части этого разенства положительны, то для провърки его можемъ ихъ возвысить въ квадрать; находить 1+1+1=1, что невърно, слъд. ни одинъ изъ корней не удовлетворяетъ данному ур-нію. Но если въ немъ передъ вторымъ радикаломъ взять —, то получится 1-1+1=1,

что върно. Заключаемъ, что найденные корни принадлежатъ ур-нію  $\sqrt{a+x}$  —  $\sqrt{a-x}$  —  $\sqrt{a}$ .

568. — Для провърки ръшеній можно иногда съ успъхомъ примънять преобразованіе сложнаго радикала въ алгебранческую сумму простыхъ радикаловъ. Пусть требуется ръшить ур-ніе

$$x + \sqrt{x} = a$$

и провърить ръшенія. Изолируя радикаль, имъемъ  $\sqrt{x}=a-x$ , а возвышая въ ввадрать, получаемъ

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 = 0.$$

Корни этого ур-нія, которое общёє даннаго, действительны при условіи  $(2a+1)^2-4a^2 > 0$ , или  $a > -\frac{1}{4}$ . Полагая это условіє выполненнымъ, находимъ 2 действительныхъ корня:

$$x' = \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}, \qquad x'' = \frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Написавъ предложенное ур ніе въ видъ  $\sqrt{x} = a - x$ , подставляемъ первый корень x'; въ первой части получается сложный радикалъ, который разлагаемъ на два простыхъ:

$$\sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1+2\sqrt{a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2a+1-2\sqrt{a^2}}$$

Когда a>0 и равно  $+\alpha$ , то  $\sqrt{a^2}=+\alpha$ ; если же a<0 и равно  $-\alpha$ , то  $\sqrt{a^2}=-\alpha$ ; но легко видёть, что въ обоихъ случаяхъ

$$\sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1}.$$

Вторая же часть a-x ур-нія обращается въ

$$a - \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4a+1};$$

заключаемъ, что x', не дълая объ части ур-нія  $\sqrt{x} = a - x$  равными, не удовлетворяетъ этому ур-нію; но легко видъть, что этотъ корень удовлетворяетъ ур-нію  $x - \sqrt{x} = a$ .

Подстановка втораго корня x'' даеть въ первой части ур-нія  $\sqrt{x}=a-x$ :

$$\sqrt{\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1+2\sqrt{a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2a+1-2\sqrt{a^2}}.$$

При a>0, это выраженіе приводится въ  $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$ ; при a<0 къ  $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$ ; между тъмъ какъ вторая часть, a=x'', даетъ  $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$ ; заключаемъ, что x'' удовлетворяетъ предложенному ур-нію только при a>0. Итакъ:

при  $a<-\frac{1}{4}$  корни ур-нія мнимы;  $\text{при} -\frac{1}{4} < a < 0 \ \text{ур-ніе не им'єтъ р'єтеній;}$ при a>0 оно им'єтъ 1 корень, равный  $\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$ 

569. — При ръшеніи ирраціональных ур-ній, какъ и всегда, слъдуетъ пользоваться встми средствами, ведущими къ упрощенію вычисленій; въ этомъ отношеніи съ уситхомъ примъняются иногда и нъкоторые искуственные пріемы.

### 1. Такъ для ръшенія ур-нія

$$\frac{\sqrt{5x-4}+\sqrt{5}-x}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{5}-x} = \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x-1}}$$

примъняемъ свойство пропорціи (§ 328, II, (10)), и тотчасъ получаемъ, по совращеніи на  $2:\frac{\sqrt{5x-4}}{\sqrt{5-x}}=\sqrt{4x}$ , откуда, по возвышеніи въ квадрать и по освобожденіи отъ знаменателя:  $5x-4=20x-4x^2$ , или  $4x^2-15x-4=0$ . Легко провърить, что оба корня этого ур-нія: x'=4,  $x''=-\frac{1}{4}$  удовлетворяютъ данному ур-нію.

2. Ръшить ур-ніе  $x^2 - 7x + \sqrt{x^3 - 7x + 18} = 24$ .

Примъняя прісмъ, указанный въ § 561, прибавляємъ къ объимъ частямъ ур-нія по 18, и въ ур-ніи

$$x^2 - 7x + 18 + \sqrt{x^2 - 7x + 18} = 42$$

полагаемъ  $\sqrt{x^2-7x+18}=y$ ; рѣшивъ ур-ніе въ y

$$y^2 + y - 42 = 0$$
,

находимъ корни: y'=6, y''=-7. Отбрасывая второй, ибо въ данномъ ур-нім передъ радикаломъ стоитъ знакъ +, получаемъ ур-ніе:  $\sqrt{x^2-7x+18}=6$ , откуда  $x^2-7x-18=0$ . Легко видёть, что корни этого ур-нія: x'=9, x''=-2 удовлетворяютъ данному ур-нію.

3. Пусть еще требуется ръшить ур-ніе

$$(x+2)^2 + 2\sqrt{x}(x+2) - 3\sqrt{x} = 46 + 2x;$$

это ур. легко привести къ виду:  $x^2 + 2x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} = 42$ , или

$$(x+\sqrt{x})^2+(x+\sqrt{x})=42....(\alpha)$$

Положивъ  $x+\sqrt{x}=y$ , получаемъ ур-ніе  $y^2+y-42=0$ , имъющее корни y'=6, y''=-7. Затъмъ ръшаемъ ур нія  $x+\sqrt{x}=6$ , или  $x^2-13x+36=0$ , п  $x+\sqrt{x}=-7$ , или  $x^2+13x+49=0$ . Первое имъетъ корни 9 и 4; второе  $\frac{-13\pm3\sqrt{3}\cdot i}{2}$  Повърка покажетъ, что изъ нихъ ур-нію ( $\alpha$ ) удовлетво-

раютъ только 4 и  $-\frac{13+3\sqrt{3}.i}{2}$ .

Iримпчанiе. Для повърки корня  $-rac{13+3\sqrt{3}\cdot i}{2}$  преобразовываемъ

$$\sqrt{rac{13}{2} + rac{3\sqrt{3}}{2} \cdot i}$$
 по формуль § 440,6, въ  $rac{3\sqrt{3} + i}{2}$ ,

а сивдовательно 
$$\sqrt{-\frac{13+3\sqrt{3}\cdot i}{2}}$$
 въ  $\frac{3\sqrt{3}\cdot i-1}{i2}$  и подставляемъ въ  $(\alpha)$ .

570. Приводимъ, въ заключеніе, примъры на прраціональныя ур-нія, содержащія радикалы выше втораго порядка.

1. Ръшить ур.  $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ .

Возвышаемъ объ части въ кубъ, примъняя формулу  $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$ ; получаемъ:

$$a + x + a - x + 3\sqrt[3]{a^2 - x^2}(\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x}) = 2a.$$

Приводя и замъчая, что выражение въ скобкахъ, въ силу даннаго ур., равно  $\sqrt[3]{2a}$ , находимъ ур.

$$3\sqrt[3]{a^2-x^2}$$
 .  $\sqrt[3]{2a}=0$ , или  $\sqrt[3]{a^2-x^2}=0$ , откуда  $a^2-x^2=0$ , слъд.  $x=\pm a$ .

Оба корня удовлетворяють предложенному ур-нію.

2. Primits yp-nie 
$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(\frac{1-a^2}{(1+a)^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Сокративъ дробь второй части на 1+a; положивъ, затъмъ,  $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=y$ , и слъд.  $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1-x}}=\frac{1}{y}$ , получаемъ ур-ніе

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot y + \frac{1}{y} = 2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}, \text{ when } \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot y^2 - 2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}} \cdot y + 1 = 0,$$

откуда

$$y = \sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Такимъ образомъ получаемъ ур. въ x:  $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}$ , или  $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1+a}{1-a}$ , откуда x = -a.

Корень этотъ удовлетворяетъ предложенному ур-нію.

3. Ръшить ур-ніе

$$\left(x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(x - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = 97x^{\frac{2}{3}} - \frac{1300}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Выполнивъ умноженіе въ первой части, освободивъ ур. отъ знаменателя и приведя въ порядокъ, находимъ:

$$x^{\frac{8}{3}} - 97x^{\frac{4}{3}} + 1296 = 0.$$

Это ур. — ввадратное относительно  $x^{\frac{4}{3}}$  — даеть:  $x^{\frac{4}{3}} = 81$ .  $x^{\frac{4}{3}} = 16$ . откуда:

$$x^4 = 81^3 = (3^4)^3 = (3^3)^4 = 27^4; \quad x^1 = 16^3 = (2^4)^3 = (2^3)^4 = 8^4.$$

Ръшивъ оба двучленныя ур-нія четвертой степени, находимъ 8 корней:  $\pm 27$ ;  $\pm 27i$ ;  $\pm 8$ ;  $\pm 8i$ .

#### 571. Задачи.

Рфшить ур-нія:

1. 
$$\frac{2}{\sqrt{2+x+2}} - \frac{2}{\sqrt{2-x-2}} = -\frac{16}{x^2-4}$$
. 2.  $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x+1}}$ .

3. 
$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5\sqrt{x}$$
.

3. 
$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5\sqrt{x}$$
. 4.  $\sqrt{2x+1} + \sqrt{7x-27} = \sqrt{3x+4}$ .

5. 
$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-3} = 10$$

5. 
$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-3} = 10$$
. 6.  $\sqrt{3x-3} + \sqrt{5x-19} = \sqrt{3x+4}$ .

7. 
$$\sqrt{x+17} + \sqrt{x-4} = \frac{7}{4}\sqrt{2x}$$
. 8.  $\sqrt{12+x} = \sqrt{7x+8} - 2$ .

8. 
$$\sqrt{12+x} = \sqrt{7x+8}-2$$
.

9. 
$$\frac{5x-1}{\sqrt{5x}+1} = 1 + \frac{\sqrt{5x}-1}{2}$$

9. 
$$\frac{5x-1}{\sqrt{5x}+1} = 1 + \frac{\sqrt{5x}-1}{2}$$
. 10.  $\frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}} + 3\sqrt{2x+1} = 7\sqrt{x}$ .

11. 
$$\frac{\sqrt{3x^3 - 15x^2 - 8x + 4} - \sqrt{x^2 - 5x - 2}}{\sqrt{3x^3 - 15x^2 - 8x + 4} + \sqrt{x^2 - 5x - 2}} = \frac{\sqrt{3x - 2} - 1}{\sqrt{3x - 2} + 1}.$$

12. 
$$\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{3}{\sqrt{x+x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{1+x}$$

12. 
$$\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{3}{\sqrt{x+x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{1+x}$$
. 13.  $2(1+\frac{9}{x}) + 3\sqrt{\frac{x+9}{x}} = 14$ .

14. 
$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$$
.

15. 
$$\sqrt{28+2x} = \sqrt{21+x} + 1$$
.

16. 
$$\sqrt{2x+7} + \sqrt{5x-9} = 3\sqrt{x}$$

16. 
$$\sqrt{2x+7} + \sqrt{5x-9} = 3\sqrt{x}$$
. 17.  $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-19} = \sqrt{5x-27}$ .

18. 
$$\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-6}$$
.

18. 
$$\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-6}$$
. 19.  $3\sqrt{x+15} = 7\sqrt{x-5} - 5\sqrt{x-17}$ .

20. 
$$2x^9-15=4[\sqrt{x^9+12x-20-6x}]$$

20. 
$$2x^2-15=4[\sqrt{x^2+12x-20}-6x]$$
. 21.  $x^2-\sqrt{2x^2-8x+12}=4x+6$ .

22. 
$$x+4+\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=\frac{12}{x-4}$$

22. 
$$x+4+\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=\frac{12}{x-4}$$
. 23.  $\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^3}$ .

24. 
$$3x^2 - 307 = 4(\sqrt{x^2 - 4x + 4} + ^*3x)$$
.

25. 
$$6x^2 + 15x - 49 = \sqrt{2x^2 + 5x + 7}$$

25. 
$$6x^2+15x-49=\sqrt{2x^2+5x+7}$$
. 26.  $60-4\sqrt{x^2+x+6}=x^2+x+6$ .

27. 
$$x^2-24=3\sqrt{x^2-2x+16+2x}$$

27. 
$$x^2-24=3\sqrt{x^2-2x+16+2x}$$
. 28.  $5x-7x^2+8\sqrt{7x^2-5x+4}=8$ .

29. 
$$\frac{5(3x-1)}{1+5\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x}$$
. 30.  $\frac{x}{3+x} + \frac{3}{\sqrt{3+x}} = \frac{4}{x}$ .

30. 
$$\frac{x}{3+x} + \frac{3}{\sqrt{3+x}} = \frac{4}{x}$$

31. 
$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}}{3} = \frac{20 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}} \qquad 32. \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + 5. \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{9}{2}.$$

32. 
$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + 5. \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{9}{2}$$

33. 
$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$$
.

34. 
$$\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}} + \sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}} = 2\frac{1}{2}$$

35. 
$$8\sqrt{x} + 21\sqrt[4]{x} = 74$$
.

$$36. \frac{9\frac{3}{5} - \frac{3}{2}\sqrt{x} - x}{5\sqrt{x} - 8} + \frac{31}{50} = \frac{4}{5} \cdot \frac{74\sqrt{x} - x}{4x - 7}^{\frac{3}{2}}.$$

37. 
$$x^3 - 26 = 9\sqrt{x^2 - 4}$$
.

38. 
$$x^3 - x\sqrt{x} = 15500$$

39. 
$$\sqrt{x^2+17}-\sqrt[4]{x^2+17}=6$$
. 40.  $ab\sqrt{a-x}=(a-x)\sqrt{x}$ .

40. 
$$ab\sqrt{a-x} = (a-x)\sqrt{x}$$

41. 
$$x - (a+b)\sqrt{x} = 2a(a-b)$$

41. 
$$x-(a+b)\sqrt{x}=2a(a-b)$$
. 42.  $x+cd=(c+d)\sqrt{x}+2(c-d)^2$ .

43. 
$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=a$$
. 44.  $\sqrt{x}+\sqrt{a}-\sqrt{ax+x^2}=\sqrt{a}$ .

44. 
$$\sqrt{x} + \sqrt{a} - \sqrt{ax + x^2} = \sqrt{a}$$
.

45. 
$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{\frac{3b^2 + x^2}{a+b}}$$

45. 
$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{\frac{3b^2 + x^2}{a+b}}$$
 46.  $\sqrt{a-x} + \sqrt{-(a^2 + ax)} = \frac{a}{\sqrt{a-x}}$ 

47. 
$$x + a\sqrt{x^2 - b^2} = -\frac{ax^2 + ab^2}{\sqrt{x^2 - b^2}}$$
.

48. 
$$\frac{a}{x+\sqrt{x^2-a+b}} - \frac{a}{x-\sqrt{x^2-a+b}} = x$$
.

49. 
$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{x+b} + \sqrt{x-b}} = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{\sqrt{x+b} - \sqrt{x-b}}$$
.

50. 
$$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}} = \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$$

51. 
$$\frac{\sqrt{3a-4b+5x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{3a-4b+5x}-\sqrt{x-a}} = \sqrt{\frac{x+a}{5(x-b)}}$$

52. 
$$\frac{\sqrt{a+3b+x}+\sqrt{9a+11b-7x}}{\sqrt{a+3b+x}-\sqrt{9a+11b-7x}} = \sqrt{\frac{3a+b-x}{2(a+3b-x)}}.$$

53. 
$$\frac{\sqrt{(a-x)^2} + \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}} = \frac{7}{3}.$$

$$54.\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} - \sqrt{\frac{b-x}{a-x}} = c.$$

54. 
$$\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} - \sqrt{\frac{b-x}{a-x}} = c$$
. 55.  $\frac{x^2}{8a} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3a} + \frac{x^2}{4}} - \frac{a}{2}$ .

56. 
$$\sqrt{6x-a}+4x-3a=0$$
.

57. 
$$x + \sqrt{2x - a^2} = 3a$$

$$58. \ 2x - \sqrt{x^2 - a^2} = 4a.$$

58. 
$$2x - \sqrt{x^2 - a^2} = 4a$$
. 59.  $\sqrt{x^2 - 3ax + a^2} + \sqrt{x^2 + 3ax + a^2} = a(\sqrt{29} + \sqrt{10})$ .

60. 
$$\sqrt{(1+x)^2-ax}+\sqrt{(1-x)^2+ax}=x$$
.

61. 
$$(a+b)\sqrt{a^2+b^2+x^2}-(a-b)\sqrt{a^2+b^2-x^2}=a^2+b^2$$
.

62. 
$$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+\sqrt{a+x}}} = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-\sqrt{a-x}}}$$
. 63.  $\sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{\frac{x}{a}} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$ .

64. 
$$\frac{a - \sqrt{2ax - x^2}}{a + \sqrt{2ax - x^2}} = \frac{x}{a - x}$$
 65.  $\frac{a + x + \sqrt{a^2 - x^2}}{a + x - \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{c}{x}$ .

66. 
$$x + 2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)+x} + 10ab = 0$$
.

67. 
$$\sqrt{(x-a)(x-b)} + \sqrt{(x-c)(x-a+b-c)} = \sqrt{(a-c)(b-c)}$$
.

68. 
$$(\sqrt{a^2-4x^2+a+2x})$$
.  $5x=(a+2x-\sqrt{a^2-4x^2})a$ .

69. 
$$\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x^2} = 350$$
.

70. 
$$\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2$$

71. 
$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{-x} = n(n+1)$$
.

69. 
$$\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x^2} = 350$$
.
70.  $\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2$ .
71.  $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{-x} = n(n+1)$ .
72.  $\sqrt[3]{a - x} - \sqrt[3]{b - x} = \sqrt[3]{a - b}$ .

73. 
$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$
.

73. 
$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$
. 74.  $\sqrt[3]{(a+x)^2} - \sqrt[3]{a^2-x^2} + \sqrt[3]{(a-x)^2} = \sqrt[3]{a^2}$ .

75. 
$$5m\sqrt{x^2-\frac{2(a+m)^2x}{5m}}+\frac{\frac{1}{5}(m^2-a^2)^2\cdot m^{-1}}{\sqrt{x^2-\frac{2(a+m)^2x}{5m}}}=2(a^2+m^2).$$

76. 
$$3x^n$$
 .  $\sqrt[3]{x^n} + \frac{2x^n}{\sqrt[3]{x^n}} = 16$ .

77. 
$$x^{\frac{1}{3}}\sqrt[5]{x^3} - 6280x^{\frac{1}{5}}\sqrt[5]{x^4} = 1843641.$$

78. 
$$\sqrt[4]{x+9} - \sqrt[4]{x-7} = 2$$
.

79. 
$$\sqrt[4]{26-x} + \sqrt[4]{x-10} = 2$$
.

80. 
$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x} + \sqrt[n]{\frac{a+x}{a}} = \sqrt[n]{\frac{x}{c}}.$$

81. 
$${}^{2pq}\sqrt{x^{p+q}} - \frac{1}{2}(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}) \cdot \{\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x}\} = 0.$$

82. 
$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{x-b}$$

82. 
$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{x-b}$$
. 83.  $\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}$ .

### ГЛАВА XXXVII.

## Системы уравненій второй степени и высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

Системы уравненій, изъ которыхъ одно второй, остальныя-первой степени.--Системы двухъ уравненій второй степени. —Системы уравненій второй степени болье чемъ съ двумя неизвъстными. -- Системы уравненій высшихъ степеней, приводимыя въ ввадратнымъ.

572. Уравненіе второй степени съ двумя неизв'єстными x и y есть цілое раціональное ур-ніе, содержащее члены: съ квадратами обоихъ неизвъстныхъ, съ ихъ произведеніемъ, съ первыми степенями неизвёстныхъ, и члены, независящіе отъ неизвъстныхъ; слъд. это есть ур-ніе вида

$$Ax^{2} + Bxy + Cy^{2} + Dx + Ey + F = 0.$$

Подобно этому, общій видъ ур-нія второй степени съ тремя неизв'єстными есть

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

Системою уравненій второй степени съ двумя или нёсколькими неизвёстными называютъ такую систему, въ которой по крайней мёрё одно ур-ніе второй степени, а остальныя—первой или второй степени.

I. Системы ур-ній, изъ которыхъ одно — второй степени.

573. Система ур-ній съ двумя неизвъстными, взъ которыхъ одно-второй, а другое-первой степени, имъетъ видъ:

$$\begin{cases} Ax^{2} + Bxy + Cy^{2} + Dx + Ey + F = 0 \dots \dots (1) \\ Lx + My + N = 0 \dots \dots (2). \end{cases}$$

Выражая изъ (2) y въ зависимости отъ x, имъемъ

$$y = -\frac{Lx + N}{M}$$

Внося это значение въ ур. (1), получимъ:

$$Ax^2 - \frac{Bx(Lx + N)}{M} + \frac{C(Lx + N)^2}{M^2} + Dx - \frac{E(Lx + N)}{M} + F = 0.$$

Выполняя дъйствія, располагая члены по степенямь x и полагая для краткости

$$P = AM^2 - BLM + CL^2$$
,  $Q = -BMN + 2CLN + DM^2 - ELM$ ,  
 $R = CN^2 - EMN + FM^2$ ,

замъняемъ данную систему ей тождественною:

$$Px^{2} + Qx + R = 0, y = -\frac{Lx + N}{M}$$

Первое ур-ніе дасть для x два значенія: x' и x''; внося ихъ поочередно во второе ур., найдемъ соотвътствующія значенія для y: y' и y''. Итакъ, данная система ур-ній ниветь двъ системы рѣшеній:

$$x = x', y = y'$$
 if  $x = x'', y = y''$ .

Эти ръшенія будуть мнимы, если  $Q^2-4PR<0$ ; представять двъ дъйствительныя системы при  $Q^2-4PR>0$ ; и сливаются въ одну систему ръшеній при  $Q^2-4PR=0$ .

Примъръ. — Рѣшить систему

$$5x^{2} - 8xy + y^{2} - 7x + 5y + 4 = 0,$$
  
$$6x - y - 4 = 0.$$

Изъ втораго ур-нія пићемъ: y=6x-4; подставляя это значеніе y въ первое ур., находимъ:  $7x^2-7x=0$ , откуда: x'=0, x''=1. При x'=0 имъемъ y'=-4; при x''=1 получаемъ y''=2. Итакъ находимъ двъ системы ръшеній:

$$x'=0, y'=-4; x''=1, y''=2.$$

574. Цусть дана система n ур-ній съ n неизв'ястными, и пусть одно изъ этихъ ур-ній — второй степени, а остальныя — первой. При помощи n — 1

ур-ній первой степени можно n-1 неизв'єстных выразить черезъ n-ое; таким образом получится n-1 новых ур-ній 1-й степдни вида

$$y = ax + b$$

$$z = a'x + b'$$

$$u = a''x + b''$$

Внося всё эти значенія въ ур-ніе второй степени, получимъ квадратное ур. съ неизвёстнымъ x; изъ него найдемъ для x два значенія: x' и x''. Каждому изъ этихъ значеній соотвётствуєтъ своя система значеній неизвёстныхъ  $y,\ z,\ u,\ldots$  Данныя ур-нія имёютъ двё системы значеній.

Примъръ. Ръшить систему

$$x^{2} + 3z^{2} + 2yz - 10xy - 2x + 5y - 25 = 0,$$
  

$$5x + 22y + 7z = 4,$$
  

$$21x - 7y + z = 31.$$

Выражая изъ двухъ последнихъ ур-ній y и z черезъ x, имъемъ:

$$y = 2x - 3$$
,  $z = -7x + 10$ ;

внося въ первое ур-ніе, находимъ квадратное ур. въ x:

$$x^2-3x+2=0$$
,

откуда: x'=1, x''=2. Сатд. ръшенія предложенной системы будуть:

$$x'=1, y'=-1, z'=3; n x''=2, y''=1, z''=-4.$$

**575.** Разсмотримъ ръшеніе нъкоторыхъ замъчательныхъ системъ, прилагая особые искусственные пріемы, болье изящные, нежели указанный общій пріемъ.

### I. Ръшить систему

$$\begin{array}{c} x+y=a \\ xy=b^2 \end{array} \}.$$

Такъ какъ здёсь дается сумма и произведеніе неизвёстныхъ, то послёднія опредёлятся какъ корни квадратнаго ур-нія, иміющаго коэффиціентомъ при первой степени неизвёстнаго количество — a, а извёстнымъ членомъ  $b^2$ :

$$z^2 - az + b^2 = 0$$
,

откуда

$$z' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}, \ z'' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Одно значеніе z принимаємъ за x, другое за y; такимъ образомъ получаємъ двѣ системы рѣщеній:

$$\begin{cases} x' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \\ y' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \end{cases} \quad \text{II} \quad \begin{cases} x'' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \\ y'' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \end{cases}$$

Что такъ доджно быть, понятно à priori, ибо x и y въ данныя уравненія входять одинаковымъ образомъ.

Другой привмъ. Возвысивъ первое уравнение въ квадратъ, имъемъ:  $x^2+2xy+y^2=a^3$ ; помноживъ второе ур. на 4 и вычтя изъ предыдущаго, находимъ:  $x^2-2xy+y^2=a^2-4b^2$ , или  $(x-y)^2=a^2-4b^2$ ; откуда:  $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b^2}$ . Такимъ образомъ, предложенная система можетъ быть замънена двумя ей тождественными:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=\sqrt{a^2-4b^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=-\sqrt{a^2-4a^2} \end{array} \right.$$

Ръшая ту и другую, найдемъ прежнія двъ системы ръшеній.

II. Рѣшить систему

$$\begin{array}{c}
 x - y = a \\
 xy = b^2
 \end{array}$$

Легко эту систему привести къ предыдущей: стоитъ только положить y = -y'. Такимъ образомъ получимъ ур-нія

$$x + y' = a$$
,  $xy' = -b^2$ ,

изъ которыхъ видно, что x и y' суть корни ур-нія

$$z^3 - az - b^2 = 0$$
,

слъд.: вторая система имъетъ ръщенія:

$$\begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} & x = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} & y' = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \end{cases}$$

Подставляя сюда y вмёсто — y', найдемъ рёшенія предложенной системы:

$$\begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} & x = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} & y = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}. \end{cases}$$

Другой привмъ. Возводя первое изъ данныхъ ур-ній въ квадратъ, умножая второе на 4, и складывая, получаемъ

$$(x+y)^2 = a^2 + 4b^2$$
, отвуда  $x+y = \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}$ .

Такимъ образомъ предложенная система замъняется двумя:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + y = +\sqrt{a^2 + 4b^2} \end{cases} \quad \text{II} \quad \begin{cases} x - y = a \\ x + y = -\sqrt{a^2 + 4b^2} \end{cases},$$

изъ которыхъ и находимъ прежнія двѣ системы рѣшеній.

III. Ръшить систему

$$x^{2} + y^{2} = a^{2}$$
  
 $x + y = b$ .

Возвысивъ въ ввадратъ объ чачти втораго ур-нія, имъемъ  $x^2+2xy+y^2=b^2$ ; вычитая изъ этого ур-нія почленно первое, имъемъ:  $2xy=b^2-a^2$ , откуда

$$xy = \frac{b^2-a^2}{2}$$
.

Такимъ образомъ извъстны: сумма b и произведение  $\frac{b^2-a^2}{2}$  неизвъстныхъ x и y; елъд. x и y суть корни ур-нія

$$z^2 - bz + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0.$$

Итакъ, имъемъ двъ системы ръшеній:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \\ y = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \\ y = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \end{array} \right.$$

IV. Ръшить систему

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= a^2 \\
x - y &= b.
\end{aligned}$$

Рѣшеніе этой системы приводится къ предыдущей; ибо, положивъ y = -y', получаемъ систему

$$x^2 + y^2 = a^2$$
,  $x + y' = b$ ,

откуда прямо можемъ написать объ системы ръщеній:

$$\begin{cases} x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \\ y = -y' = \frac{-b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \\ y = -y' = \frac{-b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}. \end{cases}$$

V. Ръшить систему

$$x^2 - y^2 = a^2$$
$$x + y = b.$$

Исключивъ y, найдемъ ур-ніе  $2bx-b^2=a^2$ — первой степени; изъ него  $x=rac{a^2+b^2}{2b}$ , и слёдовательно  $y=rac{b^2-a^2}{2b}$ .

Можно ръшить эту систему еще такъ: замъчая, что  $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ , мы, раздъливъ первое ур. на второе, найдемъ ур.

$$x-y=\frac{a^2}{b};$$

комбинируя это ур-ніе съ ур-мъ x+y=b, найдемъ x и y.

Подобнымъ же образомъ ръшается система

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$x - y = b$$

II. Система двухъ уравненій второй степени съ двужи неизв'ястными.

576. Вообще, система двухъ ур-ній второй степени съ двумя неизвъстными приводить къ полному ур-нію четвертой степени.

Пусть данная система будеть:

$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0 \dots (2)$$

Исключимъ сначала  $y^2$ , умноживъ ур. (1) на c', (2) на c и вычтя почленно одно ур. изъ другаго; найдемъ ур-ніе

$$(ac'-ca')x^2+(bc'-cb')xy+(dc'-cd')x+(ec'-ce')y+fc'-cf'=0$$

или, обозначивъ каждый изъ коэффиціентовъ одною буквою:

$$lx^2 + mxy + nx + py + q = 0$$
....(3)

Это ур-ніе, въ сочетаніи съ однимъ изъ данныхъ, напр. съ (1), составить новую систему, тождественную съ данною. Изъ ур. (3) находимъ

$$y = -\frac{lx^2 + nx + q}{mx + p};$$

подставивъ это значение y въ ур. (1), получимъ

$$ax^{2} - \frac{bx(lx^{2} + nx + q)}{mx + p} + \frac{c(lx^{2} + nx + q)^{2}}{(mx + p)^{2}} + dx - \frac{e(lx^{2} + nx + q)}{mx + p} + f = 0.$$

Освободивъ это ур. отъ дробей, выполнивъ всѣ вычисленія и приведя въ порядовъ, получимъ, вообще, полное ур. четвертой степени:

$$Ax^4 + Bx^8 + Cx^2 + Dx + E = 0 \dots (4)$$

которое, въ соединенів съ (3), составляеть систему, тождественную данной. Полное ур. четвертой степени (4) въ общемъ видѣ не можеть быть рѣшено способами элементарной алгебры; мы можемъ рѣшать ур-ніе 4-й ст. только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, когда напр. оно биквадратное, или возвратное, или степень его понижается до второй; въ такихъ случаяхъ безъ труда найдемъ четыре значенія для x: подставивъ каждое изъ нихъ въ ур. (3), получимъ четыре соотвѣтствующія значенія для y.

Такимъ образомъ, данная система принимаетъ, вообще, четыре ръшенія.

Примъръ. — Ръщить систему

$$x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0 \dots (1)$$

$$2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0 \dots (2)$$

Исключивъ  $y^2$ , получимъ ур-ніе

$$x^2 - 10xy + 6x - 18y + 21 = 0 \dots (3),$$

изъ котораго

Подставивъ найденноо для y выраженіе (3') въ ур. (1), находимъ

ур-ніе, составляющее съ (3) систему, тождественную предложенной.

Но ур. (4) — биявадратное; ръшивъ его, получимъ для x четыре значенія  $x^1 = 1$ ,  $x^{11} = -1$ ,  $x^{11} = 3$ ,  $x^{12} = -3$ .

Вычисливъ, по формулъ (3'), соотвътствующія значенія y, найдемъ

$$y^{I} = 1$$
,  $y^{II} = 2$ ,  $y^{III} = 1$ ,  $y^{IV} = -1$ .

Итакъ, данная система имбеть четыре решенія:

$$\begin{cases} x^{I} = 1 \\ y^{I} = 1 \end{cases} \begin{cases} x^{II} = -1 \\ y^{II} = 2 \end{cases} \begin{cases} x^{III} = 3 \\ y^{III} = 1 \end{cases} \begin{cases} x^{IV} = -3 \\ y^{IV} = -1. \end{cases}$$

577. Когда одно изъ ур-ній разлагается на два раціональныхъ множителя первой степени, то решеніе всегда можно привести къ квадратнымъ ур-мъ.

Въ самомъ дълъ, выразивъ изъ ур-нія (1) § 576 y по x, имъемъ:

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(bx+e)^2 - 4c(ax^2 + dx + f)}}{2c}$$
.

Расположивъ подрадикальное выражение по степенямъ x, получимъ

$$(b^2-4ac)x^2+2(be-2cd)x+e^2-4cf;$$

оно будетъ точнымъ квадратомъ при условіи

$$(be-2cd)^2=(b^2-4ac)(e^2-4cf);$$

какъ скоро это условіе существуєть, значенія у будуть раціональны:

$$y = \frac{-bx - e \pm (Px + Q)}{2c},$$

гдъ Рx+Q есть  $\sqrt{\phantom{a}}$  изъ подрадивальнаго выраженія; имъемъ

$$y' = \frac{(P-b)x + Q - e}{2c}, \qquad y'' = -\frac{(P+b)x + Q + e}{2c};$$

слъд. ур. (1) можно представить въ видъ c(y-y')(y-y'')=0; слъд. это ур. будеть удовлетворено, во-первыхъ, значеніями x и y, удовлетворяющими ур-нію

а во-вторыхъ, такими значеніями, которыя, обращая въ ноль y-y'', удовлетворяють ур-нію

такъ-что вопросъ сводится къ ръшенію двухъ системъ: (2), (3) и (2), (4); каждая изъ нихъ составлена изъ ур-нія 1-й ст. и ур-нія 2-й ст., а потому приведеть къ ур нію 2-й ст. въ x, для котораго и получится 4 значенія; подставляя ихъ въ ур-нія (3) и (4), найдемъ соотвътствующія значенія y.

Примъръ. — Ръшить систему

$$2x^{2} - 5xy + 3y^{2} + 3x - 2y - 5 = 0,$$
  

$$x^{2} + xy - y^{2} + x - y - 6 = 0.$$

Изъ перваго имжемъ

$$y = \frac{5x + 2 \pm \sqrt{x^2 - 16x + 64}}{6} = \frac{5x + 2 \pm (x - 8)}{6}$$

откуда

$$y=x-1, \quad y=\frac{2x+5}{3}$$

Подставляя вмёсто y его величину x-1 во второе данное ур-ніе, получаемь:  $x^2+x-6=0$ , откуда x'=2, x''=-3; а соотвётствующія значенія y: y'=1, y''=-4.

Для  $y = \frac{2x+5}{3}$  имѣемъ ур-ніе  $x^2-2x-94=0$ , изъ котораго  $x^{111}=3,015$  и  $x^{1Y}=-2,834$ ; а соотв. значенія y:  $y^{111}=3,677$  и  $y^{1Y}=-0,224$ . Итакъ данная система имѣетъ рѣшенія:

$$\begin{cases} x^{\text{I}} = 2, & \begin{cases} x^{\text{II}} = -3, \\ y^{\text{I}} = 1 \end{cases}, & \begin{cases} x^{\text{III}} = 3,015 \\ y^{\text{III}} = 3,677 \end{cases} & \begin{cases} x^{\text{IV}} = -2,834 \\ y^{\text{IV}} = -0,224. \end{cases}$$

578. Когда одно изъ ур-ній *однородно* по отношенію къ x и y, можно пользоваться слѣдующимъ пріемомъ. Пусть, напр., ур. (1) § 576 однородно, т. е. приводится къ

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$
,

то, раздъливъ всъ его члены на  $y^2$ , дадимъ ему видъ:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b \cdot \frac{x}{y} + c = 0.$$

Ръшая это ввадратное относительно  $\frac{x}{y}$  ур-ніе, найдемъ для отношенія  $\frac{x}{y}$  два значенія:  $\frac{x}{y} = m$ ,  $\frac{x}{y} = m'$ , откуда

$$x = my$$
,  $x = m'y$ .

Комбинирун наждое изъ этихъ ур-ній со (2), получимъ двъ системы, изъ комхъ наждая состоить изъ одного ур-нія 1-й ст. и одного 2-й степени.

Примъръ. — Ръшить систему

$$3x^{2} + 13xy - 10y^{2} = 0 \dots \dots (1)$$
  
$$2x^{3} + 3xy - y^{2} + x + 5y - 34 = 0 \dots (2).$$

Ур. (1) даетъ:  $x=\frac{2}{3}y$  и x=-5y. Комбинируя первое изъ этихъ ур-ній со (2), находимъ два ръшенія

$$x' = 2$$
,  $y' = 3$   $x'' = -4$ ,  $y'' = -6$ .

Ръшая систему, образуемую ур-мъ (2) съ x=-5y, находимъ еще два ръшенія

$$x^{\text{III}} = 5$$
,  $y^{\text{III}} = -1$  is  $x^{\text{IV}} = -5$ ,  $y^{\text{IV}} = 1$ .

Не останавливаясь далье на этихъ частностяхъ, не имъющихъ, къ томуже, большихъ приложеній въ начальной алгебрь, перейдемъ къ ръшенію некоторыхъ замьчательныхъ простыхъ системъ, часто встрычающихся въ приложеніяхъ.

579. Рёшить систему

$$x^2+y^2=a, \quad xy=b.$$

Умноживъ второе на 2 и сложивъ съ первымъ, а потомъ вычтя изъ перваго, находимъ

$$x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b$$
, when  $(x+y)^2 = a + 2b$ ....(1)

Изъ ур-ній (1) и (2) находимъ

$$x+y=\pm\sqrt{a+2b}, \qquad x-y=\pm\sqrt{a-2b}.$$

Отсюда, складывая, а потомъ вычитая, имъемъ

$$x = \frac{1}{2} \left[ = \sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b} \right], \quad y = \frac{1}{2} \left[ = \sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b} \right].$$

Комбинируя знаки всевозможными способами, получимъ четыре значенія для x и столько же для y; чтобы изъ нихъ составить системы рѣшеній, удовлетворяющихъ даннымъ ур-иъ, достаточно замѣтить, что произведеніе x на y, въ силу втораго ур-нія, должно давать b. Легко убѣдиться, что это требованіе будетъ выполнене, если въ формулахъ x и y передъ первымъ радикаломъ возьмемъ одинаковые знаки, а передъ вторымъ противоположные. Такимъ образомъ получимъ 4 системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x^{\text{I}} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b} \right] & x^{\text{II4}} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b} \right] \\ y^{\text{I}} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b} \right] & y^{\text{II}} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b} \right] \\ x^{\text{III}} = \frac{1}{2} \left[ -\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b} \right] & x^{\text{IV}} = \frac{1}{2} \left[ -\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b} \right] \\ y^{\text{III}} = \frac{1}{2} \left[ -\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b} \right] & y^{\text{IV}} = \frac{1}{2} \left[ -\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b} \right] \end{cases}$$

Другой способъ. Возвышая въ квадратъ второе данное ур., замъняемъ данную систему болъе общею

$$x^2 + y^2 = a$$
,  $x^2y^2 = b^2$ . . . . . . . . . . . ( $\alpha$ )

Зная сумму a и произведеніе  $b^2$  количествъ  $x^2$  и  $y^2$ , найдемъ ихъ какъ корни квадратнаго ур-нія

$$z^{2} - az + b^{2} = 0$$
:  
 $x^{2} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^{2}}{4} - b^{2}}, \quad y^{2} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^{2}}{4} - b^{2}}$ 

Извлекая квадратные корни, получимъ:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}},$$

откуда легко составить прежнія комбинаціи соотв'єтствующих вначеній x и y. Легко ихъ привести къ прежнему виду. Возьмемъ напр. формулу x и приложимъ къ ней преобразованіе сложнаго радикала

$$\pm\sqrt{A}+\sqrt{B}=\pm\left\{\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right\}\;,$$

пивя

$$A = \frac{a}{2}$$
,  $B = \frac{a^2}{4} - b^3$ ,  $A^2 - B = b^2$ .

Найдемъ

$$\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}=\pm\frac{1}{2}\left\{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right\}$$

Такимъ же образомъ преобразуемъ и y.

580. Рёшить систему

$$x^{2} + 2xy + y^{2} - ax - ay = 0$$
,  $x^{2} - 2xy + y^{2} - bx + by = 0$ .

Эту систему можно написать въ видъ:

$$(x+y)^2 - a(x+y) = 0$$
,  $(x-y)^2 - b(x-y) = 0$ ,  $(x+y)(x+y-a) = 0$ ,  $(x-y)(x-y-b) = 0$ .

Ръшение данной системы распадается на четыре другия:

$$\begin{cases} x+y=0, & \{x+y=0, \\ x-y=0, & \{x-y=0, \\ x-y-b=0, \end{cases} \begin{cases} x-y=0, & \{x+y-a=0, \\ x+y-a=0, \\ x-y-b=0, \end{cases}$$

изъ которыхъ получаемъ:

HAR:

$$\begin{cases} x^{\mathbf{I}} = 0 \\ y^{\mathbf{I}} = 0 \end{cases} \begin{cases} x^{\mathbf{II}} = \frac{b}{2} \\ y^{\mathbf{II}} = -\frac{b}{2} \end{cases} \begin{cases} x^{\mathbf{II}} = \frac{a}{2} \\ y^{\mathbf{II}} = \frac{a}{2} \end{cases} \begin{cases} x^{\mathbf{IV}} = \frac{a+b}{2} \\ y^{\mathbf{VI}} = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

III. Системы уравненій второй степени болье нежели съ двумя неизвъстными.

581. Примъръ І. Решить систему

$$x(x+y+z) = a^2$$
,  $y(x+y+z) = b^2$ ,  $z(x+y+z) = c^2$ .

Складывая и вынося за **ск**обки x + y + z, получаемъ

$$(x+y+z)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
, otryga  $x+y+z = \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ .

Замъняя въ каждомъ изъ данныхъ ур-ній x+y+z его величиною, получимъ двъ системы ръшеній, взявъ передъ радикаломъ сперва +, потомъ -:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ z = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{array} \right. \quad \mathbf{M} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ y = \frac{-b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ z = \frac{-c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{array} \right. .$$

582. Примъръ II. — Ръшить систему

$$x^2 + yz = c$$
 (1)  $y^2 + xz = c$  (2)  $z^2 + xy = a$ . (3)

Вычитая (2) изъ (1), находимъ

$$(x-y)(x+y)-z(x-y)=0$$
, and  $(x-y)(x+y-z)=0$ .

Данная система распадается на двъ:

$$x-y=0$$
 (a)  $x+y-z=0$  (β)  $y^2+xz=c$  (2)  $y^2+xz=c$  (2)  $z^2+xy=a$  (3)  $z^2+xy=a$  (3)

Ръшимъ, напр., вторую. Приравнивая значенія z изъ  $(\beta)$  и (2), получаемъ

$$x + y = \frac{c - y^2}{x}$$
, when  $x^2 + y^2 + xy = c$ , when  $(x + y)^2 - xy = c$ ,

или, такъ навъ изъ  $(\beta)$  имъемъ x+y=z, то

$$z^2-xy=c.$$

Это ур. вмъстъ съ (3) даетъ:

$$z^{2} = \frac{a+c}{2}$$
, отвуда  $z = \pm \sqrt{\frac{a+c}{2}}$ , и  $xy = \frac{a-c}{2}$ .

Такимъ образозомъ z найдено; для опредѣленія x и y замѣчаемъ, что извѣстны; сумма x+y, равная z, т. е.  $\pm \sqrt{\frac{a+c}{2}}$ , и произведеніе xy, равное  $\frac{a-c}{2}$ . Сл. x и y опредѣлятся какъ корни ур-нія

$$X^2 = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \cdot X + \frac{a-c}{2} = 0,$$

откуда:

$$\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a+c}{8} - \frac{a-c}{2}} = \frac{\pm \sqrt{a+c} \pm \sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}}.$$

Каждое значеніе z дастъ намъ двѣ системы значеній x и y, ибо x безразлично м. б. взято равнымъ X' или X'', и слѣд. y равнымъ X'' или X'. Итакъ, получимъ 4 системы рѣшеній:

$$\begin{cases} s = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x = \frac{\sqrt{a+c} + \sqrt{5c - 3a}}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{\sqrt{a+c} - \sqrt{5c - 3a}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \begin{cases} s = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x = \frac{\sqrt{a+c} - \sqrt{5c - 3a}}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{\sqrt{a+c} + \sqrt{5c - 3a}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \begin{cases} s = -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x = \frac{-\sqrt{a+c} + \sqrt{5c - 3a}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \begin{cases} s = -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x = \frac{-\sqrt{a+c} + \sqrt{5c - 3a}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \begin{cases} s = -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ s = -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \end{cases} \begin{cases} s = -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ s = -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \end{cases} \begin{cases} s = -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \end{cases} \end{cases} \begin{cases} s = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

IV. Системы уравненій высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

583. Примъръ І. — Рёшить систему

$$x+y=17...(1)$$
  $x^3+y^3=1343...(2)$ 

Возвысивъ ур. (1) въ кубъ, находимъ

Это ур-ніе общѣе ур-нія (1); именно, мы знаемъ, что если обозначить одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ 1 буквою  $\alpha$ , то ур-нію (3) удовлетворяютъ значенія x и y, повѣряющія каждое изъ ур-ній:  $(x+y)=17\alpha$ ,  $x+y=17\alpha^3$ ,  $x+y=17\alpha^3$ . Но если мы замѣнимъ въ немъ x+y числомъ 17, то этимъ мы выразимъ, что корни его удовлетворяютъ ур-нію (1), и слѣд. паразитные корни будутъ устранены. Итакъ, замѣнивъ въ ур-ніи (3) x+y числомъ 17, подставляемъ вмѣсто него ур-ніе  $x^3+y^3+51xy=4913$ , или, въ силу ур-нія (2):

$$51xy = 4913 - 1343$$
, was  $xy = 70$ .

Зная сумму и произведеніе x и y, найдемъ эти комичества, какъ корни квадратнаго ур-нія

$$u^2 - 17u + 70 = 0$$

откуда: x'=7, y'=10; или x''=10, y''=7.

Кромъ того, данная система имъетъ третью систему ръшеній, образуемую безконечными и противоподожными по знаку ведичинами x и y.

Другой способъ. — Можно бы было употребить еще слъдующій методъ. Ур-ніе (2) можно представить въ видъ:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=1343$$
, или, замѣнивъ  $x+y$  числомъ 17:  $x^2-xy+y^2=79$ .

Прибавивъ къ объимъ частямъ по 3xy, получимъ:

$$(x+y)^2 = 79 + 3xy$$
, man  $289 = 79 + 3xy$ , man  $xy = 70$ .

Далъе вычисление оканчивается какъ выше указано.

584. Примъръ II. — Ръшить систему

$$x+y=a$$
. (1)  $x^5+y^5=b^5$ . . . . . (2)

Возвысивъ въ пятую степень объ части ур-нія (1) и сгруппировавъ извъстнымъ образомъ члены, получимъ:

$$[x^5+y^5+5xy(x^3+y^3)+10x^2y^3(x+y)=a^5,$$
 where 
$$x^5+y^5+5xy[(x+y)^3-3(x+y)xy]+10(x+y)x^2y^2=a^5. . . . (3)$$

Это ур. не тождественно (1): если обозначимъ буквою  $\alpha$  одинъ изъ мнимыхъ корней 5-го порядка изъ 1, то ур-нію (3) удовлетворяютъ корни каждаго изъ уравненій:

$$x + y = a\alpha$$
,  $x + y = a\alpha^2$ ,  $x + y = a\alpha^3$ ,  $x + y = a\alpha^4$ ,  $x + y = a\alpha^5$ .

Но если мы замѣнимъ въ немъ x+y воличествомъ a, то этимъ самымъ исключимъ изъ него рѣшенія четырехъ паразитныхъ уравненій, и останется уравненіе

$$x^{3} + y^{3} + 5xy(a^{3} - 3axy) + 10ax^{2}y^{2} = a^{3}$$
. . . . . . . . (4)

которое со (2) образуетъ систему, тождественную данной.

Ур. (4) можно представить въ видъ

$$5a(xy)^2 - 5a^3(xy) + a^3 - b^5 = 0.$$

Будучи квадратнымъ относительно xy, оно дастъ два значенія для xy; каждое изъ нихъ комбинируемъ съ ур·мъ x+y=a. Такимъ образомъ получимъ четыре системы ръшеній; пятую систему составять значенія x и y безконечныя по ведичинъ и противоположныя по знаку.

585. Примъръ III. — Ръшить систему

$$x+y+z=a$$
...(1)  $x^2+y^2+z^2=a^2$ ...(2)  $x^3+y^3+z^3=a^3$ ...(3).

Возвысивъ объ части ур-нія (1) въ квадратъ, нолучаемъ

$$x^2 + y^2 + z^3 + 2(xy + xz + yz) = a^2$$
,

или, по причинъ ур-нія (2):

$$xy + xs + ys = 0$$
. . . (4) отвуда  $xy = -s(x+y)$ . . . (5).

Возвысивъ ур. (1) въ кубъ, нолучимъ:

$$z^3 + (x+y)^3 + 3z(x+y)(x+y+z) = a^3$$

или, принимая во вниманіе ур-нія (1) и (3):

$$3xy(x+y) + 3az(x+y) = 0$$
,

а, въ силу соотношенія (4)

или

$$xy(x+y) - axy = 0$$
, when  $xy(x+y-a) = 0$ ...(5).

Это ур-ніе требуеть, чтобы было: или xy=0, или x+y=a. Если xy=0, то должно быть: или x=0, или y=0. При x=0, ур-ніе (4) дасть yz=0. Слёд. необходимо еще, чтобы было: или y=0, или z=0, причемъ при y=0 будеть z=a, а при z=0 имѣемъ y=a. Итакъ имѣемъ систему

$$x' = 0$$
,  $y' = 0$ ,  $z' = a$ ,  $x'' = 0$ ,  $y'' = a$ ,  $z'' = 0$ .

Если x+y=a, тогда z=0; и по причинѣ (4) нужно еще x=a и y=0; или x=0 и y=a. Отсюда третья система рѣшеній:

$$x''' = a$$
,  $y''' = 0$ ,  $z''' = 0$ .

Иначе, необходимо и достаточно, чтобы два изъ неизвъстныхъ были нули, а третье a.

586. Примъръ IV. — Ръшить систему

$$xu = yz$$
,  $x + y + z + u = a$ ,  
 $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2$ ,  $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 = c^4$ .

Примемъ за вспомогательныя неизвъстныя: произведенія xu = yz = q, и суммы x + u = t и y + z = v. Такимъ образъмъ прямо подучимъ:

$$t+v=a$$
...(1)  $t^2+v^2-4q=b^2$ ...(2)  $t^4+v^4-4q(t^2+v^2)+4q^2=c^4$ ...(3)

Выразивъ q изъ ур-нія (2) и подставивъ въ (3), им

$$4(t^4+v^4)-4(t^2+v^2)(t^2+v^2-b^2)+(t^2+v^2-b^2)^2=4c^4,$$

$$-8v^2t^2+4b^2(t^2+v^2)+(t^2+v^2-b^2)^2=4c^4.$$

Подставивъ сюда виъсто  $t^2+v^2$  его величину  $a^2-2vt$ , выведенную изъ (1), и обозначивъ vt буквою S, для опредъленія S имъемъ ур-ніе

$$4S^{2} + 4(a^{2} + b^{2})S + 4c^{4} - (a^{2} + b^{2})^{2} = 0.$$

Найдя корни S' и S'' этого ур., найдемъ v и t изъ ур-ній

$$X^2 - aX + S' = 0,$$
  $X^2 - aX + S'' = 0.$ 

Первое дасть для v и t систему v', t'; второе—систему v'', t''; изъ ур-нія (2) найдемъ соотвътствующія значенія для q: q' в q''. Наконецъ, найдемъ двъ системы значеній для x и u изъ ур-ній

$$X^2 - t'X + q' = 0,$$
  $X^2 - t''X + q'' = 0,$ 

и двъ соотвътственныя системы значеній для у и г изъ ур-цій

$$y^2 - v'y + q' = 0, \qquad y^2 - v''y + q'' = 0.$$

587. Примъръ У. — Рашить систему

$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = a(x+y)^2$$
...(1)  $xy(x-y)^2 = b(x+y)^2$ ...(2).

1-й способъ. — Помноживъ (2) на 4 и сложивъ съ (1), получимъ:

$$(x+y)^4 - 15x^2y^2 = (a+4b)(x+y)^2 \dots (3)$$

Положивъ x + y = u, xy = v, дадимъ ур-мъ (2) и (3) видъ

$$v(u^2-4v)=bu^2$$
,  $u^4-15v^2=(a+4b)u^2$ ,

исключивъ  $u^2$ , получимъ квадратное ур. относительно v.

2-й способъ (неопредъленныхъ коэффиціентовъ). — Помножимъ ур-нія (1) и (2) соотвътственно на неопредъленные коэффиціенты  $\lambda$  и  $\mu$ , затъмъ опредълимъ  $\lambda$  и  $\mu$  такъ, чтобы первая частъ новаго уравненія, которое однородно по отношенію къ x и y, дълилась бы, какъ и вторая частъ, на x+y. Эта первая часть, очевидно, есть  $\lambda(x^1+y^4-x^2y^2)+\mu xy(x-y)^2$ ; и какъ она должна быть нулемъ при замънъ въ ней x количествомъ — y, то имъемъ условіє:  $\lambda-4\mu=0$ . Можно взять  $\mu$  равнымъ 1, тогда  $\lambda=4$ , т. е.: чтобы выдълить множителя x+y въ первой части новаго ур-вія, нужно помножить на 4 объ части ур-нія (1) и сложить со (2). Найдемъ:

$$(x+y)^2(4x^2+4y^2-7xy)=(4a+b)(x+y)^2$$
:

итакъ, множитель (x+y), и даже его квадратъ, обнаруженъ въ первой части предыдущаго ур-нія. Приходимъ такимъ образомъ къ рѣшенію системъ

$$x+y=0$$
,  $xy(x-y)^2=b(x+y)^2$ ;  
 $4(x^2+y^2)-7xy=4a+b$ ,  $xy(x-y)^2=b(x+y)^2$ .

Первая система даетъ x=y=0. Для ръшенія второй полагаемъ x+y=2s, x-y=2t. Затъмъ получаемъ выраженія  $x^2+y^2$  и xy въ s и t, и подставляя ихъ въ оба предыдущія ур-нія, получаемъ два ур-нія въ s и t, которыя ръшить не трудно.

588. Примъръ УІ. — Ръшить систему:

$$(x^3+y^3)(x+y)=a(x^2+y^2)$$
. (1)  $x^4+y^4-3x^2y^2=b(x^2+y^2)$ . (2).

Множа данныя ур-нія соотв'єтственно на  $\lambda$  и  $\mu$  и складывая почленно, находимъ въ первой части полиномъ

$$\lambda(x^3+y^3)(x+y)+\mu(x^4+y^4-3x^2y^2)$$
...(3).

Опредълимъ  $\lambda$  и  $\mu$  такъ, чтобы полиномъ (3) дѣлился на  $x^2+y^2$ . Разсматривая  $x^2+y^2$  какъ произведеніе комплексовъ x+yi, x-yi, посмотримъ, каково д. б. соотношеніе между  $\lambda$  и  $\mu$ , чтобы полиномъ (3) дѣлился на x-yi. Для этого надо, чтобы результатъ подстановки yi вмѣсто x въ этотъ полиномъ былъ нулемъ. Находимъ условіе:  $2\lambda+5\mu=0$ . Подстановка x+yi дала бы тотъ же результатъ; слѣд., при  $\lambda$  и  $\mu$ , удовлетворяющихъ этому условію, полиномъ (3) раздѣлится на  $x^2+y^2$ . Можно взять, напр.  $\lambda=5$  и  $\mu=-2$ . Итакъ, умноживъ ур-нія (1) и (2) соотвѣтственно на 5 и -2 и сложивъ ихъ, получаемъ

$$(x^2+y^2)[3(x^2+y^2)+5xy]=(5a-2b)(x^2+y^2).$$

Вопросъ приведенъ къ ръшенію двухъ системъ:

$$x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = b(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = 0;$$
  
 $x^4 + y^4 - 3x^2y^3 = b(x^2 + y^2), \quad 3(x^2 + y^2) + 5xy = 5a - 2b.$ 

Первая система даетъ: x=y=0. — Для рѣшенія второй полагаемъ: x+y=u, xy=v, и выражаемъ  $x^2+y^2$  и  $x^4+y^4$  черезъ u и v; такимъ обр. получаемъ два ур-нія

$$u^4 - bu^2$$
  $2(2u^2 - b)v - v^2 = 0$ ,  $3u^2 - v = 5a - 2b$ ;

искиючивъ изъ нихъ v, найдемъ биквадратное ур. въ w.

#### 589. Задачи. Решнть уравненія:

1. 
$$3x^2 - 3y^2 - 3xy + x + 5y - 2 = 0$$
;  $x + y - 1 = 0$ .

2. 
$$2x^2 + 4y^3 - z^2 + 6yx - 8zx + 15xy + 51x + 18y + 8 = 0$$
.

$$2x - 4y - 16z = -26.$$

$$5x + 3y - z = 0.$$

3. 
$$x + 2y - z - 1 = 0$$

$$2y + z - u - 1 = 0$$

$$x + u - 4 = 0$$

$$y - z + 2u - v = 3$$

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} + u^{2} - 2yz - 3uv + x - y + 3u - 2 = 0.$$

4. 
$$51x^2 - 60xy - y^2 + 75x - 33y + 18 = 0$$
  
 $49x^2 + 60xy - y^2 + 65x - 31y + 6 = 0$ .

5. 
$$6x^2 + xy - y^2 + 2x + y - 1 = 0$$
,  $15x^2 - 20xy + 5y^2 - 10x + 1 = 0$ .

6. 
$$x^2 - 6xy - 16y^2 + 4x + 18y - 5 = 0$$
,  $x^2 + 2xy + 4y^2 - 3x - 12y + 2 = 0$ .

7. 
$$2x^2 + 27xy + 6y^2 - 6x - 21y + 4 = 0$$
,  $2x^2 - 9xy - 3y^2 - 6x + 6y + 4 = 0$ 

8. 
$$6x^2 + xy - y^2 - 3x - 4y - 15 = 0$$
,  $3x^2 - 4xy + y^2 - 15x + 7y + 18 = 0$ .

9. 
$$x^2 + xy + 4y^2 = 6$$
,  $3x^2 + 8y^2 = 14$ .

10. 
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13$$
,  $xy - 3x + 2y = 11$ .

11. 
$$(x-y)(x^2-y^2)=16$$
,  $(x+y)(x^2+y^2)=40$ .

12. 
$$2x^2 - 3xy + y^2 = 24$$
,  $3x^2 - 5xy + 2y^2 = 33$ .

13. 
$$(3x+4y)(7x-2y)+3x+4y=44$$
  
 $(3x+4y)(7x-2y)-7x+2y=30$ .

14. 
$$xy(x+y) = 30$$
,  $x^3 + y^3 = 35$ .

15. 
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{36}$$
;  $xy^2 - x^2y = 324$ .

16. 
$$x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2$$
,  $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$ .

17. 
$$x^3 - y^3 = 1304$$
,  $x - y = 8$ . 18.  $x^4 + y^4 = 337$ ,  $x + y = 7$ .

19. 
$$x^4 - y^4 = 609$$
,  $x - y = 3$ . 20.  $x^5 - y^5 = 3096$ ,  $x - y = 3$ .

21. 
$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{145}{72}$$
,  $xy^3+x^3y-x^2y^2 = \frac{73}{288}$ 

22. 
$$5x^2 - 3xy + 4y^2 = 100$$
,  $2xy + 3x^2 = 57$ .

23. 
$$x^3 - y^3 = 39(x - y)$$
,  $x^3 + y^3 = 19(x + y)$ .

24. 
$$x^3 + y^3 = \frac{35}{216}$$
,  $x^2 + y^2 - xy = \frac{7}{36}$ .

25. 
$$x^2 + y^2 + xy = 7(x + y)$$
,  $x^2 + y^2 - xy = 9(x - y)$ .

26. 
$$x^6 + y^6 = 15689$$
,  $x^2 + y^2 = 29$ .

27. 
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}$$
,  $x + y = 13$ .

28. 
$$x+y+2\sqrt{xy}=25$$
,  $x^2+y^2+4xy=241$ .

29. 
$$\sqrt{4y^3x} + 3\sqrt{yx^3} = 252$$
,  $3\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{12}{\sqrt{xy}} + 5$ .

30. 
$$x^2 + y^3 = 9xy + 1$$
,  $x^2 - xy + y^2 = 7$ .

31. 
$$x^4 + y^4 = \frac{17}{4} x^2 y^2$$
,  $x + y = 9$ .

32. 
$$xy + xy^3 = 6$$
,  $x + xy^2 + xy^4 = 9$ .

33. 
$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = \frac{25}{x+y}$$
,  $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = \frac{9}{x-y}$ 

34. 
$$\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} = \frac{175(x-y)}{19(x+y)}$$
,  $x^2+y^2=13$ .

35. 
$$xy = 3$$
,  $x^4 + y^4 = \frac{97}{4}$ . 36.  $x^6 + y^6 = 65$ ,  $x^4 + y^4 = 17$ .

37. 
$$x^7 - y^7 = 2186$$
,  $x - y = 2$ : 38,  $\frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{121}{13}$ ,  $x + y = 2$ .

39. 
$$\frac{x^5+y^8}{x^3+y^3} = \frac{205}{13}$$
,  $x^2+xy+y^2=21$ .

40. 
$$\frac{1}{\sqrt{x-12}+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-12}-\sqrt{x}} = \frac{2y}{27}$$
,  $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$ .

41. 
$$\sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}$$
,  $xy - x - y = 9$ .

42. 
$$13y\sqrt{\frac{x^2}{y+3}} = 6x^2 + 20y$$
,  $24x^2 + y^2 = 2x(5y+4x)$ .

43. 
$$x^4 + 9y^4 - 6x^2y^2 - x^2 + 3y^2 = 132$$
,  $y^4 - 10y^2x + 25x^2 = 1$ .

44. 
$$\frac{3}{x} + \frac{5}{y} + \frac{4}{z} = 42$$
,  $\frac{6}{x} + \frac{10}{z} = 38$ ,  $15x + 10y = 9$ .

45. 
$$x^2 + z^2 + y^2 = 14$$
,  $x + y - z = 4$ ,  $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ .

46. 
$$x^2 + y^2 + z^2 = 35$$
,  $2y^2 + 3x + 14 = 7xz$ ,  $x(z-1) = 4$ .

47. 
$$x^2+y^2+z^2=14$$
,  $xy+xz-yz=7$ ,  $x+y+z=6$ .

48. 
$$x^2 = y + z$$
,  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $(x + y + z)^2 = 5y^2 + 8(x + z)$ .

49. 
$$x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 36$$
,  $x + y + z + t = 18$ ,  $y^2 = xz$ ,  $yz = tx$ .

50. 
$$xt = yz$$
,  $x+t=7$ ,  $y+z=8$ ,  $x^4+y^4+z^4+t^4=1649$ .

51. 
$$xt = yz$$
,  $x+t=9$ ,  $y+z=6$ ,  $x^5+y^5+z^5+t^5=33825$ .

52. 
$$(x+y)(xy+1) = 18xy$$
,  $(x^2+y^2)(x^2y^2+1) = 208x^2y^2$ .

53. 
$$x + y = 9s$$
,  $x^2 + y^2 = 82s$ ,  $x^3 + y^3 = 378s$ .

54. 
$$x+y=4$$
,  $u+v=10$ ,  $x^2+u^2=130$ ,  $y^2v^2=34$ .

55. 
$$(a+1)xy + (a-1)(x+y) + a-3 = 0$$
,  
 $(2a+1)xy + (2a-1)(x+y) + 3a-4 = 0$ .

56. 
$$x + y + x^2 + y^2 = a^2$$
,  $xy + x^2 + y^2 = b^2$ .

57. 
$$x^2 - x^2y^2 + y^2 = a$$
,  $x - xy + y = b$ .

58. 
$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x(a+b) - 2y(a+b) = -4ab$$
.  
 $x^2 + y^2 - 2xy + 2x(a-b) - 2y(a-b) = -4ab$ .

59. 
$$\frac{1}{ax-by-1}+\frac{1}{by-ax-1}=\frac{1}{ax+by-1}$$
,  $bx+ay=m$ .

60. 
$$x^3 + y^3 + xy(x+y) = a$$
,  $(x^2 + y^2)x^2y^2 = b$ .

61. 
$$(x+y)(x^3+y^3)=a$$
,  $(x-y)(x^3-y^3)=b$ .

62. 
$$x^3 + y^3 = a(x^2 + y^2)$$
,  $x^2y + xy^2 = b(x^2 + y^2)$ .

63. 
$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=a$$
,  $x+y=b$ .

64. 
$$x^3 + y^5 = a(x^3 + y^3), \quad xy = b.$$

65. 
$$x^3 + y^3 = a(x + y)$$
,  $x^4 + y^4 = b(x + y)^2$ .

66. 
$$x^4 - y^4 = axy$$
,  $(x^2 + y^2)^2 = b(x^2 - y^2)$ .

67. 
$$(x+y)^4 = a(x^2+y^2)$$
,  $x^4+y^4 = b(x^2+y^2)$ .

68. 
$$x^4 + y^4 = a(x^2 + xy + y^2), (x + y)(x^3 + y^3) = b(x^2 + xy + y^2)^2$$

69. 
$$x \cdot y = a$$
,  $(a+b)x^4 + ayx^3 + ay^3x + (a+b)y^4 = b$ .

70. 
$$x+y=a$$
,  $x^5+bxy^4+cx^3y^2+cx^2y^3+bxy^4+y^5=b$ .

71. 
$$(x^6+1)y=a(y^2+1)x^3$$
,  $(y^6+1)x=a(x^2+1)y^3$ .

72. 
$$xy(x+y) = a$$
,  $x^3 + y^3 = bxy$ .

73. 
$$a^2 - x^2 = 3xy$$
,  $(\sqrt{y} - \sqrt{x})(a - x) = 3\sqrt{x(x + y)}$ .

74. 
$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a$$
,  $\frac{(1+x^4)(1+y^4)}{(1-x)^4(1-y)^4} = b$ .

74. 
$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a$$
,  $\frac{(1+x^4)(1+y^4)}{(1-x)^4(1-y)^4} = b$ .  
75.  $\frac{x^2-y^2}{(x+1)(y+1)} = a - b$ ,  $\frac{x^2-y^2}{(x-1)(y-1)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ .

76. 
$$y = ax$$
,  $x^4 + y^4 + x^2 + y^2 = 2(x^3 + y^3)$ .

77. 
$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$
,  $\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x-y}{y^2}$ 

78. 
$$xy(x+y) = ab(a+b);$$
  $(x-y)(x+2y)(2x+y) = (a-b)(a+2b)(2a+b).$ 

79. 
$$x^2 + y^2 = axyz$$
,  $x^2 + z^2 = bxyz$ ,  $y^2 + z^2 = cxyz$ .

80. 
$$xyz = a^2(x+y) = b^2(y+z) = c^2(x+z)$$
.

81. 
$$x^2 - (y - z)^2 = a$$
,  $y^2 - (x - z)^2 = b$ ,  $z^2 - (x - y)^2 = c$ .

82. 
$$x^2 + (y-z)^2 = a$$
,  $y^2 + (x-z)^2 = b$ ,  $z^2 + (x-y)^2 = c$ .

83. 
$$(x+y)(z+u)=a$$
,  $(x+z)(y+u)=b$ ,  $(x+u)(y+z)=c$ ,  $x^2+y^2+z^2+u^2=d$ .

84. 
$$x^2 + y^2 = 2a$$
,  $z^2 + u^2 = 2b$ ,  $xz + uy = 8c$ ,  $xu + yz = 8d$ .

85. 
$$4a^2yz = 4a^2d^2 + x^2yz$$
,  $y + z = 2a$ ,  $y^2 + z^2 = x^2$ .

86. 
$$(yz-d^2)(y+z)^2-x^2yz$$
,  $y^2+z^2-2m^2+\frac{x^2}{2}$ ,  $4x^2(z^2-h^2)-(x^2+z^2-y^2)^2$ .

87. 
$$\frac{(a-x)^3+(x-b)^5}{(a-x)^2+(x-b)^2}=(a-b)(a-x)(x-b).$$

Положить a-x=y x-b=z.

88. 
$$xu = yz$$
,  $x + y + z + u = 4s$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 4q$ ,  $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 4c$ .

89. 
$$xy + n(x + y) = a^2$$
,  $xz + n(x + z) = b^2$ ,  $yz + n(y + y) = c^2$ .

90. 
$$x+y+z=a$$
,  $xy=b^2$ ,  $xyz=c^3$ .

91. 
$$x+y+z=a$$
,  $x^2+y^2+z^2=b^2$ ,  $xz=y^2$ .

92. 
$$\frac{a^3x}{y^2z^2} = \frac{b^3y}{z^2y^2} = \frac{c^3z}{x^2y^2} = 1$$
.

93. 
$$\frac{xyz}{x+y} = a$$
,  $\frac{xyz}{y+z} = b$ ,  $\frac{xyz}{z+x} = c$ .

94. 
$$x + y + z = 1$$
,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ,  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ .

95. 
$$x + y + z = (a + b + c)(a + b - c)$$
.  
 $xy + xz - yz = b\{(a + c)(a - c)(2a - b) + 2ab^2\}$   
 $x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 + c^2)$ .

96. 
$$x + y + z = a + b + c$$
;  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ;  $xy - yz - zx = ab - bc - ca$ .

97. 
$$x+y+z=a+b+c$$
,  $xy+yz=ab+bc$ ,  $(x+y)^2-z^2=(a+b)^2-c^2$ .

98. 
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
,  $2y - z = x$ ,  $yz + zx + xy = 3b^2$ 

99. 
$$x(y+z) + 2(x+y+z)^2 = 9a^3$$
,  
 $y(z+x) + 6(x+y+z)^2 = 25a^3$ ,  
 $z(x+y) + 12(x+y+z)^2 = 36a^2$ .

100. 
$$x(az+bu)+y(a+b)=0;$$
  $x(az^2+bu^3)+y(az+bu)=a+b;$   $(az+bu)^2+(a-b)^2(z-u)^2=c^4;$   $(a-2b)u-bz=d,$ 

101. 
$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = a^4$$
,  $x^4 - y^4 = b^4$ .

102. 
$$x + y + z = a$$
,

$$\frac{zx(z+x-y)}{z+x} + \frac{xy(x+y-z)}{x+y} = b^2,$$
  
$$y^2 + z^2 - x^2 = 0.$$

103. 
$$x+y+z+u=a$$
,  $x^4+y^4+z^4+u^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2$ ,  $x^2+y^2+z^2+u^2=b^2$ ,  $xu=ys$ .

104. 
$$x^{\frac{m}{2}} + x^{\frac{m}{4}}y^{\frac{m}{4}} + y^{\frac{m}{2}} = a$$
,  $x + x^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m}{2}} + y^{\frac{m}{2}} = b$ .

105. Показать, что результать исключенія х и у изъ уравненій

$$x + y = a$$
,  $x^2 + y^2 = b^2$ ,  $x^3 + y^3 = c^3$ 

ectb:  $a^3 - 3ab^2 - 2c^3 = 0$ .

106. Исключить х, у, г изъ уравненій:

$$x+y+z=a$$
,  $x^2+y^2+z^2=b^2$ ,  $x^3+y^3+z^3=3c^3$ ,  $xyz=a^3$ .

107. Исключить x, y, z изъ уравненій:

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{y}{b} + \frac{b}{y} = \frac{z}{c} + \frac{c}{z}$$
,  $xyz = abc$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 + 2(ab + ac + bc) = 0$ .

108. Совивстны-ли уравненія

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + c = 0$$
,  $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + c = 0$ ,  $(b+c)x + (a+c)y + a + b = 0$ .

### ГЛАВА XXXVIII.

### Численные вопросы высшихъ степеней.

- 590. Когда отвътъ на вопросъ, приводящій въ ввадратному уравненію, выражается мнимыми корнями, это служитъ признакомъ невозможности задачи. Если же корни дъйствительны, то могутъ имъть мъсто слъдующіе случаи:
- 1. Оба корня положительны. Тогда задача допускаеть два рёшенія, если только корни неравны; въ случать равныхъ корней вопросъ имъетъ одно ръшеніе. Однаво же, если одно или оба значенія неизвъстнаго выходять изъ тъхъ предъловъ, между которыми, по смыслу вопроса, должно заключаться неизвъстное, то вопросъ имъетъ или одно ръшеніе, или же невозможенъ.
- 2. Если одно или оба значенія неизв'єстнаго будуть отрицательны, то всегда можно составить такое уравненіе, котораго корни равны, но противоположны, корнямь даннаго: нужно только въ ур ніе задачи подставить x вм'єсто x. Если окажется возможнымь подобрать задачу, слегка разнящуюся отъ предложенной и отв'ячающую видоизм'єненному ур-нію, этимъ путемъ значеніе отрицательнаго корня и будеть истолковано.

Эти замъчанія относятся и къ уравненіямъ второй степеня съ нъсколькими неизвъстными. Въ поясненіе сказаннаго приводимъ примъры.

ЗАДАЧА I. — Два торговца продали нъсколько головъ рогатаго скота за 1350 р.; первый на 5 головъ больше втораго. Если бы первый продаль столько головъ, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первый получиль бы 540 р., а второй 840 р. Сколько головъ продаль каждый и по какой цънъ?

Пусть будеть x—число головь, проданных в первымь; тогда число головь, проданных вторымь, будеть x— 5. Первый за x — 5 головь нолучиль бы 540 р.; след. за одну голову онъ получаль по  $\frac{540}{x-5}$  р., а за x головь выручиль  $\frac{540x}{x-5}$  р. Второй за x головь получиль бы 840 р., след. онъ браль за одну голову  $\frac{840}{x}$  р., а за x — 5 головь получиль  $\frac{840(x-5)}{x}$  р. След. оба продами свота на  $\frac{540x}{x-5} + \frac{840(x-5)}{x} = 1350$  р.

По освобожденіи отъ дробей и по упрощеніи находимъ уравненіе  $x^2 - 55x + 700 = 0$ , откуда: x' = 35; x'' = 20. Сабд. x' - 5 = 30; x'' - 5 = 15.

Итакъ, задача импетъ два рпшенія: 1-й продалъ 35 головъ по 18 р. за голову, а второй 30 головъ но 24 р. за голову (въ самомъ дълъ,  $18 \times 35 + 24 \times 30 =$ 

=630+720=1350); или же: 1-й продалъ 20 гол. по 36 р., а 2-й 15 по 42 р., что опять составляетъ 1350 р.

Задача II. — Отданг въ банкъ капиталъ и черезъ годъ получено прибыли 200 р. Капиталъ вмъстъ съ процентными деньгами былъ оставленъ въ банкъ еще на годъ. Послъ этого капиталъ съ наросшими на него процентными деньгами составлялъ 2420 р. Какъ великъ былъ первоначильный капиталъ?

Пусть первоначальный капиталь быль x р. Черезь годь онь обратился въ x+200 р., слёд. принесь  $\frac{20000}{x}$  процентовъ. Въ концё втораго года этотъ капиталь, принося  $\frac{20000}{x}$ %, обратился въ  $(x+200)\Big(1+\frac{200}{x}\Big)=2420$  р.

Освободивъ отъ дробей и упростивъ, имѣемъ уравненіе  $x^*-2020x+40000=0$ , откуда: x'=2000 р.; x''=20 р. Такимъ образомъ опять получили два положител. корня; вычисляя проценты, приносимые этими капиталами, находимъ, что первый даетъ  $10^{\circ}/_{\circ}$ , второй  $1000^{\circ}/_{\circ}$ . Такъ какъ въ дъйствительности ни одинъ банкъ не даетъ такихъ высокихъ процентовъ, какъ  $1000^{\circ}/_{\circ}$ , то заключаемъ, что корень x''=20 р. не м. б. допущенъ, и задача имъетъ одно ръшеніе: x'=2000 р.

ЗАДАЧА III. — Нъкто купиль нъсколько аршинь сукна за 240 р.; если бы за туже сумму онь получиль 3 аршинами менье, то аршинь обошелся бы 4 рублями дороже. Сколько аршинь сукна куплено?

Пусть куплено было x арш.; цёна 1 арш. равна, слёдоват.,  $\frac{240}{x}$  р. Если бы за туже сумму онъ получилъ 3 арш. меньше, т. е. x-3 арш., то цёна аршина была бы  $\frac{240}{x}+4$ ; а всъ x-3 аршина стоили бы опять 240 р.; слёд. ур-ніе будетъ

$$\left(\frac{240}{x} + 4\right)(x - 3) = 240 \dots (1)$$

Приведя его въ виду  $x^2-3x-180=0$  и рѣшивъ, найдемъ два корня: x'=15, x''=-12. Положительный корень, кавъ не трудно убъдиться, даетъ прямой отвътъ на задачу. Что касается отрицательнаго корня: -12, онъ не можетъ представлять отвъта на данную задачу, ибо неизвъстное (число купленныхъ аршинъ сукна), по существу своему, положительно. Но мы можемъ попытаться истолновать это рѣшеніе, т. е. подыскать задачу, аналогичную данной, отвътомъ на которую служила бы абсолютная величина отрицательнаго рѣшенія.

Для этого въ первоначальное ур. (1) вмѣсто x подставимъ (-x); получимъ  $(\frac{240}{-x}+4)(-x-3)=240$ , или, умноживъ оба множителя 1-й части на (-1):

$$\left(\frac{240}{x}-4\right)(x+3)=240....(2).$$

Мы уже знаемъ, что рѣшенія этого ур-нія суть: x' = -15, x'' = +12, равныя рѣшеніямъ ур-нія (1), но съ противоположными знаками. Ноложитель-

ное рѣшеніе — 12 будеть служить отвѣтомъ на задачу, соотвѣтствующую урнію (2); задача эта, очевидно, такова: «нѣкто купиль нѣсколько аршинь сукна за 240 р.; если бы за туже сумму онъ получиль 3 аршинами болье, то аршинь обощелся бы 4 рублями дешевле. Сколько аршинь онъ купиль?» Отвѣтомъ на эту задачу и служить число 12 арш.

ЗАДАЧА IV. — Нъкоторое число N есть произведение трехъ послъдовательныхъ нечетныхъ чиселъ; раздъливъ N послъдовательно на каждое изъ этихъ чиселъ и сложивъ частныя, находимъ въ суммъ 239. Найти N?

Пусть 3 послёдовательныя искомыя нечетныя числа будуть 2x-1, 2x+1, 2x+3; N=(2x-1)(2x+1)(2x+3). Ур-ніе задачи будеть:

$$(2x+1)(2x+3)+(2x-1)(2x+3)+(2x-1)(2x+1)=239,\ldots(1)$$
 или, по выполненіи всёхъ дёйствій и по упрощеніи:  $x^2+x=20$ , откуда:  $x'=4,\ x''=-5$ .

Положительное рашеніе даеть для трехь искомых чисель: 7, 9 и 11. Поварка:  $9 \times 11 + 7 \times 11 + 7 \times 9$  дайствительно = 239.

Для истолкованія отрицательнаго рѣшенія подставляємъ въ первонач. ур. (1)-x вмѣсто x, находимъ: (1-2x)(3-2x)+(-2x-1)(3-2x)+(-2x-1)(1-2x)=239, или, перемѣнивъ въ каждомъ членѣ знаки обоихъ множителей, находимъ ур-ніе

$$(2x-1)(2x-3)+(2x+1)(2x-3)+(2x+1)(2x-1)=239$$
,

корни котораго суть: -4 и +5. Взявъ корень =+5, находимъ, что искомыя числа суть: 2x-3=7; 2x-1=9; 2x+1=11. Такимъ образомъ, ръшеніе x=5 даеть тотъ же отвътъ, что и x=3, требуя только, чтобы искомыя числа были обозначены формулами 2x-3, 2x-1 и 2x+1 виъсто того, чтобы обозначать ихъ знаками 2x-1, 2x+1 и 2x+3. Но и то, и другое обозначенія одинаково возможны, и замъчательно, что алгебра показываетъ намъ й роsteriori, что оба эти обозначенія равнозначны.

ЗАДАЧА V. — Мущины и женщины, въ числь 32 лицъ, работают на фабрикъ, причемъ каждый мущина зарабатываетъ въ день 2-мя рублями больше, нежели каждая женщина; не смотря на это, ежедневный заработокъ всъхъ мущинъ таковъ же, какъ и заработокъ женщинъ, и составляетъ 60 р. Найти число мущинъ?

Пусть мущинь было x; число женщинь будеть 32-x. Каждый мущина зарабатываеть вь день  $\frac{60}{x}$ , каждая женщина  $\frac{60}{32-x}$  р. Уравненіе задачи будеть:

Окончательное ур.  $x^2-92x+960=0$  даеть: x'=80, x''=12; слъд. 32-x'=-48; 32-x''=20.

Ръменіе x''=12 для числа мущинь, даеть число женщинь 20; причемъ ежедневный заработокъ мущины составляеть 60:12 или 5 р.; заработокъ женщины =60:20=3 р. Слъд. это ръменіе удовлетворяеть всъмъ условіямъ задачи.

Но рѣшеніе x=80 для числа мущинъ, будучи больше числа ляцъ обоего пола (32), даетъ къ тому же для числа женщинъ отрицательное количество — 48; сл. второе рѣшеніе не соотвѣтствуетъ предложенному вопросу. Для истолкованія этого рѣшенія положимъ 32-x=y, откуда x=32-y, и подставимъ эти величины въ ур. (1); найдемъ ур.  $\frac{60}{32-y}-\frac{60}{y}=2$ , которому удовлетворяетъ y=-48, подставивъ (-y) вмѣсто y, получаемъ ур-ніе

изъ котораго y (число женщинъ) =48, а 32+y (число мущинъ) =80. Эти положительныя рѣшенія отвѣчаютъ на задачу, соотвѣтствующую ур-нію (2); задача эта такова: «мущины и женщины работаютъ на фабрикѣ, причемъ число мущинъ 32 больше число женщинъ; мущина и женщина зарабатываютъ въ день 60 р.; столько же и женщинъ. Найти число женщинъ?» Отвѣтъ: 80 мущинъ, зарабатывающихъ по 75 к. въ день, и 48 женщинъ, получающихъ по 1 р. 25 к. въ день.

ЗАДАЧА VI. — Нъкто, имъя капиталь въ 120000 р., раздълиль его на двъ части, которыя помъстиль подъ проценты. Первая часть дает ему ежегоднаго дохода 2800 р.; вторая, принося 1 процентомъ больше, даетъ дохода 2500 р. въ годъ. Каковъг объ части, и по сколько процентовъ онъ приносять?

Нусть первая часть приносить  $x^0/_0$ ; въ такомъ случать 1 р. прибыли получится со  $\frac{100}{x}$  р., а 2800 р. прибыли получится съ  $\frac{280000}{x}$  р. Разсуждая такимъ же образомъ, найдемъ, что вторая часть капитала равна  $\frac{250000}{x+1}$  р. А какъ сумма объихъ частей равна 120000 р., то имъемъ ур-ніе

$$\frac{280000}{x} + \frac{250000}{x+1} = 120000,$$

или 
$$12x^2-41x-28=0$$
, откуда:  $x'=4$ ,  $x''=-\frac{7}{12}$ .

Положительное рѣшеніе +4 даеть прямой отвѣть на вопрось, и показываеть, что вторая часть приносить 5%. Слѣд. 1-ая часть  $=\frac{280000}{4}=70000$ р.; 2-ая часть  $=\frac{250000}{5}=50000$  р. Сумма ихъ дѣйствительно составляеть 120000 р.

Истолкованіе отрицательнаго рѣшенія —  $\frac{7}{12}$  повело-бы къ условіямъ, несовмѣстнымъ съ понятіємъ о процентѣ; потому рѣшеніе это должно быть прямо отброшено. Полученіе посторонняго рѣшенія зависить отъ того, что ур-ніе, къ которому привела частная задача, общѣе этой послѣдней: оно отвѣчаетъ на всѣ вопросы, которые привели бы къ тому же ур-нію, какъ и разсматриваемый частный вопросъ, и которыхъ безчисленное множество. Поэтому пеудивительно, что одно изъ рѣшеній этого ур-нія чуждо частному вопросу.

3 а д а ч а VII. — Вакхъ, заставъ Силена спящимъ около бочки, наполненной виномъ, сталъ пить въ продолжени  $\frac{3}{5}$  того времени, въ какое Силенъ могъ бы выпить всю бочку. Послъ этого Силенъ проснулся и выпилъ оставшееся вино. Если бы Вакхъ и Силенъ пили вмъстъ, то они выпили бы всю бочку 6-ью часами скоръе и на долю Вакха пришлось бы только  $\frac{2}{3}$  того, что онъ на самомъ дъль оставилъ Силену. Во сколько часовъ каждый изъ нихъ можетъ выпить цълую бочку?

Означимъ время, въ которое Вакхъ можетъ выпить всю бочку, черезъ 3x, а время, въ которое Силенъ можетъ выпить туже бочку, черезъ 5y. Сначала Вакхъ пьетъ въ продолженія 3y часовъ, и какъ въ одинъ часъ онъ выпиваетъ  $\frac{1}{3x}$  бочки, то въ 3y часовъ выпьетъ  $\frac{y}{x}$  бочки. Затѣмъ, дегко видѣть, что вмѣстѣ они выпили бы всю бочку въ  $\frac{15xy}{3x+5y}$  час. Вакхъ оставилъ Силену  $1-\frac{y}{x}$  бочки, и слѣд. послѣдній пилъ вино въ продолженіи  $(1-\frac{y}{x}).5y$  часовъ: поэтому оба они пили въ теченіи  $3y+(1-\frac{y}{x}).5y$  или  $\frac{(8x-5y)y}{x}$  часовъ. Приравнявъ разность временъ, указанную въ условіи, 6 часамъ, получимъ ур-ніе

$$\frac{(8x-5y)y}{x} - \frac{15xy}{3x+5y} = 6.$$

Выразимъ теперь, что количество вина, выпитаго Вакхомъ, было бы во второмъ случат равно  $\frac{2}{3}$  того, что онъ на самомъ дтлт оставилъ Силену. Такъ какъ Вакхъ выпиваетъ въ часъ  $\frac{1}{3x}$  бочки, то въ  $\frac{5xy}{3x+5y}$  часовъ, въ теченіи которыхъ онъ пилъ бы во второмъ случат, онъ выпилъ бы часть бочки, равную  $\frac{5y}{3(3x+5y)}$ . Такимъ образомъ второе ур-ніе будетъ:

$$\frac{5y}{3(3x+5y)} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{y}{x}\right).$$

Освободивъ ур-нія отъ дробей, дадимъ имъ видъ

$$25xy^2 - 25y^3 + 9xy - 18x^2 - 30xy = 0$$
$$10y^2 + 11xy - 6x^2 = 0$$

откуда x=5, y=2: слъд. искомыя числа часовъ суть 15 и 10.

#### 591. Задачи.

#### А. Вопросы съ однимъ неизвъстнымъ.

- 1. Нѣсколько пріятелей, обѣдая вмѣстѣ въ гостинницѣ, издержали 102 р. Не желая, чтобы трое приглашенныхъ участвовали въ расходахъ, остальные сотранезники уплатили  $1\frac{2}{7}$  рубля болѣе каждый, чѣмъ еслибы платили всѣ обѣдавшіе. Сколько лицъ участвовало въ обѣдѣ?
- 2. Купецъ купиль нѣсколько головъ телятъ, заплативъ за все 672 р. Если бы каждый теленокъ обошелся ему 4-мя рублями дешевле, то на ту же сумму онъ могъ бы купить 3-мя штуками больше. Сколько телятъ онъ купилъ и по какой цѣнѣ?

- 3. Отцу было 24 года, когда у него родился сынъ. Если перемножить лёта отца и сына въ настоящее время, то произведение окажется въ 3 раза болёс квадрата лётъ сына. Сколько лётъ наждому изъ нихъ въ настоящее время?
- 4. Разнощикъ вупилъ апельсиновъ на 7 р. 56 к. Выбросивъ 5 штукъ, оказавшихся гнилыми, онъ продалъ каждый изъ оставшихся апельсиновъ 4 копъйками дороже, чъмъ самъ заплатилъ, и такимъ образомъ получилъ барыша 58 коп. Сколько апельсиновъ онъ купилъ?
- 5. Нѣкто, отдавъ въ долгъ сумму 18000 р., и получивъ черезъ годъ процентныя деньги, издержалъ изъ нихъ 210 р., а остальныя присоединидъ къ капиталу, отдавъ всю сумму на прежніе проценты. Такимъ образомъ въ концѣ втораго года у него образовалась сумма 19437, считая въ этомъ числѣ и процентныя деньги. Сколько % получилъ онъ на свой капиталъ?
- 6. Бочка съ виномъ содержить 80 бутылокъ. Отливъ изъ нея нѣсколько бутылокъ, бочку дополнили водою. Затѣмъ, снова отлили столько же бутылокъ, какъ и въ первый разъ и замѣнили отлитое количество смѣси водою. Послѣ этого оказалось, что въ 80 бутылкахъ смѣси было чистаго вина только 45 бут. По сколько бутылокъ отливали каждый разъ?
- 7. Резервуаръ, вмѣстимость котораго равнялась 5280 ведрамъ, былъ наполненъ двумя трубами, изъ которыхъ вода текла неодинаковое время. Первая труба давала каждую секунду 2 ведрами больше второй. Если бы вторая труба давала въ секунду столько, сколько первая, то изъ нея натекло бы 3400 вед.; а еслибъ первая давала въ секунду столько, сколько вторая, то она дала бы 2048 ведеръ. Сколько ведеръ воды давала каждая труба въ секунду?
- 8. Дюнвирхенъ, Брюссель и Реймсъ образуютъ прямоугольный  $\triangle$ , причемъ Брюссель находится въ вершинъ прямаго угла. Сумма ввадратовъ трехъ сторонъ, измъренныхъ вилометрами, составляетъ 105800. Разстояніе между Брюсселемъ и Дюнвирхеномъ относится въ разстоянію между Б. и Р. вавъ 56:73. Опредълить разстояніе между этими тремя городами?
- 9. Одинъ путешественникъ, выйдя изъ точки А, идетъ къ сѣверу, проходя ежсдневно 36 верстъ. Черезъ пять дней другой путешественникъ выходитъ изъ А въ направленіи къ востоку, проходя ежедневно по 28 верстъ. Черезъ сколько дней послѣ выхода 2-го разстояніе между ними, по прямой линіи, будетъ равно 430 верстамъ?
- 10. Стан обезьянь забавлялась: одна осьмая часть ихъ въ квадратъ бъгала въ лъсу, остальныя 12 кричали на верхушкъ холма. Скажи мнъ, сколько было всего обезьянъ?\*).
- 11. Корень квадратный изъ половины числа пчель роя полетёль на кусть жасмина;  $\frac{8}{9}$  цёлаго роя осталась дома; одна самочка полетёла за самцомъ, который жужжить въ цвёткё лотоса, куда онъ попаль ночью, привлеченный пріятнымъ запахомъ, и изъ котораго онъ не можеть выйти, такъ какъ цвётокъ закрылся. Скажи мнё число пчель роя?
- 12. Найти число, котораго квадрать вийстй съ кубомъ въ 9 разъ больше слидующаго цилаго числа?
- 13. Когда карета провхала 54 метра, переднее колесо ся сдвлало 9-ю оборотами больше задняго. Если бы увеличить окружность каждаго колеса на 3 дециметра, то

<sup>\*)</sup> Эта задача и слъдующая находятся въ сочинении "Віаганита" (т. е. вычисленіе корней) индійскаго ученаго XII въка Баскары Ачаріа.

переднее колесо сдълало бы на томъ же разстояніи только 6-ю оборотами больше задняго.. Найти окружности обоихъ колесъ?

- 14. Два тѣла движутся по двумъ прямымъ, пересѣкающимся подъ прямымъ угломъ, приближаясь къ точкѣ пересѣченія. Первое находится въ 236 метрахъ отъ точки пересѣченія и проходитъ по 7 метровъ въ секунду; второе въ 197 метрахъ и проходитъ по 6 метровъ въ секунду. Черезъ сколько секундъ разстояніе между ними будетъ 13 метрамъ?
- 15. Центры двухъ круговъ движутся по сторонамъ прямаго угла по направленію къ вершинѣ. Центръ 1-го круга, котораго радіусъ = 46 м., удаленъ на 2248 м. отъ вершины и проходить по 7 м. въ секунду. Радіусъ 2-го круга = 14 м.; центръ его удаленъ отъ вершины на 1628 м. и приближается къ ней со скоростью 5 м. въ секунду. Черезъ сколько времени круги будутъ имѣтъ внѣшнее касаніе?
- 16. Центръ неподвижнаго круга, котораго радіусъ 1009 сантиметрамъ, находится на горизонтальной прямой. Въ той же плоскости, прямо надъ центромъ въ вертикальномъ направленіи и въ разстояніи 50 сантий. находится центръ подвижнаго круга, имѣющаго радіусъ 945 с.м. Кругъ этотъ движется вертикально внизъ со скоростью 180 с.м. въ секунду, а горизонтально со скоростью 2000 с.м. въ секунду. Черезъ сколько секундъ оба круга будутъ имѣть: 1) внѣшнее касаніе, 2) внутренне касаніе, и черезъ сколько секундъ разстояніе между ними будетъ имѣть паименьшую величину? (Задача эта имѣетъ примѣненіе въ астрономін при вычисленіи солнечныхъ и лунныхъ затмѣній).
- 17. Сумма двухъ последовательныхъ нечетныхъ чисель, сложенная съ суммою ихъ квадратовъ и съ разностью ихъ кубовъ, даетъ 304. Найти эти числа?
- 18. Купецъ продалъ кусокъ сукна за 60 р., а другой кусокъ, въ которомъ было 8-ю арш. больше, за 70 р. Если бы онъ продалъ первый кусокъ по цѣнѣ втораго, а второй по цѣнѣ перваго, то за все выручилъ бы 134 р. Сколько аршинъ того и другаго сукна онъ продалъ?
- 19. Нѣсколько человъвъ объдали въ складчину. Еслибы было 3-мя лицами больше и каждое лицо платило бы 50-ю коп. дороже, то расходъ составиль бы 60 р. А еслибы было 3-мя лицами меньше и каждое платило бы 50-ю коп. дешевле, расходъ составиль бы 27 р. Сколько лицъ объдало п какая сумма ими издержана?
- 20. Изъ двухъ рабочихъ одинъ получилъ 135,2 р., другой 64,8 р. Первый работалъ 6-ю днями больше 2-го; но еслибъ 1-й работалъ столько дней какъ 2-й, а 2-й столько дней, сколько 1-й, они заработали бы поровну. Опредълить число рабочихъ дней и поденный заработокъ каждаго рабочаго.
- 21. Изъ двухъ рабочихъ одинъ получилъ 100 р., другой 36. Первый работалъ 8-ю днями больше 2-го. Есян бы 1-й работалъ 11-ю днями меньше, а 2-й тремя днями больше, оба они заработали бы равныя суммы. Опредълить число рабочихъ дней и поденную плату каждому рабочему?
- 22. Землевладелець купиль несколько головь рогатаго скота на 360 р. Три штуки околело, а остальных онъ продаль, взявь за каждую голову 5-ю рублями больше, чёмъ платиль самъ. Весь барышь составляль 15 р. Сколько онъ платиль за каждую голову?
- 23. Нѣкто, купивъ предметъ, который вскорѣ сталь ему ненуженъ, продаль сго за 21 р., потерявши при этомъ столько процентовъ, сколько рублей предметъ ему стоилъ. Сколько онъ потерялъ при продажѣ?
- 24. Нѣкто купиль картину, принявши ее за ориганаль. Убѣдившись впослѣдствіи, что его обманули, онъ продаль картину за 54 р., потерявши столько %, сколько рублей въ шестой части покупной цѣны. За сколько была куплена картина?

- 25. Нѣкто купилъ персиковъ по такой цѣпѣ, что еслибы на 1 р. 20 к. сму дали 2-мя штуками больше, то дюжина обошлась бы 10-ю коп. дешевле, чѣмъ онъ заплатилъ. Сколько онъ платилъ за дюжину?
- 26. Служанкъ поручню было купить грушъ на 60 к. Дъйствительно, она ихъ купила на эту сумму; но дорогою съъла 4 штуки, вслъдствии чего оказалось, что хозяйка заплатила за дюжину грушъ 6-ю коп. дороже настоящей цъны. Сколько грушъ было куплино служанкою?
- 27. Нѣкто арендоваль нѣсколько десятинь земли за 840 р. Изъ этого числа самъ онъ обработываетъ 7 десятинъ, а остальныя отдаетъ въ аренду 10-ю рублями дороже за десятину, чѣмъ платитъ самъ; и такимъ образомъ за отданныя имъ въ наемъ десятины получаетъ 840 р. Сколько десятинъ онъ отдаетъ въ наемъ?
- 28. Одинъ изъ двухъ врановъ можетъ наполнить бассейнъ 3-ия часами скоръе, нежели другой кранъ. Оба крана виъстъ наполняютъ бассейнъ въ 3 ч. 36 м. Во сколько часовъ каждый кранъ, дъйствуя отдъльно, можетъ наполнить бассейнъ?
- 29. Лодочникъ, плывя по теченію рѣки на протяженіи 5 версть и возвращаясь назадъ, употребляеть на весь путь 1 ч. 6 м. 40 с. Скорость теченія рѣки = 2,4 вер. въ часъ. Сколько лодочникъ можеть проѣхать на спокойномъ озерѣ, если будеть грести съ тою же силою?
- 30. Два поъзда пробътають въ 12 ч.: первый нъкоторое неизвъстное разстояніе x, другой 114 верстами больше. На переъздъ  $142\frac{1}{2}$  верстъ второй поъздъ употребляетъ 45-ю минутами меньше, нежели первый. Найти пространство, пробътаемое первымъ поъздомъ и среднюю скорость каждаго поъзда?
- 31. Нѣвто помѣстилъ подъ проценты вапиталъ 12000 р.; черезъ годъ вапиталъ съ наросшею прибылью онъ помѣстилъ въ нѣвоторое предпріятіе, дававшее 1% больше, и въ вонцѣ втораго года получилъ прибыли 756 р. Найти проценты.
- 32. Нѣкто далъ взаймы 15000 р. за опредѣленные проценты. Спустя 3 м. 18 дней, должникъ, имѣвшій право на уплату въ этоть срокъ, найдя возможность достать деньги  $1^0/_0$ -мъ дешевле, предлагаеть заимодавцу за дальнѣйшее пользованіе капиталомъ эти уменьшенные  $0/_0$ . Послѣдній соглащается, возвращаетъ первый вексель и беретъ другой на 15524,5 р. срокомъ на 4 м. Найти проценты.
- 33. Спекулянть покупаеть на 24000 р. облигаціи, стоящія x процентами ниже своей ниминальной ціны. Потомъ, когда облигаціи поднялись на  $x^0/_0$  выше своей номинальной ціны, онъ оставиль 20 облигацій у себя, а остальныя продаль за 15600 р. Номинальная ціна облигацій = 500 р. Найти число купленныхъ облигацій и ціну каждой?
- 34. Банкиръ учелъ два векселя: одинъ въ 2080 р. срокомъ на 8 м., другой въ 3150 р., срокомъ на 10 м. Полный учетъ составлялъ 230 р. Узнать, по скольку  $\frac{0}{0}$  учтены оба векселя (полагая учетъ точный).
- 35. Два по $^{\dagger}$ зда выходять изъ пунктовъ М и N, разстояніе между которыми равно 560 верстамъ, и идутъ навстр $^{\dagger}$ зчу другъ другу. Чтобы они встр $^{\dagger}$ тились на полнути, нужно, чтобы по $^{\dagger}$ здъ изъ N вышель 1 ч. 45 м. раньше другаго. Если бы оба по $^{\dagger}$ зда вышли одновременно, то черезъ 7 часовъ разстояніе между ними составляло бы  $^{\dagger}$ 1 первоначальнаго. Сколько употребляетъ каждый по $^{\dagger}$ 3 на пере $^{\dagger}$ 3 разстоянія MN?
- 36. А и В идуть съ одинаковою скоростью изъ М въ R. А выходить раньше нежели В. У третьяго милеваго столба недоходя R, А нагоняеть стадо гусей, которое въ каждый часъ дѣлаетъ только  $\frac{1}{6}$  мили. Черезъ  $\frac{1}{2}$  часа послѣ этого встрѣчаетъ онь стадо овецъ, которое гонятъ со скоростью  $\frac{1}{5}$  мили въ часъ. В встрѣчаетъ гусей

въ разстоянін  $2\frac{1}{2}$  миль не доходя до R, а овецъ 10-ю минутами раньше того, какъ онъ достигаетъ втораго милевато столба передъ R. Съ какою скоростью идуть пѣшеходы A и B?

- 37. Нѣкто въ первый годъ посѣялъ  $4\frac{1}{2}$  четверти ишеницы. На второй годъ опъ посѣялъ 16 четвертями меньше всего умолота, полученнаго отъ первой жатвы, и при одинаковомъ урожав обоихъ посѣвовъ получилъ въ 8 разъ больше того количества, которое имъ было посѣяно, да еще  $21\frac{1}{3}$  четверти. Опредѣлить урожай, т. е. узнать, во сколько разъ количество вымолачиваемой ишеницы было больше количества засѣваемой?
- 38. Найти пять послёдовательных цёлых чисель, зная что сумма квадратовь двухь больших равна суммё квадратовь трехь остальныхь.
- 39. Найти 4 последовательныя целыя числа, зная, что кубь большаго равенъ сумме кубовъ трехъ остальныхъ чиселъ.
- 40. Корпусь въ 6048 солдать быль разбить на ивкоторое число равных отрядовь, посланных занять такое же число врвиостей. Во время компаніи умерло оть эпидеміи число человѣкъ, равное  $2\frac{1}{2}$  отрядамъ, а весь остатокъ, за исключеніемъ 84 инвалидовъ, возвратившихся въ главную ввартиру, быль точно также какъ прежде поровну разставлень по крѣпостямъ. Но уменьшенные гарнизоны оказались не въ состояніи защищаться, и всѣ крѣпости попали въ руки непріятеля, а люди, за исключеніемъ четырехъ цѣлыхъ гарнизоновъ и 210 бѣглецовъ, были перебиты или взяты въ плѣнъ. Потеря, понесенная въ этомъ случаѣ, виѣстѣ съ потерею отъ эпидеміи, равнялась 4186 человѣкамъ. Найти число крѣпостей?
- 41. Извъстно, что сила притяженія прямо пропорціональна массамъ и обратно пропорціональна квадрату разстояній между взаимодъйствующими тълами. Зная это, опредълить, на какомъ разстояніи отъ центра земли находится точка, одинаково притягиваемая лувою и землею. Масса луны = 1, масса земли = 88, разстояніс между центрами земли и луны = 96000 километрическихъ лье.
- 42. Длинная цилиндрическая стеклянная трубка, запаянная съ одного конца, наполнена воздухомъ, находящимся подъ давденіемъ 30", и вертикально погружена въ ртуть, которая въ трубкѣ и сосудѣ находится на одномъ уровнѣ; длина трубки надъ уровнемъ ртути въ сосудѣ = 10". Какую длину трубки будетъ занимать воздухъ, если поднять трубку еще на 10", такъ что вся высота трубки будетъ = 20"?
- 43. Цалиндрическая трубка, въ которой движется поршень, погружена въ чашку со ртутью. Ртуть въ трубкъ стоитъ на 12 с. м. выше ея уровня въ чашкъ, колонна же воздуха занимаетъ 30 с. м. длины. Поршень опускаютъ 6 с. м. Какова въ такомъ случаъ будетъ высота ртути въ трубкъ?
- 44. Высота всасывающей трубы насоса равна 2 метрамъ. Поршень можетъ двигаться между 1 д. м. и 5 д. м., считая отъ клапана всасывающей трубы. Радіусъ послѣдней = 1 с. м., радіусъ верхней трубы = 2 д. м. На какую высоту подицмется вода послѣ 1-го взмаха поршия?
- 45. Нужно 88,1625 кг. льда, чтобы понизить съ 35° до 15° Ц. воду, содержащуюся въ бассейн $^{1}$ , им $^{1}$ ющемъ видъ ус $^{1}$ ченнаго конуса съ горизонтальными основаниями, причемъ радіусъ верхняго основанія = 1,2 м., высота = 0,9 м., и бассейнъ наполненъ водою до  $\frac{1}{2}$  своей высоты. Вычислить радіусъ нижняго основанія, зная, что скрытая теплота таянія льда равна 80.

#### В. Вопросы съ нъсколькими неизвъстными.

- 46. Въ трехзначномъ числѣ квадратъ цифры десятковъ равенъ произведенію крайнихъ цифръ, сложенному съ 4. Разность между удвоенною цифрою десятковъ и цифрою единицъ равна цифрѣ сотенъ; если написать цифры числа въ обратномъ порядкѣ, получится число, дающее, по вычитаніи изъ даннаго, остатокъ 390, увеличенный общею цифрою десятковъ. Найти это число.
- 47. Названіе одной, знаменнтой въ древности, горы пишется тремя буквами. Если эти буквы замѣнить нумерами, означающими ихъ мѣсто въ русской азбукѣ, то сумма всѣхъ трехъ чиселъ составитъ 15. Среднее число вдвое менѣе произведенія крайнихъ, увеличеннаго на 1; а сумма квадратовъ крайнихъ чиселъ на 32 единицы больше удвоеннаго квадрата средняго числа. Какъ называлась гора?
- 48. Нѣкто, имѣя капиталь въ 84000 р., раздѣлиль его на двѣ части, помѣстивъ пхъ подъ различные %, такъ что обѣ части дають одинаковый доходъ. Если бы 1-я часть была помѣщена на такіе проценты какъ 2-я, она приносила бы 2880 р. Если же 2-ю помѣстить на проценты 1-й, то она дастъ доходу 1620 р. Найти обѣ части капитала и проценты, на которые онѣ помѣщены.
- 49. Купецъ, покупая чай и затѣмъ продавая его, употребляетъ фальшивме вѣсы; черезъ это онъ получаетъ 24-мя процентами больше, чѣмъ еслибы онъ пользовался вѣрными вѣсами. Но если бы при покупкѣ онъ клалъ товаръ на ту чашку, на которую кладетъ его при продажѣ и обратно, то на цѣнѣ, которую онъ самъ платитъ, опъ ничего не потерялъ бы и ничего не выигралъ бы. Сколько % барыша онъ получалъ бы, употребляя вѣрные вѣсы и при покупкѣ и при продажѣ?
- 50. Бассейнъ наполняется изъ двухъ крановъ. Первый открываютъ на  $-\frac{2}{3}$  того времени, въ которое 2-й одинъ можетъ наполнить бассейнъ; послѣ этого открываютъ 2-й, изъ котораго и вливается недостающее количество воды. Если бы съ самаго начала были открыты оба крана, то бассейнъ наполнился бы 1 ч. 55 м. 30 с. скорѣе, и первый кранъ далъ бы  $\frac{5}{8}$  того количества воды, которое въ дѣйствительности далъ 2-й. Сколько потребовалось бы времени каждому крану въ отдѣльности для наполненія бассейна?
- 51. Въ трюмъ корабля, частію залитаго водой, равномърно втекающей черезт пробонну, работають 2 пемпы, приводимыя въ движеніе A и B. Изъ нихъ A дълаеть 3 взмаха въ то время, какъ B дѣлаеть два; но четырьмя взмахами B выкачиваеть столько же воды, сколько A пятью. B работаегъ нѣкоторое время, въ которое A одинъ опорожниль бы трюмъ. Затѣмъ A выкачиваеть остальное, и трюмъ опорожненъ въ  $13\frac{1}{3}$  часовъ. Еслибы они работали вмѣстѣ, то трюмъ опорожнился бы въ  $3\frac{3}{4}$  часа, и A выкачаль бы ста ведрами больше, чѣмъ онъ сдѣлалъ. Сколько притекаетъ воды черезъ щель въ одинъ часъ?
- 52. А и В выбхали изъ С и D, первый 3 часами раньше втораго. Они встрътились въ 20 миляхъ отъ D, и А достигъ D часомъ раньше, нежели В прибылъ въ С. На слъдующій девь В выбхалъ раньше и повстръчалъ А, пробхавшаго  $\frac{1}{7}$  своего обратнаго пути, и хотя В былъ задержанъ на 3 часа, но все таки прибылъ въ D раньше, чъмъ А достигъ С, на такое время, въ которое могъ бы пробхать 28 миль. Съ какою скоростью они путемествовали?
- 53. Сосудъ можетъ быть наполненъ водою посредствомъ двухъ трубъ, изъ которыхъ одна вливаетъ въ него по 4 литра въ часъ; другая же труба можетъ наполнитъ сосудъ, употребляя на это однимъ часомъ болъе, чъмъ объ трубы вмъстъ. Послъ пятичасоваго совмъстнаго дъйствія объихъ трубъ въ сосудъ недостаетъ еще 13 ли-

тровъ для наполненія его. Спрашивается: 1) сколько литровъ въ часъ доставляеть вторая труба; и 2) сколько часовъ должны быть открыты об'в трубы для наполненія сосуда?

- 54. Изъ средины города идутъ двъ улицы, пересъкающія прямолинейно-текущую ръку посредствомъ мостовъ А и В. Изъ мъста встрьчи улицъ идетъ къ ръкъ сточная труба, одинаково наклоненная къ обънмъ улицамъ и встръчающая ръку въ такой точкъ, которая отстоитъ отъ А на 6 кольнъ, а отъ В на 11 кольнъ меньше длины трубы. Издержки по устройству трубы составляли столько фунтовъ стерлинговъ на каждое кольно, сколько разъ таковое содержится въ длинъ улицы, ведущей къ А. Но какъ одной трубы оказалось недостатотно, то проведена была вторая труба отъ пункта этой послъдней улицы, отстоящаго на 4 кольна отъ А. Вторая труба проведена была въ тотъ же пунктъ ръки, какъ и первая и была одинаково наклонена къ ръкъ и къ 1-й трубъ. Если бы проведены были трубы подъ объими улицами, то издержки на нихъ, считая по 9 ф. с. за кольно, превышали бы только на 54 ф. с. стоимость первой трубы. Найти длины: улицъ и первой трубы.
- 55. Три города A, B и C лежать въ вершинахъ прямоугольнаго треугольника, причемъ В въ вершинъ прямаго угла; разстояніе отъ A до В кратчайшее изъ всъхъ. Пъщеходъ нашелъ, что время, употребленное имъ на переходъ изъ A въ B, а затъмъ изъ В въ C, на  $2\frac{2}{3}$  часа болъе времени, въ которое онъ прошелъ изъ A въ C. Карета, вытхавшая изъ A четырьми часами позже пъщехода и вдущая втрое скоръе его, догнала его въ 8 миляхъ за B, по дорогъ къ C. Прівхавши затъмъ черезъ C въ A и прождавши тамъ  $6\frac{2}{3}$  часа, карета совершаеть опять тотъ же путь и достигаетъ мъста A въ одно время съ пъщеходомъ, отдыхавшимъ 4 часа въ C. Найти разстоянія между городами и скорости пъщехода и кареты.
- 56. А и В должны совершить путь между двумя верстовыми столбами шоссейной дороги, отстоящими другь оть друга на четное число версть. Имъя въ своемъ распоряжени только одну лошадь, они уговорились, чтобъ каждый изъ нихъ поочередно ъхалъ версту на лошади, а слъдующую версту шелъ ившкомъ; причемъ чтобы каждый, проъхавъ версту на лошади, оставлялъ бы ее у столба, гдѣ и находилъ бы ее другой путешественникъ. Скорость лошади вдвое больше скорости В. Первый садится на лошадь В и оба одновременно достигаютъ седьмаго верстоваго столба. Здъсь, находя, что нужно ускорить путешествіе, они условились проходить пѣшкомъ полуверстою въ часъ больше. Скорость лошади теперь уже вдвое больше скорости А, и первый садится на лошадь опять В. Все путешествіе продолжалось  $2\frac{62}{63}$  часа. Опредълить скорости путешественниковъ и пройденное ими разстояніе.
- **592.** Историческое примичаніе. Окончива статью о рашеній уравненій, сдалаема краткій историческій очерка развитія теоріи уравненій; этоть очерка представить виаста са тамь и хода развитія алгебры.

О познаніяхъ Халдеевъ въ алгебръ намъ почти ничего неизвъстно. Съ достовърностью можно скатать только, что имъ было извъстно ръшеніе нъкоторыхъ уравненій 1-й ст. съ 2 неизвъстными. — Единственнымъ источникомъ, изъ котораго можно почеринуть свъдънія о состояніи алгебры у древнихъ Елиптяль, служитъ папируст Ринда, подлинный текстъ котораго быль написанъ почти за 3000 лътъ до Р. Х. При ръшеніи уравненій авторъ напируса слъдуетъ вполит опредъленнымъ правиламъ, соединяя, напр., неизвъстные члены въ одну часть ур-нія и приводя ихъ къ одному члену. Въ концъ нъкоторыхъ ур-ній указаны и пріемы повърки. Изъ содержанія папируса можно заключить, что египетскимъ математикамъ извъстно было ръшеніе уравненій 1-й ст. съ 1 неизвъстнымъ. —Самый древній памятникъ математической литературы Китай-

цевь (Кіу-Чангъ или 9 отделовъ ариометики) написанъ въ весьма отдаленное врсмя, но когда именно — нътъ указаній. Глава VIII этого сочиненія посвящена ръшенію уравненій. Подробите знакомить наст ст познаніями Китайцевт вт алгебрт соч. Тши-Кіу-Тшау, нэвъстное подъ именемъ представленія пебесной монады (написано за 1200 л. слишкомъ до Р. Х). Здёсь указаны численные примеры решенія ур-ній по 4-й стецени включительно. Наиболее блестящихъ результатовъ достигли Китайскіе математики въ решеніи неопределенныхъ уравненій; въ этомъ направленіи они опередили и европейцевъ и индусовъ, хотя последние и достигли весьма важныхъ результатовъ въ этомъ отделе алгебры. Последнее самостоятельное сочинение по матетативъ, написанное Китайцами, относится въ XVI въку; это: Начала искусства вычисленія. Здёсь изложено рёшеніе уравненій первыхъ трехъ степеній, съ однимъ неизвъстнымъ, котя ур-нія 3-й степени ръшаются ощупью. Начиная съ XVII стольтія математич. сочиненія Китайцевъ составляются уже подъ вліяніємъ европейскихъ миссіонеровъ. — Индусы достигли въ алгебръ высокаго развитія. Самый древній изъ индусскихъ математиковъ есть Аріабіатта (жиль въ V въкъ по Р. Х.). Изъ его сочиненій съ достоверностью можно заключить, что въ его время известно было решеніс ур-ній 2-й степени общаго вида:  $ax^2 + bx + c = o$ , а съ этимъ вмёсть извёстно было и производство алгебранческихъ преобразованій; точно также изв'єстно было р'єшеніе ур-ній 1 ст. съ 1 неизв. въ общемъ вид'ь; также самое общее р'вшеніе изв'ястной задачи о курьерахъ въ примъненіи къ вопросу о двухъ планетахъ. Затэмъ формулировано ръшение неопредъленныхъ ур-ній 1-й степени. Другой индусскій ученый, Брамегупта, написаль около 628 г. по Р. Х. математическое соч. подъ заглавіемъ "Брама-Спута-Сидганта" т. е. "Улучшенная система Брамы". Здёсь показано рёшеніе неопред. ур-ній вида ax + by = c, ур-ній 1-й ст. съ 1 неизв'єстнымъ, ввадратныхъ ур-ній и піскольких уравненій съ нісколькими неизвістными, преимущественно неопредёленныхъ. Замёчательно, что Брамегунта имёль понятіе объ отрицательныхъ величинахъ и объ ихъ значении, разсматривая ихъ какъ положительныя, только отсчитываемыя въ другую сторону отъ нуля. Подобный взглядъ принятъ европейскими учеными долгое время спустя после Брамегунты. Третій замечательный индусскій математикъ Баскара (1141-1225 по Р. Х.) оставиль трактать подъзаглавіемъ "Сидгантациромани" (т. е. вънецъ астрономической системы), вторая часть котораго "Віаганита" (т. е. вычисленіе корней) содержить алгебру. Изъ этого сочиненія видно, что Баскара имът вполнъ ясное понятіе о положительных и отрицательных количествахъ, зналъ правило знаковъ при умноженіи. Ему было извёстно рёшеніе неопредёленных уравненій I п II ст. (вида  $ay^2+t=x^2$ ), 1 ст. съ 1 неизвёстных, ввадратныхъ, также отдёльныхъ случаевъ рёшенія ур-ній 3-й и 4-й ст. У Индусовъ находимъ и зачатки приложенія алгебры къ геометріи. — Изъ Грековъ Діофанта (во второй половинѣ IV ст. по Р. Х.), занимавшійся главнымъ образомъ неопреділеннымъ анализомъ, какъ полагаютъ, былъ первый, кому пришла мысль объ употребленій буквъ для облегченія ръшенія задачь; онь пользовался иниціалами неизвъстныхъ для обозначенія этихъ количествъ.— Арабы заимствовали свои математическія познанія у индусовъ н грековъ; самостоятельнаго не внесли почти ничего.

Пизанскій купець, Леопардо Фибопаччи, во время своих путешествій на востокт, познакомился съ математическими познаніими пидусовъ и арабовъ и распространиль эти познанія среди итальянцевъ, а чрезъ нихъ и въ остальной христіанской Европть. Его математическій трактать abbacus былъ написанть въ 1202 году. Но истиннымъ основателемъ алгебры, какъ буквеннаго исчисленія, былъ французъ Вьетъ (1540—1603).

Что касается слова *замебра*, то теперь выяснено, что оно происходить отъ арабскаго слова djebr, которое означаеть вставку вывихнутаго члена; въ течени всёхъ среднихъ въковъ слово это употребляли въ хирургіи въ его первовачальномъ значеніи. Еще и въ наше времи въ Испаніи словомъ algebra означаютъ вправку вывихнутаго члена, а костоправовъ называютъ—algebrista.—Арабы назвали нашу науку алеброю, желая этимъ словомъ выразить операцію перенесенія отрицательнаго члена изъ одной части уравненія въ другую, иначе говоря, возстановленіе во второй части ур-нія члена, уничтоженнаго въ первой части.

## ГЛАВА ХХХІХ.

Изслъдованіе измъненія нъкоторыхъ функцій.— Maxima и minima.

593. Предварительныя свѣдѣнія и опредѣленія. — Количество наз. ncpe-мъннымъ, если оно можетъ измѣнять свою величину; перемѣнное наз. negaeu-симымъ, если его пямѣненія произвольны; если же измѣненія перемѣннаго y зависятъ отъ измѣненій другаго перемѣннаго x, то y наз. saeucumымъ перемѣннымъ или функціей перемѣннаго <math>x. Такъ, окружность и площадь круга, измѣняясь съ измѣненіемъ радіуса, суть функціи радіуса, который въ данномъ случаѣ играетъ роль независимаго перемѣннаго; площадь треугольника есть функція основанія и высоты; объемъ прямоугольнаго парадлеленинеда есть функція трехъ его измѣреній и т. п. Чтобы обозначить, что y есть функція x, нишутъ: y = f(x).

Функція непрерывная. — Если измѣнять x отъ  $x=\alpha$  до  $x=\beta$  постепенно, такъ чтобы это перемѣнное принимало послѣдовательно всѣ промежуточныя значенія между  $\alpha$  и  $\beta$ , то если при этомъ f(x) остается дѣйствительною, конечною, а ея приращенія сами могутъ быть сдѣланы какъ угодно малыми, она наз. Функцією непрерывною между  $\alpha$  и  $\beta$ .

Итакъ, чтобы f(x) была непрерывна въ интерваллъ отъ  $x=\alpha$  до  $x=\beta$ , она должна удовлетворять слъдующимъ условіямъ: 1) не имъть въ этомъ интерваллъ мнимыхъ значеній; 2) не обращаться въ  $\pm\infty$ ; 3) когда x-су даемъ безконечно малое приращеніе, то и соотвътствующее приращеніе функціи д. б. безконечно—мало; другими словами, непрерывная функція не должна переходить отъ одного своего значенія къ другому скачками, не проходя всъхъ промежуточныхъ значеній. Напр. такая функція не можетъ изъ положительной сдълаться отрицательною, не проходя черезъ ноль. Если независимое перемѣнное x непрерывно измѣнять отъ  $x=\alpha$  до  $x=\beta$ , то сама функція, предполагая, что она въ этомъ интерваллъ непрерывна, можетъ измѣняться, или постоянно возрастая, или постоянно убывая, или—то возрастая, то убывая.

Махіта и тіпіта. — Когда функція, сначала возраставшай, начинаєть уменьшаться, то въ самый моменть перехода отъ увеличенія къ уменьшенію она принимаєть значеніе большее сосёднихъ; это значеніе наз. наибольшим значеніем пли тахітитом функціи. Наобороть, если функція, сначала уменьшавшаяся, начинаєть потомъ увеличиваться, то въ самый моменть перехода

отъ уменьшенія къ увеличенію она принимаеть значеніе, меньшее непосредственно предшествовавшихъ и непосредственно следующихъ; такое значеніе наз. ея наименьшею величиною или minimum'омъ.

Пусть  $\gamma$  будеть то значение x, содержащееся между  $\alpha$  и  $\beta$ , при которомъ функція принимаеть значеніе с, и пусть в будеть положительное количество, какъ угодное близкое къ нулю. Если эта функція при возрастаніи x отъ  $\gamma-h$ до у возрастала, а затъмъ при увеличеніи x отъ у до у+h идетъ убывая, то c и есть maximum функціи при  $x=\gamma$ . Наобороть, если функція уменьшалась при возрастаніи x отъ  $\gamma-h$  до  $\gamma$ , затёмъ увеличивается при возрастаніи x отъ  $\gamma$  до  $\gamma + h$ , то c и будеть minimum'омъ функціи при  $x = \gamma$ . Махіма и minima, какъ мы ихъ только-что опредёлили, не следуетъ смещивать съ самою большою плп съ самою меньшею величиною функціп. Во многихъ вопросахъ независимое перемънное не можеть измъняться отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е. черезъ всю область действительныхъ чисель, но въ своихъ измененияхъ бываетъ ограничено конечными предблами, и если въ тотъ моментъ какъ независимое перемънное х достигло своего предъла, функція получаеть значеніе большее или меньшее прежнихъ своихъ значеній, то это самое большее или самое меньшее ся значение не составляють maximum'a или minimum'a въ выше-опредъленномъ смыслъ, такъ какъ въ разсматриваемомъ случаъ не можетъ быть сравненія этихъ значеній съ непосредственно слёдующими: послёднихъ не существуетъ. Такъ функція  $\sqrt{1-x}$  дъйствительна только для x, не превышающихъ 1; и если измънять x отъ  $-\infty$  до +1, то функція будеть пати уменьшаясь оть  $\infty$  до 0, котораго она достигаеть при x=1; здёсь 0 есть самое меньшее значеніе функціи, но не есть тіпітит въ выше-определенномъ смыслё, ибо при x>1 функція уже становится мнимою, сл. ея значенія не могутъ быть сравниваемы съ предшествующими.

Эти особыя maxima и minima иногда называются абсолютными, въ отличіе отъ наибольшихъ или наименьшихъ значеній функціи по сравненію съ состідними, называемыхъ относительными.

Въ виду сказаннаго, нътъ ничего удивительнаго въ томъ, что одна и таже функція можетъ имъть нъсколько относительныхъ maxima или minima, или въ томъ, что относит. minimum функціи можетъ быть больше ея maximum'a.

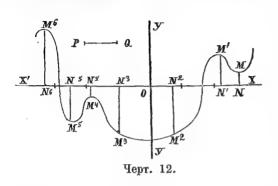
Разрывъ непрерывности. — Нѣкоторыя функціи (не цѣдыя относительно x) могутъ для нѣкоторыхъ значеній перемѣннаго x претерпѣвать разрывъ непрерывности.

Такъ, функція  $\frac{1}{2x-3}$  обращаєтся въ  $\infty$  при  $x=\frac{3}{2}$ ; въ этомъ случать говорятъ, что она непрерывна при всякомъ значеніи x, кромт  $x=\frac{3}{2}$ ; при  $x=\frac{3}{2}$ , обращаясь въ  $\infty$ , функція теряєть свойство непрерывности.

Функція  $\sqrt{x^2-5x+6}$ , которую можно представить въ видѣ  $\sqrt{(x-2)(x-3)}$  также не при всякомъ x непрерывна. Въ самомъ дѣлѣ, теорема о знакѣ квадратнаго тринома показываетъ, что триномъ  $x^2-5x+6$  остается положительнымъ при всякомъ x, не содержащемся между его корнями 2 и 3; но при

2 < x < 3 становится отрицательнымъ, в функція миммою. Слѣд. послѣдняя непрерывна для всякаго x, заключающагося между  $-\infty$  и +2, а также между +3 и  $+\infty$ ; и теряетъ непрерывность при всякомъ x, лежащемъ между 2 и 3.

**594.** Графическое изображеніе измѣненій функціи.—Измѣненія фукціи можно сдѣлать наглядными, слѣдующимъ пріемомъ.



Пусть данная функція будеть f(x); изображая ее буквою y, получимь уравненіе y = f(x). . (1)

Начертивъ двъ перпендикулярныя прямыя, пересъкающіяся въточкъ 0: xx' и yy', и принявъ произвольную прямую PQ за единкцу, будемъ изображать величины независимаго перемъннаго x прямыми, наносимыми на оси xx', вправо отъ точки 0, если x поло-

жительно, и вабью, если x отрицательно. Такъ, если x=+3, то отложивъ вправо отъ 0 три раза линію PQ, получимъ прямую 0N, которая и изобразитъ x=+3. Взявъ x=-1, должны отложить линію PQ разъ влѣво отъ точки 0: прямая  $0N_3$  изобразитъ x=-1. Разстоянія 0N,  $0N_3$ , называется абсииссами.

Для всякаго даннаго x можно вычислеть величину функцій (т. е. y), подставивъ вмъсто x его величину въ ур-ній (1). Пусть напр. при x=+3 получится y=+0.7. Возставивъ въ точкъ N перпендикуляръ къ линій xx'. вверхъ, отложимъ на немъ линію NM, равную 0.7 PQ. Линія NM и изобразитъ на чертежѣ величину данной функцій, соотвѣтствующую величинѣ +3 независимаго перемѣннаго. Подставивъ въ ур. (1) вмѣсто x другое число, напр. -1, получимъ напр. y=-3. Возставивъ въ точкъ  $N_3$  перп. къ линій xx' внизъ, отложимъ на немъ прямую  $N_3M_3=3$ PQ. Линія  $N_3M_3$  изобразитъ величину функцій, соотвѣтствующую значецію -1 перемѣннаго x. Перпендикуляры NM,  $N_3M_3$ , . . откладываемые вверхъ отъ линій xx', если y>0, и внизъ, если y<0, называются opфинатами.

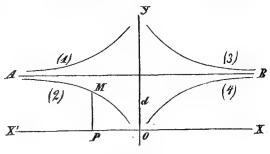
Давъ достаточно большое число различных значеній x-су, вычисливъ по ур-нію (1) соотвътствующія значенія y, наносимъ тѣ и другія указаннымъ образомъ на чертежъ, и соединяемъ всѣ полученныя вершины  $M, M_1, \ldots$  ординатъ кривою. *Пэмпьненія ординать привой и покажуть* — какъ измпъняемся функція при измписніи перемпинаго x. — Кривая эта называется, поэтому, кривою функціи.

Абсциссы и ординаты называются координатами точекъ кривой; прямыя xx' и yy'—осями координать, первая—осью абсциссъ (или иксовъ), вторая—осью ординать (или игрековъ). Точка 0 наз. началомъ координатъ.

Крявая функцій, указывая наглядно измѣненія функцій, имѣетъ еще ту выгоду, что разъ она начерчена, она съ перваго взгляда показываетъ тахіта и тіпіта: въ самомъ дѣлѣ, эти значенія, по самому ихъ опредѣленію, суть пичто иное какъ ординаты самыхъ высшихъ и самыхъ нисшихъ точекъ кривой Такъ, ординаты N<sub>1</sub>M<sub>1</sub>, N<sub>2</sub>M<sub>2</sub>, N<sub>3</sub>M<sub>4</sub>, N<sub>5</sub>M<sub>6</sub> суть шахіша, а NM, N<sub>3</sub>M<sub>5</sub>—шіпіта.

Когда разсматриваемая функція — дробная, то можеть случиться, что при  $x=\pm\infty$  величина ея y стремится къ конечному значенію d. Въ такомъ слу-

чав построеніе кривой покажеть, что по мірів удаленія точки P вліво, т. е. по мірів приближенія x къ —  $\infty$ , ердината MP будеть стремиться къ d, и слід. точка M боліве и боліве будеть приближаться къ прямой AB, параллельной оси x'x и отстоящей оть нея на d; кривая будеть иміть видь (1) или (2),



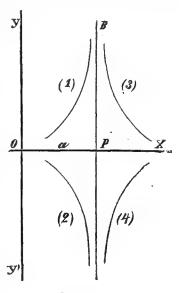
Черт. 13.

смотря потому, будеть-ли функція приближаться въ d уменьшаясь, или же увеличиваясь. Въ такомъ случат говорять, что прямая AB служить ассимптотою прибой; кривая неограниченно приближается въ прямой AB, никогда ея не достигая, ибо ордината (или, что тоже, величина функцій), обращается въ d только при  $x=-\infty$ . — Такъ какъ при  $x=+\infty$  функція получаеть опять величину d, какъ п при  $x=-\infty$ , то получится другая вътвь кривой, (3) или (4), имъющая туже ассимптоту AB. Въ данномъ случат ассимптота параллельна оси x.

Если разсматривая функція есть дробь, то можеть случиться, что знаменатель ея обращается въ ноль при нѣкоторомъ дѣйствительномъ значеніи x, напр.

при x=a. Тогда при x=a-h (гдѣ h какъ угодно мало), т. е. при x стремящемся къ a, но остающемся всегда < a, дробь стремится въ  $+\infty$ , либо къ  $-\infty$ ; иначе говоря, по меръ приближенія абсциссы въ ОР, ордината неограниченно возрастаетъ въ положительномъ, либо въ отрицательномъ направленіи; получается вътвь кривой (1), либо (2). Если затъмъ х сдълается немного больше a, принявъ значение a + h, большее а, функція останется безконечно большою, или того же знака, какъ прежде, или перемънивъ знакъ; но эта величина, сначала безконечно большая, будеть по абсолютной величинъ становиться все меньше и меньше, по итрт того какь x будеть удаляться оть a, и получится вътвь кривой (3) или (4).

. Прямая PB будеть ассимптотою кривой, параллельного оси оу.



Черт. 14.

Переходимъ къ изученію измѣненія нѣкоторыхъ элементарныхъ функцій.

## І. Изследованіе функціи первой степени.

595. ТЕОРЕМА. — Функція первой степени

$$y = ax + b$$

непрерывна на всемъ протяжении дъйствительныхъ значений перемъннато x; при увеличении x она прогрессивно возрастаетъ, когда a>0, и уменьшается, когда a<0.

1. Во-первыхъ, очевидно, что при всякомъ дъйствительномъ и конечномъ x оункція дъйствительна и конечна. Затъмъ, пустъ  $x_0$  будетъ нъкоторое опредъленное значеніе перемъннаго x; соотвътствующее значеніе y пусть будетъ  $y_0$ , такъ-что

$$y_0 = ax_0 + b$$
.

Дадимъ  $x_0$  нъвоторое приращеніе h, и пусть соотвътствующее приращеніе  $y_0$  будеть K; то  $y_0 + K = a(x_0 + h) + b$ ; вычтя изъ новаго состоянія функціи прежнее, найдемъ:

$$K = [a(x_0 + h) + b] - (ax_0 + b) = ah.$$

Такъ какъ  $\alpha$  конечно, то по мъръ приближенія h къ нулю, и произведеніе ah приближается къ нулю; слъд. ah, т. е. приращеніе K функціи м. б. сдълано какъ угодно мало. Это имъетъ мъсто при всякомъ  $x_a$ , слъд. функція непрерывна на всемъ протяженіи дъйствительныхъ значеній x.

2. Возьмемъ рядъ возрастающихъ значеній х:

Если a>0, то умножение на a не измёнить смысла неравенствъ, и получимъ:  $ax'< ax''< ax'''< \cdot \cdot \cdot \cdot$  Придавая по b, также не нарушимъ неравенствъ, слёд.

$$ax'+b < ax''+b < ax'''+b < \cdots$$

Если же a<0, то изъ (1) найдемъ:  $ax'>ax''>x'''\cdot\cdot\cdot$ ; а отсюда  $ax'+b>ax''+b>ax'''+b>\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ 

Итакъ, когда x возрастаетъ, то функція постоянно возрастаетъ при a>0, и постоянно уменьшается при a<0.

Примъръ I. — Функція y=5x-2 при возрастаніи x возрастаетъ; при x безконечномъ она безконечна; когда x, увеличиваясь, проходитъ чрезъ значеніе  $\frac{2}{5}$ , обращающее функцію въ 0, она изъ отрицительной обращается въ положительную:

Примъръ II. Функція y=-2x+1 при возрастаніи x идетъ убывая; когда x безконечно, абсолютная величина ен безконечна; когда x, увеличиваясь проходитъ чрезъ значеніе  $\frac{1}{2}$ , обращающее функцію въ 0, она изъ положительной обращается въ отрицательную:

Примъчаніе. — Такимъ образомъ функція ax + b не имѣетъ относительныхъ maxima и minima, ибо она измѣняется не колеблясь; она имѣетъ абсолютный minimum, равный —  $\infty$ , и абсолютный maximum, равный  $+\infty$ .

**596**. Теорема. Линія, изображающая функцію, связанную ст независимым перемънным уравненіем первой степени, есть прямая.

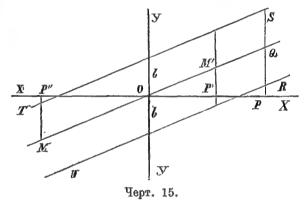
Возьмемъ уравненіе y = ax + b и, положивъ Y = ax, построимъ сперва геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ координаты удовлетворяютъ ур-нію Y = ax. Пусть Q, M', M'' будутъ точки искомаго мѣста; проведя ихъ ординаты QP, M'P', M''P'', соединимъ точки Q, M', M'' съ Q. Такъ какъ координаты искомаго мѣста должны удовлетворять ур-нію Y = ax, то

$$\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OP}}$$
 =  $a$ ,  $\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{OP'}}$  =  $a$ ,  $\frac{\mathrm{-M''P''}}{\mathrm{-OP''}}$  =  $a$ , и т. д., откуда  $\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OP}}$  =  $\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{OP'}}$  =  $\frac{\mathrm{M''P''}}{\mathrm{OP''}}$  =  $\cdots$ 

Изъ этого слёдуеть, что треугольники QOP, M'OP', M"OP",... имёють по равному (прямому) углу, заключенному между пропорціональными сторонами,

сл. подобны. Изъ подобія же ихъ слёдуетъ равенство угловъ QOP, М'OP', М"OP",... доказывающее, что линіи OQ, OM', OM",... совпадаютъ, а слёд. точки Q, М', М",... лежатъ на одной и той же прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Итакъ, геометрическое мъсто уравненія Y = ах есть прямая OQ.

Чтобы отъ ординатъ Y перейти къ ординатамъ у,



соотвътствующимъ тъмъ же значеніямъ x, достаточно къ первымъ прибавить b (въ ту или другую сторону, см. по знаку b): получится прямая ST, либо RU, параллельная первой.

Итакъ, функція ax + b во всякомъ случат представляєть ординаты прямой.

# II. Изследованіе квадратнаго тринома.

## 597. ТЕОРЕМА. Квадратный триноми

$$y = ax^2 + bx + c$$

есть функція непрерывная для всих дийствительных значеній x отг $-\infty$  до  $+\infty$ ; когда a>0, функція эта импет тіпітит, при a<0 она импет тахітит; тахітит и тіпітит выражаются формулою

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}\,,$$

а соотвитствующія значенія x формулою:  $-\frac{b}{2a}$ ; наконець, функція

импьеть равныя величины, когда x получаеть значенія, равноотстоящія отт  $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ , и наобороть.

1. Во-первыхъ, очевидно, что при всякомъ дъйствительномъ и конечномъ значенія x, триномъ дъйствителенъ и конеченъ. Давъ перемънному x значенія  $x_0$  и  $x_0 + h$ , обозначивъ соотвътствующія величины y черезъ  $y_0$  и  $y_0 + K$ , находимъ:

$$K = (y_0 + K) - y_0 = [a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c] - (ax_0^2 + bx_0 + c)$$

$$= ah^2 + (2ax_0 + b)h = h[2ax_0 + b + ah].$$

Множитель въ скобкахъ, будучи цълымъ относительно  $x_0$  и h, конеченъ при всякихъ конечныхъ значеніяхъ  $x_0$  и h, а слъд. произведеніе этого конечнаго количества на h можно сдълать какъ угодно близкимъ къ нулю, приближая къ нулю приращеніе h; иначе говоря, когда h стремится къ 0, то и K стремится къ предълу — нулю, слъд. триномъ есть функція непрерывная.

2. Замётимъ, что квадратъ какого либо выраженія измёняется въ томъ же смысль, какъ и абсолютная величина этого выраженія. Если положительныя числа пдутъ возрастая, то и квадраты ихъ идутъ возрастая. Если отрицательныя числа идутъ возрастая, ихъ квадраты уменьшаются. Помня это, дадимъ триному знакомую уже форму:

Будемъ измѣнять x отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ , замѣтивъ въ числѣ этихъ значеній то, при которомъ  $x+\frac{b}{2a}$  обращается въ нуль, именно  $x=-\frac{b}{2a}$ . Напишемъ рядъ значеній x, возрастающихъ отъ  $-\infty$  до  $-\frac{b}{2a}$ , а потомъ отъ  $-\frac{b}{2a}$  до  $+\infty$ :

$$x \mid -\infty \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot < \cdot \cdot -\frac{b}{2a} \cdot \cdot < \cdot \cdot < \cdot \cdot + \infty$$

Придавая къ каждому, воображаемому въ этомъ ряду количеству по  $\frac{b}{2a}$ , мы не измѣнимъ смысла неравенствъ; слѣд. измѣненія  $x+\frac{b}{2a}$  будутъ идти слѣдующимъ образомъ:

$$x + \frac{b}{2a} \Big| - \underbrace{\cdots < \cdots < \cdots < \cdots }_{+} \underbrace{\cdots < \cdots < \cdots + \infty}_{+}$$

Возвышая значенія  $x+\frac{b}{2a}$ , воображаемыя здёсь, въ квадрать, и замёчая, что квадраты отрицательныхъ значеній пойдуть уменьшаясь, а положительныхъ — увеличиваясь; получимъ слёдующій рядъ измёненій выраженія  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2} \left|+\infty\cdot\cdot\cdot>\cdot\cdot\cdot>\cdot\cdot\cdot+\infty\cdot$$

Замѣтимъ здѣсь, что выраженіе  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$  идетъ уменьшаясь до того мо-

мента, когда x достигаетъ критическаго значенія  $-\frac{b}{2a}$ , а потомъ идетъ, безпредъльно увеличиваясь. Такимъ образомъ, выраженіе  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$  проходитъ черезъ minimum, равный 0, когда x достигаетъ величины  $-\frac{b}{2a}$ .

Придавая къ каждому члену, воображаемому въ послѣднемъ ряду, постоянное количество  $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ , мы не нарушимъ смысла измѣненій, и получимъ нижеслѣдующій рядъ измѣненій выраженія  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ :

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} + \infty \cdots > \cdots > \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \cdots < \cdots < \cdots + \infty$$

Наконецъ, чтобы отъ этого выраженія перейти къ триному, нужно ввести множителя a; но здёсь нужно различать два случая: a>0 и a<0. Въ первомъ случай умноженіе на a не нарушить смысла неравенствъ, во второмъ, умноженіе на a измёнить смыслъ всёхъ перавенствъ. Итакъ окончачельно имѣемъ слёдующую таблицу измёненій тринома:

Отсюда непосредственно видно, что:

1) При a>0 триномъ  $ax^2+bx+c$  идетъ уменьшаясь до того момента когда x достигаетъ величины  $-\frac{b}{2a}$ , а съ этого момента онъ идетъ возрастая неограниченно; след. при a>0 триномъ иметъ minimum, равный

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}$$
,

когда x получаетъ значеніе  $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ .

2) При a<0 триномъ  $ax^2+bx+c$  идетъ возрастая до того момента, когда x достигаетъ величины  $-\frac{b}{2a}$ , затъмъ онъ неограниченно уменьшается; слъд, при a<0 триномъ имъстъ maximum, равный

$$-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

котораго достигаетъ при  $x=-rac{b}{2a}$ .

3. Дадимъ перемънному x два значенія, одинаково по абсолютной величинъ разнящіяся отъ  $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ; эти значенія будутъ вида

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - h$$
 If  $x_2 = -\frac{b}{2a} + h$ .

Подставивъ эти значенія x въ формулу (1), найдемъ, что триномъ въ обоихъ случаяхъ обращается въ  $a\left(h^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ , т. е. получаетъ равныя значенія.

Обратно, пусть триномъ получаетъ равныя величины при двухъ значеніяхъ x' и x'' перемѣннаго x, т. е. пусть

$$ax'^{2} + bx' + c = ax''^{2} + bx'' + c,$$
  
 $a(x'^{2} - x''^{2}) + b(x' - x'') = 0,$ 

откуда

или, разделивъ объ части на a(x'-x''), найдемъ

$$x' + x'' + \frac{b}{a} = 0;$$

пусть x' < x''; мы можемъ предыдущее равенство написать въ вид ${\tt B}$ 

$$x'' - \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{2a} - x',$$

а это означаеть, что избытокь количества x'' надъ  $-\frac{b}{2a}$  равенъ избытку  $-\frac{b}{2a}$  надъ x', или, другими словами, что x' и x'' равно отстоять отъ  $-\frac{b}{2a}$ ; если большее изъ этихъ количествъ равно  $-\frac{b}{2a}+h$ , то меньшее будетъ  $-\frac{b}{2a}-h$ .

**598**. *Примъчаніе I*. — Изъ предыдущей теоремы непосредствено заключаемъ, что:

Когда a>0 триномг два раза проходить черезь ноль, если его тіпітит отрицателень, одинь разь — когда этоть тіпітит =0, и не обращается въ ноль, если тіпітит положителень.

Въ самомъ дълъ, триномъ непрерывенъ и измъняется въ разсматриваемомъ случать отъ  $+\infty$  до minimum'a, а потомъ отъ minimum'a до  $+\infty$ , проходя чрезъ прежнія значенія; слъд. онъ можетъ обратиться въ ноль только тогда, когда его minimum <0, и въ такомъ случать два раза пройдетъ черезъ ноль.

Значенія x, обращающія триномъ въ ноль, дають въ этомъ случат полусумму равную —  $\frac{b}{2a}$ , ибо они равноотстоять отъ этой величины.

Иначе говоря: когда a>0 уравненіе  $ax^2+bx+c=0$  имѣетъ дѣйствительные неравные корни, если  $-\frac{b^2-4ac}{4a}<0$ , или  $b^2-4ac>0$ , а сумма корней равна  $-\frac{b}{a}$ ; но имѣетъ равные корни, если  $-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$ , или  $b^2-4ac=0$ , а общая величина ихъ есть  $-\frac{b}{2a}$ ; наконецъ, корни его мнимы, когда  $-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$ , или  $b^2-4ac<0$ .

Все это — знакомые результаты, найденные здѣсь только инымъ путемъ. Такимъ же образомъ; одного взгляда на таблицу измѣненій тринома достаточно, чтобы убѣдиться, что при a < 0 необходимо, чтобы тахітит былъ положи-

теленъ, для того, чтобы функція прошла черезъ 0, но тогда она и другой разъ пройдеть черезъ ту же величину. Этотъ случай изследуется какъ и предыдущій.

Примочание II. — Когда триномъ не можетъ обратиться въ ноль, всѣ его значенія — того же знака, какъ a; тоже самое имѣетъ мѣсто, когда maximum или minimum равенъ нулю.

Когда триномъ проходитъ два раза черевъ ноль, знакъ его противоположенъ знаку a для всёхъ значеній x, содержащихся между этими двумя частными значеніями x, но знакъ его одинаковъ съ знакомъ a для всёхъ остальныхъ значеній x.

Такимъ образомъ уже знакомые намъ результаты относительно измъненія знака тринома ясно вытекають изъ непрерывности измъненій этой функціи.

Примъчание III. — Относительный тахітит или тіпітит тринома  $ax^2 + bx + c$  есть вмъсть съ тъмъ и абсолютный.

Пусть напр. a > 0; таблица измёненій показываеть, что

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

дъйствительно меньше всъхъ другихъ значеній функців; слёд. это — тіпітит абсолютный.

Это же непосредственно следуеть изъ формулы

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Въ самомъ дълъ, перемънное количество  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ , будучи квадратомъ, имъетъ наименьшую величину ноль, при  $x=-\frac{b}{2a}$ .

Сябд. паименьшая величина скобокъ есть  $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ; умножая на положительное a, найдемъ и для y наименьшую величину, которая слъд. =

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

## 599. Графическое представленіе хода изитненій ивадратнаго тринома.

Укажемъ планъ построенія кривыхъ, изображающихъ измѣненія тринома, различая два главныхъ случая: a>0 и a<0, и въ каждомъ изъ нихъ 3 подраздѣленія:  $b^2-4ac>0$ ,  $b^2-4ac=0$ ,  $b^2-4ac<0$ .

Пусть a>0 и  $b^2-4ac>0$ ; въ этомъ случав таблица измененій тринома (§ 598) показываетъ, что при  $x=-\frac{b}{2a}$  онъ имеетъ отрицательный mini-

 $\operatorname{mum} = - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ ; затъмъ при x, равныхъ корнямъ  $(x_1 \ \text{n} \ x_2)$  обращается въ ноль; наконецъ, по мъръ: уменьшенія перемъннаго x отъ x, до —  $\infty$  и увеличенія оть  $x_2$  до  $+\infty$ , триномъ возрастаєть оть 0 до  $+\infty$ . При каждыхъ двухъ значеніяхъ x, равноотстоящихъ отъ  $-\frac{b}{2a}$ , значенія тринома одинаковы по величинъ и по знаку. Отсюда такое построеніе. Откладываемъ (черт. 16) на оси абсциссъ, вправо или влъво, смотря по знаку, отръзовъ  $0 A = -\frac{b}{2a}$ . Въ точкъ А проводимъ нарадиель ВС къ оси уу и откладываемъ на ней отръзокъ  ${
m AB}=-rac{b^2-4ac}{4a}$  внизъ отъ точки  ${
m A}$  (т. к. minimum этотъ <0); такимъ образомъ получаемъ наименьшую ординату, и точка В есть нисшая точка крявой. Вправо и вибво отъ точки А откладываемъ линіи $AH = AH' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ : получаемъ точки Н и Н', которыми опредъляются кории ОН и ОН' тринома; цля этихъ значеній x ординаты = 0, сдёд, въ точкахъ H и H' кривая пересёкаеть ось x-въ. Соединивъ точку В съ точками Н и Н' кривою, продолжаемъ части ВН и ВН' этой вривой вверхъ, располагая объ вътви симметрично относительно прямой ВС. Въ самомъ дълъ, мы внаемъ (§ 597, 3), что для всякихъ двухъ значеній x, равноотстоящихъ отъ 0A, значенія y равны, т. е. что если взять AP = AP', то перпендикуляры РМ и Р'М' къ оси хх' въ точкахъ Р и Р', представляющія ординаты кривой, равны; слъд. хорда ММ' будеть нарадлельна оси x—въ и раздълится прямою АС пополамъ. След. линія АС делить пополамъ все хорды кривой, ей перпендикудярныя, т. с. дёлить кривую на двё симметричныя части. Поэтому АС наз. осью кривой, точка В вершиною кривой. Самая кривая есть парабола.

Для болѣе точнаго построенія кривой нужно дать x-су большее число значеній и вычислить соотвѣтствующія значенія тринома, нанося ихъ на ординатахъ: такимъ образомъ получится большее число точекъ кривой и фигура ен опредѣлится точнѣе. Такимъ образомъ ходъ измѣненій тринома изображается наглядно и выясняются всѣ частности. Напр., видно, что кривая можетъ пересѣкать ось x-овъ только тогда, когда minimum отрицателенъ, и т. п.

Разъ вривая построена тщательно, т. е. при помощи достаточнаго числа точекь, она можеть служить для болье быстраго опредвленія величинь функцій (y), соотвътствующихь данной величинь перемьннаго x, и обратно, для опредвленія значеній x, соотвътствующихь данному y. Вь первомь случав достаточно нанести данной x по оси x'x оть точки 0, вправо или вльво, см. по знаку; пусть P будеть найденная точка; затьмь взять точку M кривой, въ которой перпендикулярь къ оси x'x, возставленный въ точкь P, пересъкаеть кривую. Длина MP и представить абсолютную величину тринома, о знакь же судимь по положенію точки M относительно оси x-овъ.

Для опредёленія значеній x-са, при которых трином принимаєть данную величину k, наносим на ось y-въ, начиная отъ точки 0, въ направленіи, опредёляемом знаком k, длину 0K = k; черезъ точку K проводим параллель оси x-въ: пусть она встрёчаетъ кривую въ точках M и M': абсциссы 0P и 0P' этих точек и будутъ искомыя значенія x.

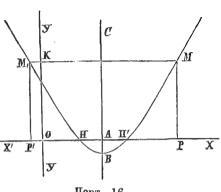
Сказаннаго достаточно для построенія кривыхъ во всёхъ случаяхъ; разъясненія принции. Поэтому мы прямо прилагаемь таблички измёненій тринома для каждаго случая, а противъ нихъ кривыя, выражающія эти измёненія.

Значеніе линій указано всябдь за каждымь чертежемь.

I случай: a > 0.

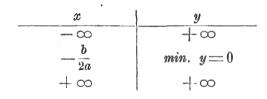
1. 
$$b^2 - 4ac > 0$$
;  $x_1 < x_2$ .

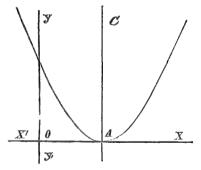
$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \cdot$$



$$0A = -\frac{b}{2a}; AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; 0H = x_1; 0H' = x_2.$$

2. 
$$b^2 - 4ac = 0$$
;  $x_1 = x_2$ .  
 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ .



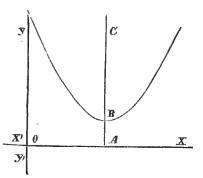


$$0A = -\frac{b}{2a}$$

3. 
$$b^2 - 4ac < 0$$
;  $x_1 + x_2 = 0$ 

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

$$\begin{array}{c|c}
x & y \\
-\infty & +\infty \\
-\frac{b}{2a} & min. \ y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0 \\
+\infty & +\infty
\end{array}$$



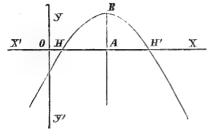
Черт. 18.

$$0A = -\frac{b}{2a}$$
;  $AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

II случай: a < 0.

1.  $b^2 - 4ac > 0$ ;  $x_1 < x_2$ .

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$



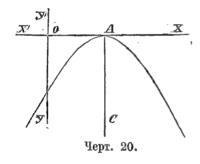
$$\begin{array}{c|c}
x & y \\
-\infty & -\infty \\
x_1 & 0 \\
-\frac{b}{2a} & max. \ y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0 \\
x_2 & 0 \\
+\infty & -\infty
\end{array}$$

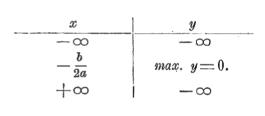
Черт. 19.

$$0 \mathbf{A} = -\frac{b}{2a}; \quad \mathbf{A} \mathbf{B} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad 0 \mathbf{H} = x_1; \quad 0 \mathbf{H}' = x_2.$$

2.  $b^2 - 4ac = 0$ ;  $x_1 = x_2$ .

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

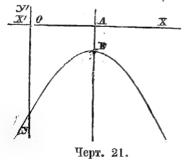




$$0A - \frac{b}{2a}$$
.

3.  $b^2 - 4ac < 0$ ;  $x_1 + x_2 = 0$ 

$$y = \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$



$$\begin{array}{c|c}
x & y \\
-\infty & -\infty \\
-\frac{b}{2a} & max. \ y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0 \\
+\infty & -\infty
\end{array}$$

$$0A = -\frac{b}{2a}$$
;  $AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

600. Примъръ 1. Изсладовать изманенія тринома у $=\frac{3}{2}x^2+12x+18$  при изманеніи x отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . Представинь триномъ въ видъ  $y=\frac{3}{2}[(x+4)^2-4]$ .

Отсюда, по предыдущему, прямо сайдуеть таблица изминеній:

т. е. данный триномъ уменьшается отъ  $+\infty$  до -6, когда x возрастаетъ отъ  $-\infty$  до -4; потомъ онъ увеличивается отъ -6 до  $+\infty$ , когда x возрастаетъ отъ -4 до  $+\infty$ . Саъд. триномъ имъетъ minimum =-6 при

x=-4; проходить дважды чрезъ каждую величину, большую — 6, и никогда не дълается меньше

Графически измѣненія функціи изобразятся измѣненіемъ ординаты параболы, которой ось параляельна оси y, причемъ координаты нисшей точки (вершины) суть: x=-4, y=-6; кривая два раза пересѣкаетъ ось x, въ точкахъ, конхъ абсциссы суть: -2 п -6.

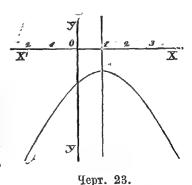
Примъръ II. — Изслюдовать измъненія тринома  $y = -x^2 + 2x - 3$  при измъненіи x от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Представимъ триномъ въ видъ:

$$y = -[(x-1)^2 + 2].$$

Имъемъ таблицу измъненій

Заключаемъ, что триномъ увеличивается отъ  $-\infty$  до -2, когда x возрастаетъ отъ  $-\infty$  до +1; затъмъ онъ уменьшается отъ -2 до  $-\infty$ , когда x возрастаетъ отъ +1 до  $+\infty$ . Слъдоват. Функція имъетъ тахітит (-2), соотвътствующій x=+1; слъд. она не проходитъ черезъ 0, но проходитъ дважды чрезъ всякое значеніе, меньшее -2. Парабола, представляющая ходъ измъненій тринома, вся лежитъ въ области отрицательныхъ пгрековъ.



Черт. 22.

# III. Изследованіе биквадратнаго тринома.

601. ТЕОРЕМА. — Биквадратный триномъ.

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

есть функція непрерывная для всьхг дойствительных значеній х отъ

 $-\infty$  до  $+\infty$ . Функція эта необходимо импетт тахітит, либо тіпітит, равный с; кромпь того, когда a и b импьютт противоположные знаки, она еще импетт либо два тахітит'а, либо два тіпітит'а; если же a и b импьютт знаки одинаковые, то никакого тах., или тіпіт., кромп c, триномт не импетт.

1. Очевидно, что при всякомъ дъйствительномъ и конечномъ значеніи x триномъ дъйствителень и конеченъ. Давъ перемънному x нъкоторое приращеніе h и вычтя изъ новаго состоянія функціи прежнее, найдемъ соотвътствующее приращеніе y (k):

$$k = a(x+h)^4 + b(x+h)^2 + c - ax^4 - bx^2 - c = h[4ax^3 + 2bx + h(6ax^2 + 4axh + ah^2 + b)].$$

Множитель въ квадратныхъ скобкахъ конеченъ при всякихъ конечныхъ x и h; и слъд. при безконечно маломъ h, вторая часть м. б. сдълана какъ угодно мала; слъд. триномъ непрерывенъ.

2. Подставимъ триномъ въ видъ

$$y = a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Первый случай: a > 0, b < 0.

Какъ и для квадратнаго тринома, составляемъ таблицу:

Сябд.  $\left(x^3+\frac{b}{2a}\right)^2$  проходить черезъ minimum 0, когда x проходить чрезъ величину —  $\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ ; затёмъ тотъ же квадрать проходить чрезъ maximum  $\frac{b^3}{4a^2}$ , когда x обращается въ 0; уменьшается до minimum'a равнаго нулю, когда x увеличивается до  $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ , а потомъ увеличивается до безконечности.

Прибавляя постоянное количество  $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ , и умножая на положительное количество a, мы не измѣнимъ смысла неравенствъ, и найдемъ:

$$x \mid -\infty \cdot \cdot < \cdot \cdot -\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdot \cdot < \cdot \cdot 0 \cdot < \cdot \cdot +\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdot \cdot < \cdot \cdot +\infty$$

$$y \mid +\infty \cdot \cdot > \cdot \cdot -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdot \cdot < \cdot c \cdot > \cdot \cdot -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdot \cdot < \cdot \cdot +\infty$$

Итакъ, въ случає: a>0, b<0, биквадратный триномъ имѣетъ два minimum'a, равные  $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ , и одинъ maximum, равный c. Міпіта триномъ имѣетъ при  $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ , maximum при x=0.

Для следующихъ случаевъ мы прямо даемъ результаты, которые получаются темъ же прісмомъ.

Второй случай: a > 0,  $b \ge 0$ .

триномъ имъетъ minimum =c, при x=0.

Третій случай: a < 0, b < 0.

триномъ имъетъ maximum =c, при x=0.

Четвертый случай: a < 0, b > 0.

$$\begin{vmatrix} x & -\infty & \cdot & < \cdot & < -\sqrt{-\frac{b}{2a}} < \cdot & 0 & \cdot & < \cdot & +\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdot & \cdot & < +\infty \\ y & -\infty & \cdot & < \cdot & < -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > \cdot & c \cdot & < \cdot & < -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > \cdot & < -\infty \end{vmatrix}$$

Въ этомъ случат триномъ имъетъ два maximum'a, равные  $-\frac{b^3-4ac}{4a}$ , которыхъ онъ достигаетъ при  $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ , и одинъ minimum =c, при x=0.

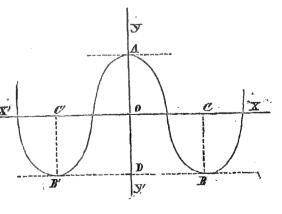
### 602. Графичесное представленіе. 1. Пусть напр.

$$a > 0$$
,  $b < 0$ ,  $b^2 - 4ac > 0$ ,  $c > 0$ .

При этихъ условіяхъ триномъ имѣетъ положительный тахітит c и два отрицат. Минимальныя значенія, равныя  $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ; тах. c триномъ имѣетъ при x=0, тіпіта при  $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ . Отсюда построеніє: беремъ 0A=c;  $0C=0C'=\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ ;  $0D=\frac{b^2-4ac}{4a}$ . Махітит соотвѣтствуєтъ точкѣ A кривой,

точкамъ В и В'. Ось xx' пересъкаетъ кривую въ четырехъ дъйствительныхъ точкахъ, слъд. триномъ 4 раза обращается въ ноль, при x попарно равныхъ, но противоноложныхъ по знаку. Это совершенно сообразно съ тъмъ результатомъ, что при данныхъ условіяхъ биквадратное ур.  $ax^4 + bx^3 + c = 0$  митетъ 4 различныхъ дъйствительныхъ кория.

Возьмемъ численный примъръ для разсматриваемаго случая.



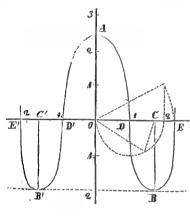
Черт. 24.

Въ числъ критическихъ значеній x опредъливъ и корни тринома  $x^4-6x^2+5$ , которые равные  $\pm \sqrt{5}$  и  $\pm 1$ , даемъ y форму:

$$y = \frac{1}{2}[(x^2 - 3)^3 - 4],$$

и находимъ следующую таблицу измененій у:

Отсюда заключаемъ, что функція уменьшается отъ  $+\infty$  до -2, когда x

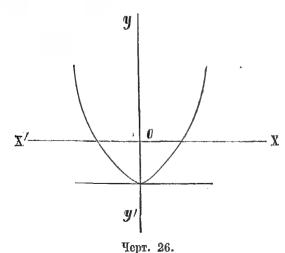


Черт. 25.

увеличивается отъ —  $\infty$  до —  $\sqrt{3}$ , проходя чрезъ 0 при  $x=-\sqrt{5}$ ; затъмъ она увеличивается до  $\frac{5}{2}$  при возрастанія x до 0, проходя чрезъ нумевое значеніе при x=-1. Съ этого момента функція проходить прежнія значенія, въ обратномъ порядкъ. На чертежъ:

$$0C' = 0C = \sqrt{3};$$
  
 $C'B' = CB = 2;$   
 $0A = \frac{5}{2};$   
 $0E' = 0E = \sqrt{5};$   $0D' = 0D = 1.$ 

2. Пусть будеть: a > 0, b > 0.



При этихъ условіяхъ триномъ  $ax^4+bx^2+c$  уменьшается отъ  $+\infty$  до c, а потомъ возрастаетъ отъ c до  $+\infty$ , проходя черезъ тіпітит c при x=0. Въ ноль она можетъ обратиться только два раза, при двухъ равныхъ и противоположныхъ значеніяхъ x, и то лишь въ томъ случать, когда c<0.

Эти измёненія представлены на чертежё, причемъ предполагается с < 0.

IV. Изследование дроби: 
$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$
.

**603.** Даемъ перемѣнному x нѣкоторое приращеніе h; для соотвѣтствующаго приращенія k дроби находимъ:

$$k = \frac{a(x+h)+b}{a'(x+h)+b'} - \frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{h(ab'-a'b)}{(a'x+b')(a'x+b'+a'h)}.$$

Отсюда заключаемъ: 1) когда x приближается къ  $-\frac{b'}{a'}$ , знаменатель выраженія k приближается къ 0, а слъд. коэффиціентъ при h, т. е. дробь ab'-ba' приближается къ  $\infty$ , поэтому и приращеніе k функціи приближается къ  $\infty$ , т. е. функція претерпъваетъ разрывъ непрерывности. При всъхъ другихъ значеніяхъ x, по мъръ приближенія h къ 0, и k стремится къ 0, т. е. функція непрерывна. Итакъ, дробь y непрерывна къ каждомъ изъ интервалловъ:

ote 
$$-\infty$$
 go  $-\frac{b'}{a'}$  in ote  $-\frac{b'}{a'}$  go  $+\infty$ ,

претеривная разрывъ непрерывности только при  $x = -\frac{b'}{a'}$ , общему предвлу этихъ интервалловъ.

2) Знакъ выраженія k зависить только отъ числителя; въ самомъ дѣлѣ, знаменатель можно представить въ видѣ  $(\alpha'x+b')^2+h\cdot\alpha'(\alpha'x+b')$ , а это выраженіе, при достаточно маломъ h, существенно—положительно, ибо знакъ его будетъ зависить только отъ перваго члена  $(\alpha'x+b')^2$ , который (какъ квадратъ) положителенъ при всякомъ дѣйствительномъ x. Но числитель  $ab'-\alpha'b$ , какъ количество постоянное, всегда имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ, сл. функція всегда идетъ: или возрастая, или уменьшаясь; т. е. въ каждомъ изъ интервалловъ непрерывности дробь

идетъ постоянно увеличиваясь, если ab'-a'b>0; идетъ постоянно уменьшаясь, если ab'-a'b<0; имъетъ постоянную величину, если ab'-a'b=0.

ибо въ последнемъ случат всегда k=0; т. е. дробь не получаетъ приращеній при измёненіяхъ x, сохраняя одну и туже величину.

Итакъ, при изслъдованіи измѣненій функціи, должны различать три указанные случая; при этомъ, раздѣливъ числ. на знаменателя дроби, получаемъ

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'^2x + a'b'} = \frac{a}{a'} + \frac{\frac{a'b - ab'}{a'^2}}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

Положивъ, для краткости,  $\frac{a'b-ab'}{a'^2}=\lambda$ , замъчаемъ, что знавъ  $\lambda$  зависитъ только отъ числителя, именно: при ab'-a'b>0 будетъ  $\lambda<0$ , а при ab'-a'b<0 будетъ  $\lambda>0$ ; дробь можно представить въ видъ

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\lambda}{x + \frac{b'}{a'}}$$

Соображая все сказанное, прямо находимъ слъдующіе выводы относительно измъненій дроби при измъненіи x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$ .

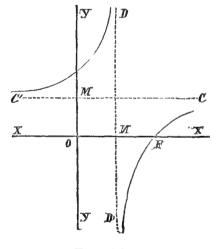
I. ab'-ba'>0.

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\lambda}{x + \frac{b'}{a'}}, \text{ for } \lambda < 0.$$

$$x \left| -\infty < \cdot \cdot \cdot < -\frac{b'}{a'} - \varepsilon \right| - \frac{b'}{a'} + \varepsilon < \cdot \cdot \cdot < +\infty$$

$$y \left| \frac{a}{a'} < \cdot \cdot \cdot < +\infty \right| - \infty < \cdot \cdot \cdot \cdot < \frac{a}{a'}.$$

Т. е. при возрастаніи x отъ  $-\infty$  до  $-\frac{b'}{a'}$ , функція идетъ постоянно увеличиваясь отъ  $\frac{a}{a'}$  до  $+\infty$ ; при  $x=-\frac{b'}{a'}$  имѣетъ мѣсто разрывъ непрерывности: функція изъ  $+\infty$  внезапно обращается въ  $-\infty$ ; затѣмъ при возрастаніи x отъ  $-\frac{b'}{a'}$  до  $+\infty$ , идетъ постоянно увеличиваясь отъ  $-\infty$  до  $\frac{a}{a'}$ . Въ одномъ изъ интервалловъ она проходитъ чрезъ 0, при  $x=-\frac{b}{a}$ .



Черт. 27.

Измѣненія функців изобразятся, такимъ образомъ, измѣненіями ординатъ слѣдующей крявой (гипербола).

На чертежъ (27);

$$0M = \frac{a}{a'} \cdot$$

$$0N = -\frac{b'}{a'} \cdot$$

$$0F = -\frac{b}{a} \cdot$$

СС' и DD'-двѣ ассимитоты кривой.

II. ab' - ba' < 0.

$$y=rac{a}{a'}+rac{\lambda}{x+rac{b'}{a'}}, ext{ figh } \lambda>0.$$
  $x$   $-\infty\cdot\cdot<\cdot\cdot\cdot<rac{b'}{a'}-arepsilon\left|-rac{b'}{a'}+arepsilon<\cdot\cdot<+\infty
ight.$   $y$   $\left|rac{a}{a'}\cdot\cdot>\cdot\cdot\cdot>-\infty$   $\left|+\infty>\cdot\cdot\cdot\cdot>rac{a}{a'}\cdot$ 

Т. е. при возрастаніи x отъ  $-\infty$  до  $-\frac{b'}{a'}$ , функція идеть уменьшаясь непрерывно отъ  $\frac{a}{a'}$  до  $-\infty$ ; при  $x=-\frac{b'}{a'}$  происходить разрывъ непрерывности: изъ  $-\infty$  въ  $+\infty$ ; затёмъ, при увеличеніи x отъ  $-\frac{b'}{a'}$  до  $+\infty$ , функція идетъ постоянно уменьшаясь отъ  $+\infty$  до  $\frac{a}{a'}$ . Въ одномъ изъ интервалловъ непрерывности она проходить чрезъ

 $0, \text{ при } x = -\frac{b}{a}.$ 

Кривая измѣненій (гипербола) такова:

$$0M = \frac{a}{a'}$$

$$0N = -\frac{b'}{a'}$$

$$0F = -\frac{b}{a}$$

Черт. 28.

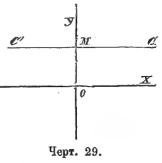
СС' и DD'-цвъ ассимитоты кривой.

III. ab'-ba'=0.

При этомъ и  $\lambda = 0$ , а потому при всякомъ x имѣемъ  $y = \frac{a}{a'}$  — величинѣ постоянной. Слъд. при измѣненіи x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$ , дробь не измѣняєть своей величины;

ея кривая будеть прямая СС', которой ординаты равны  $0 \text{M} = \frac{a}{c'}$ .

3 А Д А Ч А. — Найти прямо условіє необходімоє и достаточноє для того, чтобы дробь  $\frac{ax+b}{a'x+b'}$  импла постоянную величину при всякомь x.



1-й способъ. — Такъ какъ дробь должна имѣть одну и туже величину при всякомъ x, то, между прочимъ, она должна имѣть постоянную величину, напр. при x=0 и при x=1. Но при x=0,  $y=\frac{b}{b'}$ ; при x=1,  $y=\frac{a+b}{a'+b'}$ ; слѣд. должно быть:  $\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{b}{b'}$ , откуда по свойству пропорціи, имѣемъ:  $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ .

Это условіе, будучи необходимымъ, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно; ибо изъ него:  $b' = \frac{a'b}{a}$ , и слѣд. дробь обращается въ

$$\frac{ax+b}{a'\left(x+\frac{b}{a}\right)}$$
, where  $\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{a'\left(x+\frac{b}{a}\right)}$ , a sto  $=\frac{a}{a'}$ .

Итакъ, условіе необходимое и достаточное для того, чтобы наша дробь имѣла постоянную величину, есть  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ , или ab' - a'b = 0, что и было найдено при изслѣдованіи.

2-й способъ. — Пусть k будеть эта постоянная, пока неизвёстная, величина. Нахожденіе условія, необх. и дост. для того, чтобы  $\frac{ax+b}{a'x+b'}=k$ , сводится къ нахожденію условія, при которомъ было бы ax+b=k(a'x+b'), или (a-a'k)x+(b-b'k)=0 при всякомъ x; а для этого необходимо и достаточно (§ 72), чтобы было: a-a'k=0 и b-b'k=0, или  $k=\frac{a}{a'}$  и  $k=\frac{b}{b'}$ , откуда  $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ , или ab'-a'b=0.

**604.** Приложенія. І.—Изсладовать изманенія х задачи § 388, полагая, что шарикъ, помащенный внъ билліарда, можеть свободно проникать внутрь круга и свободно возвращаться въ исходную точку?

Для х мы имвемь формулу

$$x = \frac{R(R-a)}{2a}$$
.

R—величина постоянная, слёд. x измёняется въ томъ же смыслё какъ дробь  $\frac{R-a}{2a}$ . Эта дробь даетъ: ab'-ba'=-2R, а потому заключаемъ, что увеличенію a соотвётствуетъ уменьшеніе x-са. Формула даетъ: если x=R, то  $a=\frac{R}{3}$ ; если же  $a=\infty$ ,  $x=-\frac{R}{2}$ . Отсюда заключаемъ, что когда a возрастаетъ отъ своего minimum'a до  $+\infty$ , x уменьшается отъ своего maximum'a R до minimum'a  $=-\frac{R}{2}$ ; такимъ образомъ сразу находимъ таблицу критическихъ величинъ x:

II. Пересъчь данный шарт плоскостью такт, чтобы объемь одного изъ сегментовъ составляль данную дробь K объема цилиндра одной высоты и одного основанія съ сегментомъ. Между какими предълами можно задавать число K?

Обозначивъ высоту сегмента буквою x, найдемъ:

$$x=3R \cdot \frac{2K-1}{3K-1}$$

3R — постоянно, сл. x измъняется въ томъ же смыслѣ какъ дробь  $\frac{2K-1}{3K-1}$ ; дробь эта даетъ: ab'-ba'=-1; заключаемъ, что x и K измѣняются въ одномъ смыслѣ. Но предѣльныя значенія x суть 0 и 2R; подставляя въ формулу вм. x сперва 0, потомъ  $2R_1$  находимъ:

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & \cdot & \cdot & 2R \\ K & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \infty \end{array}$$

Слъц. для K можно брать всъ числа отъ  $\frac{1}{2}$  до  $+\infty$  .

Примпианіе. — Изъ числа дробныхъ функцій элементарному изслѣдованію подлежить еще квадратная дробь  $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ ; но изученіе ея раціональнѣе отнести къ спеціальной статьѣ о maxima и minima.

# V. Примъры изследованія ирраціональных функцій.

**605**. ПРИМЪРЪ I. — Изслюдовать функцію  $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$  при изминеніи x от  $x = -\infty$  по  $x = +\infty$  по  $x = -\infty$  по x =

Триномъ  $x^2+2x-3$  имъетъ дъйствительные корни: -3 и +1; слъд. онъ положителенъ при всъхъ x, меньшихъ -3, а также большихъ +1, и отрицателенъ при всъхъ значеніяхъ x, заключающихся между -3 и +1. Итакъ функція y дъйствительна при всъхъ значеніяхъ x, лежащихъ внъ корней тринома, и мнима для всякаго x, заключающагося между корнями.

Докажемъ, что она непрерывна для всёхъ x, заключающихся между —  $\infty$  и — 3, и между — 1 и —  $\infty$ . Пусть x' и x' — h будутъ два значенія x, лежащихъ внё интервалла отъ — 3 до — 1. Имѣемъ:

$$\begin{split} y' &= \sqrt{x'^2 + 2x' - 3} \quad \text{if} \quad y' + \text{K} = \sqrt{(x' + h)^2 + 2(x' + h) - 3} \; ; \\ \text{K} &= \sqrt{(x' + h)^2 + 2(x' + h) - 3} - \sqrt{x'^2 + 2x' - 3} \; ; \end{split}$$

или, множа и дъля вторую часть на сумму радикаловъ:

отсюпа

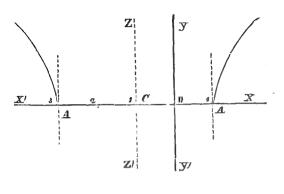
$$K = \frac{h^2 + 2h(x'+1)}{\sqrt{(x'+h)^2 + 2(x'+h) - 3} + \sqrt{x'^2 + 2x' - 3}};$$

по мёрё приближенія h къ нулю, числитель стремится къ нулю; знаменатель же, будучи дёйствительнымъ при x' и x'+h, отличень отъ нуля, ибо эти значенія x отличны отъ — 3 и +1. Слёд, частное K стремится къ нулю вмёстё съ h, а сл. функція y непрерывна въ указанныхъ интерваллахъ ея дёйствительности.

Сперва изследуемъ измененія подрадикальнаго тринома, а отсюда и самой оункціи; получаемъ таблицу:

$$\begin{vmatrix} x \\ x^2 + 2x - 3 \\ + \infty \dots > \dots & 0 \dots > \dots - 4 \dots < \dots + 1 \dots < \dots + \infty \\ \sqrt{x^2 + 2x - 3} & + \infty \dots > \dots & 0 \dots > \dots - 4 \dots < \dots & 0 \dots < \dots + \infty \\ \hline y - \text{ mhonsil}.$$

Не трудио изобразить измѣненія функціи графически. Для этого замѣтимѣ, что триномъ имѣетъ равныя значенія, когда x получаетъ величины, равноотсто-



Черт. 30.

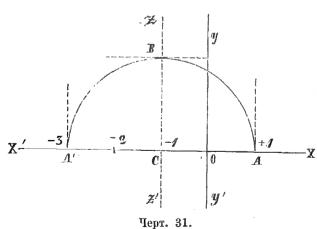
ящія отъ — 1; сл, и y имѣетъ это свойство, и потому кривая имѣетъ осью симметріи прямую ZZ', параллельную оси y и отстоящую отъ этой оси на 0C = 1.

Затёмъ, кривая не имъетъ точекъ между парадлелями къ оси yy', находящимися отъ этой оси въ разстояніяхъ: 0A = +1, 0A' = -3, ибо въ этихъ предъдахъ y имъетъ мнимыя

значенія; наконецъ, кривая не имѣетъ точекъ, лежащихъ внизу отъ оси x, ибо y есть положительная величина  $\sqrt{x^2+2x-3}$ , по заданію.

Примъръ II. — Изслъдовать функцію  $y = \sqrt{-x^4 - 2x + 3}$ , когда x измъняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Корни тринома —  $x^2$  — 2x — 3 суть — 3 и — 1; изъ закона измѣненій тринома заключаемъ, что онъ имѣетъ положительным величины только при x, содержащихся между — 3 и — 1; для всѣхъ значеній x, лежащихъ внѣ этихъ предѣловъ, триномъ отрицателенъ; слѣд. Функція y дѣйствительна, когда x измѣняется внутри корней, и мнима при всѣхъ x, лежащихъ внѣ корней. Какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ докажемъ, что она непрерывна для интервалла отъ — 3 до — 1. Отсюда такая таблица измѣненій:



Итакъ, функція возрастаєть отъ 0 (при x=-3) до +2 (при x=-1), затёмъ уменьшаєтся до 0 (при x=+1). Слёд. она имѣетъ maximum =+2 при x=-1.

Кривая имъетъ ось симметріи, параллельную уу и проходящую черезъ точку С, причемъ ОС—1; на этой оси помъщается тахітит — + 2. Кривая не имъетъ точекъ внъ па-

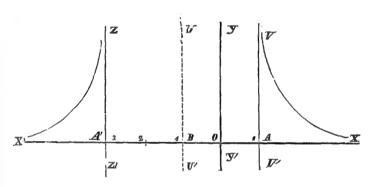
ралмелей оси yy', проведенныхъ черезъ точки A и A', такія, что 0A=1 и

0A'=3; она не имветъ точекъ внизу отъ оси xx'. Кривая эта — полуокружность центра С.

 $\Pi$  Р и м в Р в  $\Pi I.$  — Изсладовать функцію  $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$  при изманеніи x от  $x = \infty$  до  $x = \infty$ .

Функція непрерывна въ интерваллахъ: отъ —  $\infty$  до — 3 и отъ +1 до  $+\infty$ ; и претерпѣваетъ разрывъ непрерывности отъ — 3 до +1. Измѣненія ея обратны измѣненіямъ тринома  $\sqrt{x^2+2x-3}$ ; отєюда таблица:

Кривая функціи имѣетъ ось симметріи ии', параллельную оси уу' и опредѣляемую линіей ОВ——1. Затѣмъ она не имѣетъ точекъ между vv' и zz', параллельными оси уу' и отстоящими отъ этой оси на ОА — 1 и ОА' — 3.



Черт. 32.

Вмёстё съ этимъ, тё же прямыя и ось xx' суть три ассимптоты кривой, которая, къ тому же, не имёсть точекъ внизу оть оси x—овъ.

#### 606. Задачи.

1. Изследовать функціи:

$$y = 3x + 4$$
;  $y = -2x + 7$ ;  $2x - 5y + 3 = 0$ ;  $3x + 4y - 1 = 0$ ;  $7x - 8y = 0$ ;  $5x + 5y = 0$ 

и построить соотвътствующія прямыя.

2. Построивъ прямую: 5x - 3y + 4 = 0, опредълить, въ какой части плоскости находятся точки, которыхъ координаты удовлетворяютъ тому или другому изъ неравенствъ.

$$5x - 3y + 4 > 0$$
,  $5x - 3y + 4 < 0$ .

3. Изследовать изменение триномовы:

$$3x^2 - x - 2$$
;  $14x^2 - x - 3$ ;  $-2x^2 + x + 3$ ;  $2x^2 - 4x + 7$ ;  $5x^2 + 6x - 3$ ;  $4x^2 - 20x + 25$ ;  $2 + 8x - 3x^2$ 

и начертить кривыя, изображающія эти изивненія.

4. Изследовать измененія триномовь:

$$x^{4} - 25x^{2} + 144; \ x^{4} - 8x^{2} - 9; \ 3x^{4} + 8x^{2}; \ 2x^{4} + 5x^{2} + 8; \ x^{4} - 6x^{2} + 9;$$
  
 $x^{4} - 16; \ \frac{5}{81} \ x^{4} - \frac{10}{9} \ x^{2} + 2;$ 

и построить кривыя измененій.

5. Изсяфдовать измененія функцій:

$$\frac{1}{2x-5}$$
;  $\frac{1}{2x-1}$ ;  $\frac{x+1}{2x-3}$ ;  $\frac{3-x}{4x+1}$ ;  $\frac{2x-3}{3x-5}$ ;  $\frac{1+3x}{1+2x}$ 

и построить кривыя измѣненій.

6. Изследовать изменение функцій

$$\pm\sqrt{3x^2-4}$$
;  $\pm\sqrt{x^2-7x+12}$ ;  $\pm\sqrt{-x^2+7x-12}$ ;  $\pm\frac{1}{\sqrt{-x^2+7x-12}}$ .

7. Изследовать формулу вогнутых в зеркаль

$$p' = \frac{fp}{p-f}$$
.

8. Между какими предблами можеть изменяться количество т въ формуле

$$x = \frac{m+10}{2m+1}$$
,

если x можетъ измъняться между 0 и +1.

### ГЛАВА ХІ.

# Образцы изследованія вопросовъ второй степени.

### Задача І.

**607.** Раздълить данную прямую AB въ крайнемъ и среднемъ отношении, т. е. найти на ней такую точку С, чтобы больший отръзокъ AC былъ среднимъ пропорціональнымъ между всею линіею AB и меньшимъ ея отръзкомъ BC.

По условію задачи должно быть:  $\overline{AC}^2 = AB \times CB$ , или, назвавъ данную прямую AB буквою a, разстояніе AC буквою x, и слъд. обозначивъ BC разностью a = x, получимъ уравненіе

$$x^2 = a(a-x) \dots (1)$$
 has  $x^2 + ax - a^2 = 0 \dots (2)$ .

Изследованте. Чтобы корень ур-нія (2) представляль решеніе задачи въ прямомъ смысле, необходимо, чтобы онъ быль действителень, положителень и быль < a.

Ур-ніе (2) нижеть всегда корни действительные, потому что последній члент  $(-a^2)$  отрицателень; дале, корни имеють противоположные знаки, такъ какъ произведеніе ихъ отрицательно  $(=-a^2)$ ; притомь, меньшій по абсолютной величине корень положителень, ибо сумма корней отрицательна (=-a). Остается убедиться, будеть-ли положительный корень меньшіе a; для этого подставляемь въ триномь, образующій первую часть ур-нія (2), вместо x сперва 0, потомь a, и замечаемь, что результаты этихъ подстановокь  $(-a^2$  п  $+a^2$ ) имеють противоположные знаки. След.

положительный корень меньше а: онъ даеть точку С, лежащую между А и В и представляющую решение задачи въ прямомъ смыслъ.

Другой корень уравненія отрицателень; чтобы найти его значеніе, подставимь въ ур-ніе (1), первопачальное, — х вивсто х; получимь ур-ніе

имѣющее корни равные по величниѣ, но противоположные по знаку корнямъ ур-нія (1). Такимъ образомъ, отрицательный корень ур-нія (1), взятый съ противоположнымъ знакомъ, представляетъ прямое рѣшеніе задачи, отвѣчающей ур-нію (3). Послѣднее, какъ непосредственно видно, опредѣляетъ точку С', лежащую на продолженіи линіи ВА вправо отъ А, и также удовлетворяющую вопросу: въ самомъ дѣлѣ, положивъ AC' = x, имѣемъ BC' = a + x, и ур-ніе (3) тождественно съ

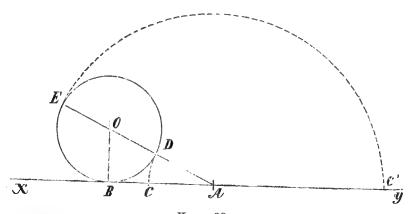
$$\overline{AC'}^2 = AB \times BC'$$
.

Итакъ, отрицательный корень даетъ другое рѣшеніе задачи, а знакъ этого корня ноказываеть, что послѣдній д. б. нанесень на продолженіи линіп AB, въ сторону отъ A, противоположную первому корню. Алгебранческое рѣшеніе, кромѣ отвѣта на вопрось въ тѣсномъ смыслѣ заданія, показало намъ, что вопросу, взятому въ болѣе шпрокомъ смыслѣ, удовлетворяютъ двѣ точки: С п С', причемъ знаки корней указываютъ расположеніе этихъ точекъ относительно А.

Рѣшая ур-ніе (1), находимъ:

$$x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1);$$
  
$$x'' = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}\right) = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Построение корней. Взявъ неограниченную прямую xy и на ней отръзовъ AB = a, возставляемъ въ этой прямой перпендикуляръ въ точев B, откладываемъ на немъ часть  $BO = \frac{a}{2}$ ; изъ точен O, какъ изъ центра, радіусомъ BO описываемъ окруж-



Черт. 33.

ность, и соединивъ А съ центромъ, продолжаемъ прямую АО до пересъчения съ окружностью въ точкъ Е; другую точку пересъчения назовемъ буквою D. Прямыя АD и АЕ представляютъ абсолютныя величины корней x' и x". Въ самомъ дълъ, изъ примоуг. треуг. АОБ имъемъ:

$$A0 = \sqrt{B0^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2};$$

Слѣд.

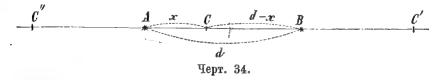
AD = AO - OB = 
$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = x'$$
,  
AE = AO + OB =  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} + \frac{a}{2} = -x''$ .

Остается нанести AD на AB влёво отъ точки A, линію же AE на продолженіе AB вправо отъ A: для этого нужно засёчь пряму жу двумя дугами круговъ, описанными изъ точки A, какъ изъ центра, радіусами AD и AE. Такимъ образомъ получимъ требуемыя точки С и С'.

### Задача II.

608. На неограниченной прямой, соединяющей два источника свыта А и В, найти точку, равноосвышенную обоими.

Задача эта впервые появилась въ алгебрѣ *Кмер*д (1746 г.), и съ тѣхъ поръ вошла въ учебники, какъ одинъ изъ поучительныхъ образцовъ изслѣдованія вопросовъ.



Обозначимъ разстояніе AB буквою d, разстояніе искомой точки C отъ A буквою x; тогда BC будеть равно d-x. Далье, пусть сила освъщенія источникомъ A тыла, находящагося отъ него на единичномъ разстояніи, будеть  $\alpha$ , а сила освъщенія источникомъ B на единичномъ разстояніи пусть будеть  $\beta$ . Изъ физики извъстно, что сила освъщенія обратно пропорціональна квадрату разстоянія освъщаемаго тыла отъ источника. Слыд., если сила освыщенія источникомъ A на разстояніи 1 есть  $\alpha$ , то на разстояніи 2, 3, 4,... единиць она будеть  $\frac{\alpha}{2^2}$ ,  $\frac{\alpha}{3^2}$ ,  $\frac{\alpha}{4^2}$ , ...., а потому на разстояніи x она будеть  $\frac{\alpha}{x^2}$ . Такимъ же образомъ сила освыщенія точки C источникомъ B будеть  $\frac{\beta}{(d-x)^2}$ . Но, по условію задачи, точка C освыщена обоими источниками одинавово, слыд.

Выраженіе это можно упростить, замѣтивъ, что: 1)  $\alpha \pm \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$   $= \sqrt{\alpha} \left(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}\right)$ ; 2)  $\alpha - \beta = (\sqrt{\alpha})^2 - (\sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta})$ . Взязь сначала нижній знакъ, пайдемъ:

$$x' = \frac{d\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})} = \frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Взявъ верхній знакъ, получимъ:

$$x'' = \frac{d\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})} = \frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Эти величины мы могли бы непосредственно получить изъ ур-нія (1), написавъ его въ видѣ  $\frac{(d-x)^2}{x^2} = \frac{\beta}{\alpha}$ ; извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, имѣемъ  $\frac{d-x}{x} = \pm \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$ , т. е. получаемъ два ур-нія первой степени: рѣшивъ ихъ, найдемъ формулы (2) и (3).

Изслъдованте. Такъ какъ  $\alpha$  и  $\beta$ , но смыслу задачи, существенно положительны, то x' и x'' всегда дѣйствительны; d есть также величина положительная, могущая въ частности обратиться въ 0, слѣд, возможны слѣдующіе случаи:

1) 
$$d > 0$$
,  $\alpha > \beta$ ; 2)  $d > 0$ ,  $\alpha < \beta$ ; 3)  $d > 0$ ,  $\alpha = \beta$ ; 4)  $d = 0$ ,  $\alpha \geqslant \beta$ ; 5)  $d = 0$ ,  $\alpha = \beta$ .

### 1-й случай: d > 0, $\alpha > \beta$ .

Первый корень, x', положителень; а какъ дробь  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} < 1$ , то x' < d. Это значить, что требуемая точка С находится между А п В. Кромъ того: изъ условія  $\alpha > \beta$  имѣемъ:  $\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta}$ , а слъд. и  $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha} > \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ , или  $2\sqrt{\alpha} > \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ , откуда  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} > \frac{1}{2}$ , а потому  $\frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} > \frac{d}{2}$ , пли  $x' > \frac{d}{2}$ . Это значить, что искомая точка С ближе къ источнику В, нежели къ А, что и должно быть, такъ какъ источникъ А сильнъе.

Второй корень, x'', также положителень; но вакь  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}>1$ , то x''>d. Слёд, второй корень опредёляеть другую равноосвёщенную точку C', лежащую оть A на разстояніи большемь d, т. е. вправо оть B. Такъ и должно быть: въ самомь дёлё, оба источника изливають свёть во всё стороны, слёд, на продолженіи AB должна лежать другая равноосвёщенная точка, которая должна быть ближе въ слабёйшему источнику B.

### **2**-й случай. d > 0, $\alpha < \beta$ .

Первый ворень, x', положителень, и, какь и въ первомъ случав, < d; кромъ того, изъ условія  $\alpha < \beta$  нивемъ:  $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$ , слъд.  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ , или  $2\sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ , откуда  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} < \frac{1}{2}$ , а сл.  $x' < \frac{d}{2}$ . Это значить, что искомая точка С ближе въ источнику А, нежели въ В, какъ и должно быть, ибо источникъ А слабъе.

Второй корень, x'', существенно отрицателень, такъ какъ знаменатель его отрицателень. Для истолкованія значенія этого корня обратимся къ первоначальному ур-нію (1); подставивъ въ него — x вмёсто x, найдемъ ур-ніе

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(d+x)^2}.$$

Выраженіе d-x означало разстояніе отъ искомой точки до B; въ новомъ ур-ніи это разстояніе выражается суммою d+x, а потому искомая точка должна находиться вдіво отъ A, напр. въ C''. Итакъ, отрицательный корень опредёляеть точку C'', ле-

жащую влюво от A. Дъйствительно, такая точка, находись ближе къ слабъйшему источнику A, будеть равно освъщена обонми.

### 3-й случай: d > 0, $\alpha = \beta$ .

Первый корень, x', обращается въ  $\frac{d}{2}$ . Это означаеть, что искомая точка находится по-срединѣ линін AB; такъ и должно быть при равенствѣ силы свѣта обоихъ источниковъ.

Второй корень, x'', обращается въ  $\frac{d\sqrt{\alpha}}{0}$  или въ  $\infty$ . Это значить, что вторая равноосвъщенная точка удалена на безконечно большое разстояніе оть точекъ А и В, т. е. что такой точки не существуеть. Выводъ этоть виолит согласенъ съ предположеніемъ  $\alpha=\beta$ ; въ самомъ дѣлѣ, если  $\alpha$  весьма мало разнится оть  $\beta$ , то знаменатель  $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$  будеть весьма маль, а x'' весьма велико, т. е. вторая равноосвъщенная точка будеть находиться на чрезвычайно большомъ разстояніи отъ А и В; чты меньше будеть знаменатель, тты больше будеть x'', т. е. вторая равноосвъщ. точка будеть болье и болье удаляться; и если положимъ обончательно  $\alpha=\beta$ , то x'' обратится въ  $\infty$ , т. е. искомой точки не будеть.

## **4-**й случай: d = 0, $\alpha \geqslant \beta$ .

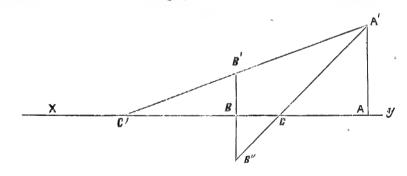
Оба ворня обращаются въ 0; это значить, что только одна точка равноосвъщена: та точка, въ которой находятся оба источника свъта.

5-й случай: 
$$d = 0$$
,  $\alpha = \beta$ .

Въ этомъ случав: x' = 0,  $x'' = \frac{0}{0}$ . Второе рѣшеніс — *неопредъленное*, означаєть, что всякая точка прямой будеть одинаково освѣщена обонми источниками, что и понятно, такъ какъ оба источника находятся въ одномъ мѣстѣ и равносильны. Первое рѣшеніе, x' = 0, даетъ точку, находящуюся въ томъ же мѣстѣ, гдѣ и оба источника.

Примъчаніс І. Изсавдованіе этой задачи, по своему характеру, не отличается отъ изсавдованія вопросовъ первой степени.

Примъчаніе ІІ. Нетрудно построить об'є равноосв'єщенныя точки. Возставивъ въ точк $\dot{\mathbf{n}}$  А периендикуляръ равный  $\sqrt{\alpha}$ , а въ точк $\dot{\mathbf{n}}$  В два периендикуляра, одинъ



Черт. 35.

кверху, другой книзу отъ линіи xy, равные  $\sqrt{\beta}$ , проводимъ прямыя A'B' и A'B", изъ копхъ первая пересъчеть линію xy въ точкъ С', вторая въ С. Эго и будутъ искомыя точки, въ самомъ дълъ:

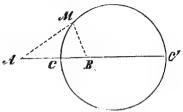
$$\frac{\text{AA'}}{\text{AC}} = \frac{\text{BB''}}{\text{BC}}, \text{ или } \frac{\sqrt{\alpha}}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{d-x}; \quad \frac{\text{AA'}}{\text{AC'}} = \frac{\text{BB'}}{\text{BC'}}, \text{ или } \frac{\sqrt{\alpha}}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{x-d} = -\frac{\sqrt{\beta}}{d-x}.$$

Результаты алгебранческаго изследованія предоставляеми читателю вывести изъ этого чертежа.

Примъчаніе III. Если бы требовалось найти геометрическое м'всто точекъ плоскости, равноосв'вщенныхъ источниками А и В, то, положивъ, что М есть одна изъ точекъ нскомаго м'вста, мы нашли бы, что

$$\frac{\alpha}{AM^2} = \frac{\beta}{BM^2}$$
, where  $\frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ .

Заключаемъ, что искомое мѣсто есть мѣсто такихъ точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ А и В имѣетъ данную величину. Изъ геометріи извѣстно, что это есть окружность, описантися по продуктов ССС (точекъ С. н. С. опредъть



Черт. 36.

ная на прямой СС' (точки С и С' опредёляются построснісмъ, указаннымь въ прим'єчаній II) какъ на діаметръ.

Примичаніе IV. Если бы требовалось опредёлить м'єсто точекъ въ пространств'є, равноосв'єщаемых точками А и В, то достаточно было бы обернуть окружность МСС' около діаметра СС': точки полученной шаровой поверхности и были бы требуемыя.

Наконецъ, если бы требовалось найти точки, равноосвъщенныя источниками А и В, на итвоторой линіи или на поверхности, расположенныхъ вблизи точекъ А и В, то очевидно, что искомыя точки были бы ебщими точками данной линіи или поверхности съ вышеуказанною сферою. Въ случат поверхности, этихъ точекъ было бы безконечное множество, но могла бы быть и одна только искомая точка, еслибъ сфера и поверхность были касательны; могло бы и не бытъ искомыхъ точекъ, еслибы поверхность и сфера не имъли общихъ точекъ.

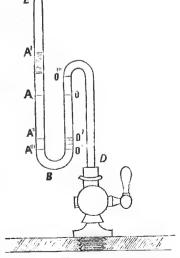
### Задача III.

**609.** Манометръ со сжатымъ воздухомъ состоитъ изъ дважды согнутой строго имминдрической трубки ABOD; вытвъ EB содержитъ сухой воздухъ; согнутая чисть

B-p myms, а вътвь OD находится въ сообщения съ паровымъ котломъ паровой машины. Когда уровень ртути стоитъ на одной горизоитальной плоскости AO, давленіе воздуха въ манометръ равно давленію атмосферы; когда давленіе въ котль увеличивается, ртуть подиимается въ вътви BE и на столько же опускается въ BO. Зная, что AE = l, что давленіе итмосферы = H, вычислить высоту х уровня A' надъ A, если давленіе въ котль равно n атмосферамъ.

Р в ш е н і е. Ртуть въ трубк ВЕ перестанетъ подниматься и остановится въ  $\Lambda'$ , когда упругость воздуха, сжатаго въ этой вътви, увеличенная колонною A'A'' ртути, уравновъситъ давленіе въ котлъ. Высота A'A'' = 2AA' = 2x.

Новое давленіе у воздуха, сжатаго въ А'Е, опредъляется по закону Маріотта, именно: если температура не измъняется, то давленія, производи-



Черт. 37.

мыя одною и тою же массою газа, обратно пропордіональны объемамъ, ею занимаемымъ. Въ данномъ случаѣ, объемы, послѣдовательно занимаемые воздухомъ въ манометрѣ, суть цилиндры, нмѣющіе одинаковое основаніе, а высоты l и l-x; сл., назвавъ сѣченіе трубки буквою  $\omega$ , имѣемъ:

$$\frac{\omega l}{\omega (l-x)} = \frac{y}{H}$$
, отвуда  $y = H \times \frac{l}{l-x}$ .

Такъ какъ давленіе въ котлѣ равно иН, то ур. задачи будеть:

$$nH = 2x + H \times \frac{l}{l - x},$$

или, по освобождении отъ знаменателя:

$$2x^2 - (2l + nH)x + l(n-1)H = 0$$
 . . . . . . (1)

Решивъ его, найдемъ

$$x = \frac{2l + nH \pm \sqrt{(2l + nH)^2 - 8l(n - 1)H}}{4},$$
$$x = \frac{2l + nH \pm \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}{4}.$$

или

Изследовантв. Такъ какъ подъзнакомъ радикала находится существенноположительное количество, то оба корня всегда дъйствительны. Если n>1, то пропзведеніе корней будеть положительно; а какъ и сумма ихъ положительна, то оба корня будутъ положительны. Но какъ неизвъстное должно быть еще < l, то нужно убъдиться, имъеть-ли ур-ніе корень, меньшій l. Подставляя l вмъсто x въ первую часть ур-нія (1), найдемъ

$$2l^2 - 2l^2 - nHl + lnH - lH$$
 пли  $-lH$ ,

т. е. результать отрицательный; это значить, что l заключается между корнями ур-нія (1), и сл. меньшій корень < l, а большій > l. Задачь отвычаеть меньшій корень, слыд.

$$x'' = \frac{2l + nH - \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

и есть искомый отвёть.

*Примъчаніе* І. Если n неограниченно увеличивать, то при  $n=\infty$  x' принимаеть неопредѣленный видь  $\infty-\infty$ ; чтобы найти истипное значеніе этой неопредѣленности, нучно числ. и знам. умножить на  $2l+nH+\sqrt{(nH-2l)^2+8lH}$ ; найдемъ

$$x'' = \frac{2l(n-1)H}{2l + nH + \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}.$$

При  $n = \infty$  это выраженіе принимаєть неопредёленную форму вида  $\infty$ , для расврытія воторой дёлимъ числ. и знам. на n; такимъ образомъ получимъ

$$x'' = \frac{2l\left(1 - \frac{1}{n}\right)H}{\frac{2l}{n} + H + \sqrt{\left(H - \frac{2l}{n}\right)^2 + \frac{8lH}{n^2}}};$$

и положивь здёсь и = 00, найдемъ

$$x'' = \frac{2lH}{H + H} = \frac{2lH}{2H} = l.$$

Это значить, что по мъръ того какъ давленіе увеличивается, уровень А' ртутной колонны болье и болье приближается къ вершинъ Е трубки ВЕ.

Примичаніе II. Если давленіе въ котлѣ сдѣлается меньше атмосферы, уровень ртути опустился до  $\Lambda'''$  ниже точки  $\Lambda$  въ колѣнѣ EB, и поднимается до 0''' въ BO, причемъ  $\Lambda A'' = 00''$ . Равновѣсіе наступитъ тогда, когда давленіе y воздуха въ манометрѣ будеть равно давленію пара + колонна ртути 0''0'', равная  $2\Lambda A'''$ . Если новое неизвѣстное  $\Lambda A'''$  назовемъ буквою z, y опредѣлится изъ пропорціи

$$\frac{l}{l+z} = \frac{y}{H}$$
, отвуда  $y = H \cdot \frac{l}{l+z}$ ;

новое ур-ніе задачи будеть

$$nH = H \cdot \frac{l}{l+z} - 2z$$
,

или

$$2z^2 + (2l + nH)z + l(n-1)H = 0;$$
 . . . . . . (3)

оно отличается отъ (1) только перемѣною x на -z; сл, корни (3) равны по величинѣ и противоположны по знаку корнямъ (1). Такъ какъ здѣсь n < 1, то произведеніе корней отрицательно, сл. одинъ корень ур-нія (3) положителенъ, другой отрицателенъ; новому вопросу отвѣчаетъ положительный корень

$$z' = \frac{-(2l + Hn) + \sqrt{(2l - nH)^2 + 8lH}}{4}$$
.

Сличая z' съ x'', видимъ, что ръшеніе x''(2) примънимо въ обоимъ случаямъ: n>1 и n<1; достаточно только откладывать отрицательныя значенія, которыя можетъ получать выраженіе (2), внизъ отъ точки A.

#### Запача IV.

**610.** Тяжелое тъло брошено въ пустотъ вертикально вверхъ съ начальною скоростъю  $V_0$ ; опредълить, въ какое время оно достигнетъ высоты h надъ начальною точкою?

Въ равномърно-замедлительномъ движеніп, какое имъетъ тяжелое тъло, поднимающееся вверхъ, пройденное пространство l связано съ временемъ t, употребленимъ на его прохожденіе, формулою

$$l = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$
. . . . . . . . . (1)

Следовательно, если искомое время назовемъ буквою x, то это неизвестное должно удовлетворять ур-нію

$$h = V_0 x - \frac{1}{2} g x^2$$
,

иди

$$gx^2 - 2\nabla_0 x + 2h = 0.$$
 . . . . . . . (2)

Изследованіе. Чтобы x, выведенное изъ этого ур-нія, давало отв'ять на вопросъ, нужно, чтобы р'яшеніе было д'яйствительно и положительно. Условіе д'яйствительности корней ур-нія (2) таково:

$$V_0^2 - 2gh \geqslant 0$$
, where  $h \leqslant \frac{V_0^2}{2g}$ .

Итакъ, различаемъ три случая:

Первый случай:  $h>rac{{{
m V_0}^2}}{2a}$  .

Корян ур-нія (2) мнимы, слід. задача невозможна. Это очевидно à priori. Въ самомъ діль, тіло остановится, когда его уменьшающаяся скорость обратится въ ноль Но скорость въ концѣ времени t опредѣляется формулою:  $V = V_0 - gt$ ; слѣд. она обратится въ ноль, когда время  $t = \frac{V_0}{a}$ ; пройденное до этого момента пространство будсть  $l = V_0 \cdot \frac{V_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0}{g}\right)^2 = \frac{{V_0}^2}{2g}$ . Это есть тахітит высоты, до которой можеть подняться тело при начальной скорости Vo.

Второй случай: 
$$h = \frac{{V_0}^2}{2g}$$
.

Кории ур-нія (2) въ этомъ случай — дійствительные равные, п общая величина ихъ есть  $\frac{V_0}{a}$ , что согласно съ выщеуказаннымъ результатомъ.

Третій случай: 
$$h < rac{{
m V_0}^2}{2g}$$
.

Въ этомъ случав ур-ніс (2) ниветъ корни двиствительные, перавиме и оба положительные (последнее потому, что ихъ произведение  $\frac{2h}{a}$  и сумма  $\frac{2V_0}{a}$  — положительны).

Чтобы дать себь отчеть въ происхождении этихъ деихъ положительныхъ корней, замѣтимъ, что тъло при движеніи бываеть дважды въ точкъ М, отстоящій по вертикалу па h отъ A: одинъ разъ детя вверхъ, другой разъ, надая внизъ. Оба ноложительные кория и дають эти времена. Въ самомъ деле, эти кории суть.

$$x' = \frac{V_0}{g} - \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}$$
;  $x'' = \frac{V_0}{g} + \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}$ .

Припомнимъ, что сколько времени тѣло употребляетъ на поднятіе отъ М до В, столько же и на паденіе отъ В до М. Пусть это время  $= \Theta$ ; сл., взявъ случай паденія, имѣемъ:  $BM = \frac{1}{2} g\Theta^2$  или  $\frac{V_0^2}{2g} - h = \frac{1}{2} g\Theta^2$ , откуда  $\Theta = \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}$ .

Затѣмъ, зная, что  $\frac{V_0}{g}$  есть время кульминаціи, находимъ, что меньшій корень,  $x'$ , представьяетъ разность между временемъ кульминаціи и временемъ, необходимымъ тѣлу на прохожденіе вверхъ разстоянія ВМ, слѣд.—еремя до кульминаціи, въ которое тѣло находится отъ точки А на высотѣ  $h$ ; больщій корень,  $x'$ , представляетъ сумму

оть точки A на высотb h; большій корень, x', представляеть сумму временъ, необходимыхъ тъду на поднятіе вверхъ до высшей точки В н затемъ на паденіе внизь до М, след. - время послю кульминаціи, въ которое тело находится отъ A на высоте h.

Черт. 38.

# Запача V.

611. Отг момента, въ который наблюдатель, стоящій у отверстія колодца, выпустиль изь рукь камень, до момента, вь который услышань быль ударь камня о воду, прошло t секундъ. Найти глубину колодца, зная: 1) что звукъ распространястся равномирно со скоростью v; 2) ито связь между пространствомь l, пройденнымъ при свободномъ паденіи, и временемъ  $\Theta$  паденія выражаєтся формулою  $l=rac{1}{2}\;g\Theta^2$ , гдв g-yскореніє тяжеєти.

P в ш е н г е. Пусть искомая глубина колодца будеть x; данное время t составляется изъ двухъ частей:

1) Изъ времени y, которое камень употребляеть на прохождение свободнымъ падениемъ глубины x колодца, причемъ связь между x и y выражается формулою  $x=\frac{1}{2}\ gy^2$ , изъ которой

$$y = \sqrt{\frac{2x}{g}};$$

2) изъ времени z, въ которое звукъ проходить разстояніе x равнои врнымъ движеніемъ со скоростью v, причемъ по закону равном врнаго движенія x = zv, откуда

$$z = \frac{x}{v}$$
.

Приравнивая z+y данному времени t, имфемъ ур-ніе

Это уравненіе — прраціональное; для решенія его, изолируемъ радикаль:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и возвышаемъ объ части въ квадрать, что даеть послъдовательно:

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2tx}{v} + \frac{x^2}{v^2}, \quad \text{ini} \quad gx^2 - 2v(v + gt)x + gv^2t^2 = 0. \quad . \quad . \quad (3)$$

Изсладование. Ур-ніе (3) не тождественно (2), пбо оно есть тоже, что ур-ніе

$$\frac{2x}{g} = \left(t - \frac{x}{v}\right)^2,$$

но последнее есть результать возвышенія въ квадрать какъ даннаго ур-нія

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v}$$

такъ и ур-нія

$$-\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v}$$

Чтобы корень ур-нія (3) удовлетворяль данному ур-нію, нужно, чтобы онь обращаль разность  $t=\frac{x}{v}$  въ количество положительно, т. е. удовлетворяль бы неравенству

$$t - \frac{x}{v} > 0$$
, where  $x < vt$ .

Итакъ, чтобы корень ур-нія (3) представляль отвётъ на данную задачу, нужно, чтобы онъ быль дёйствительнымъ, положительнымъ и меньше vt.

Чтобы корин ур-нія (3) были дійствительны, необходимо и достаточно, чтобы было  $v^2(v+gt)^2-g^2v^2t^2\geqslant 0$ , или  $v^2(v^2+2gvt)\geqslant 0$ .

Но каждое изъ количествъ g, v и t положительно, слъд. условіе дъйствительности всегда удовлетворено.

Затёмъ, оба корня положительны, потому что произведеніе ихъ  $v^2t^2$  и сумма  $\frac{2v(v+gt)}{g}$  — положительны. Остается убёдиться, будеть-ли хотя одинъ изъ корней < vt. Для этого въ триномъ, составляющій первую часть ур-нія (3), подставляемъ vt вмёсто x; получимъ:  $gv^2t^2 - 2v(v+gt)vt + gv^2t^2$ , или  $-2v^3t$ , результать отрицательный, т. е. противуположнаго знака коэффиціенту g при  $x^2$  въ триномѣ (3). Это значитъ, что vt содержатся между корнями ур-нія (3), и след. меньшій корень < vt, и только онъ одинъ даеть отвётъ на задачу. Итакъ

### Задача VI.

**612.** Построить прямоугольный треугольникь, зная его периметрь 2p и площадь  $m^2$ .

 $\mathbf{P}$  в швнів. Обозначимъ вскомые катеты буквами x и y, а гипотенузу z; най-

$$x+y+z=2p \ldots \ldots (1)$$

Изъ (1) имъемъ x+y=2p-z; возвысивъ объ части этого уравненія въ квадратъ и замънивъ  $x^2+y^2$  равнымъ этой суммъ количествомъ  $z^2$  (изъ (2)), получаемъ:  $z^2+2xy=(2p-z)^2$ ; или, замъчая, что по (3):  $2xy=4m^2$ , находимъ, раскрывъ  $(2p-z)^2$ :

$$z^{2} + 4m^{2} = 4p^{2} - 4pz + z^{2},$$

$$z = \frac{p^{2} - m^{2}}{p}. \qquad (4)$$

откуда

Подставлия вибсто  $\varepsilon$  это значение въ ур. (1), нифемъ:

Изъ ур-ній (3) и (5) видно, что x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$pu^2 - (p^2 + m^2)u + 2pm^2 = 0, \dots (6)$$

откуда:

$$\frac{x}{y} \left\{ = \frac{p^2 + m^2 \pm \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p} \dots \dots \dots (7) \right.$$

Изслъдовантв. Для дъйствительности x и y необходимо, чтобы было  $(p^2+m^2)^2-8p^2m^2\geqslant 0$ , или  $(p^2+m^2)^2-(2\sqrt{2}\cdot pm)^2\geqslant 0$ , или

$$(p^2 + m^2 + 2\sqrt{2} \cdot pm)(p^2 + m^2 - 2\sqrt{2} \cdot pm) \geqslant 0$$

т. е. оба множителя 1-й части должны иметь одинаковый знакъ: но какъ первый множитель положителенъ, то и второй д. б. > 0; такимъ образомъ, располагая по степенямъ m, иметь неравенство

$$m^2 - 2\sqrt{2 \cdot p} \cdot m + p^2 \geqslant 0.$$

Опредвляя кории тринома 1-й части, найдемъ:  $m' = p(\sqrt{2}-1)$  и  $m'' = p(\sqrt{2}+1)$ ; и какъ триномъ должевъ имъть знакъ перваго члена, то m должно лежать внъ корней; итакъ должно быть:

$$m \le p(\sqrt{2}-1) \dots (8)$$
, when  $m \ge p(\sqrt{2}+1) \dots (9)$ 

Когда то или другое изъ этихъ неравенствъ удовлетворено, величины x и y будуть дъйствительны. Но они должны быть и положительны; это такъ и есть, пбо какъ видно изъ ур. (6), ихъ произведеніе  $2m^2$  и сумма  $\frac{p^2+m^2}{p}$  положительны. Что касается z, то изъ формулы (4) видно, что эта величина всегда дъйствительна; но пужно, чтобы она была и положительна, а для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$m < p$$
 . . . . . . . . . (10)

Другихъ условій не существуєть; въ самомъ дѣлѣ, положительныя величины x, y, z удовлетворяють даннымъ ур-мъ, но ур. (2) показываеть, что большее изъ этихъ количествь z, меньше суммы двухъ другихъ (въ самомъ дѣлѣ,  $z^2$ , будучи  $= x^2 + y^2$ , меньше  $x^2 + y^2 + 2xy$ , или  $(x + y)^2$ , откуда z < x + y), а слѣд. можно построить тре-угольникъ изъ трехъ линій, мѣрами которыхъ служатъ числа x, y и z.

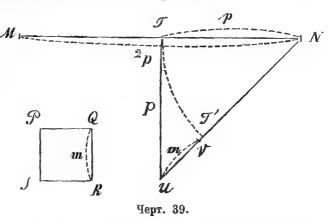
Зная это, замъчаемъ, что неравенство (9), будучи не необходимымъ, противоръчитъ необходимому неравенству (10), и потому должно быть отброшено. Тогда останутся два неравенства одного смысла (8) и (10); но какъ второе изъ нихъ заключается въ первомъ, то и заключаемъ, что единственнымъ условіемъ возможности задачи является:

$$m \leqslant p(\sqrt{2}-1).$$

Это неравенство показываеть, что наибольшая величина или тахітит т есть  $p(\sqrt{2}-1)$ ; такъ какъ это есть одинь изъ корней подрадикальнаго тринома, то послёдній при  $m=p(\sqrt{2}-1)$  обратится въ ноль, х и у сдёлаются равными, а треугольникъ равнобедреннымъ, такъ что находимъ теорему: Изъ всюхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра равнобедренный имъетъ наибольшую площадъ (ибо при наиб. значеніи m, и  $m^2$  имѣетъ наиб. значеніе).

Примъчаніе. Еслибъ мы рёшили неравенства относительно р, то легко нашли бы подобнымъ же образомъ, что: изъ всъхъ прямоуюльныхъ треуг-въ, имъющихъ одина-ковую площадъ, равнобедренный имъетъ наименьшій периметръ.

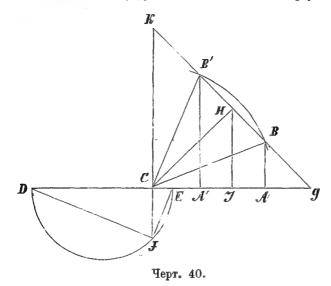
HOCTPOEHIE. Пусть данный периметръ 2p равенъ линіи MN. а данный квадрать стороны m равенъ PQRS. Разделивъ линію пополамъ, возставимъ въ точкъ Т перпендикуляръ TU = TN = p, и соединимъ U съ N; изъ прямоугольнаго Δ NTU имфемъ:  $NU = p\sqrt{2}$ . Описавъ изъ точки N дугу радіусомъ = p, получимъ:



 $\mathrm{UT}' = p(\sqrt{2}-1)$ . Изсябдованіе намъ показало, тго для возможности задачи сторона

m квадрата  $m^2$  не должна превышать линіп UT'; беремъ для заданнаго квадрата сторону, равную UV < UT'.

Строимъ z по формулъ (4). Для этого, взявъ прямую DG = 2p, на половинъ ен DE описываемъ полукругъ, наносимъ въ немъ хорду EF = m, опускаемъ периенди-



куляръ FC на DE, и соединяемъ точки D и F. Изъ прямоугольнаго треугольника DEF имѣемъ: DF $^2$  = DE $^2$  =  $p^2$  -  $m^2$ ; съ другой стороны: DF $^2$  = DE  $\times$  DC = p  $\times$  DC; слѣдоват. p  $\times$  DC =  $p^2$  -  $m^2$ , откуда

$$DC = \frac{p^2 - m^2}{p} = z.$$

Замъчая, что CG = DG - DC = 2p - z, изъ ур-нія (1) видимъ, что CG = x + y.

Допустивъ, что САВ есть требуемый треугольникъ, имжемъ:

CA + AB = x + y = CG = CA + AG, отвуда AB = AG: след. уголь G треуг-ка ABG равень  $45^{\circ}$ ; приэтомь CB = CD = s.

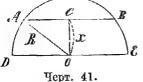
Поэтому въ треугольнивѣ ВСС извѣстны стороны СВ и СС и уголъ С; такъ что дальше продолжаемъ построеніе такъ: продолжаемъ ГС и беремъ СК — СС, соединяемъ точки К и С и опускаемъ перпендикуляръ СН на КС, который раздѣлитъ прямую КС въ точкѣ Н пополамъ. Не трудно удостовѣриться, что въ разсматриваемомъ случаѣ СО > СН; поэтому, описавъ изъ С, какъ изъ центра, дугу радіусомъ СО, найдемъ, что она пересѣчетъ линію КС въ двухъ точкахъ В и В'. Опустивъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры ВА и В'А' на СС, найдемъ два требуемые треугольника АВС и А'В'С; легко видѣть, что они равны. Въ самомъ дѣлѣ, СС, равно и АА' въ точкѣ І дѣлятся поиоламъ; ноэтому

$$AG = AB = A'C$$
; a takke  $CB = CB'$ .

При условін  $m=p(\sqrt{2}-1)$  легко видіть, что будеть CD=CH, и задача им'йеть одно рішеніє: равнобедренный треугольникъ CHI. Наконецъ, при  $m>p(\sqrt{2}-1)$  будеть CD< CH, и задача невозможна.

### Задача VII.

613. Въ данный полукругь вписать хорду такъ, чтобы сумма ея длины съ разстояніемъ отъ центра равнялась данной линіи т.



Рживнів. Пусть будсть АВ требуемая хорда, ОС ея разстояніе отъ центра. По условію задачи:

AB + OC = m.

Примемъ за неизвъстное OC = x; соединивъ А съ О, изъ треугольника АСО получимъ:  $AC = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,

откуда уравненіе задачи:

$$2\sqrt{\mathbf{R}^2-x^2}+x=m.$$

Это ур-ніе прраціональное; для різшенія его, изолируемъ корень въ первой части:

и возвышаемъ объ части въ квадратъ; приведя члены въ порядокъ, найдемъ ур-ніе:

$$5x^2 - 2mx + m^2 - 4R^2 = 0$$
 . . . . . . (2)

Изследованів. Это ур-ніе не тождественно съ (1), ибо оно получилось-бы п изъ ур-нія:  $-2\sqrt{\mathbb{R}^2-x^2}=m-x$ .... (1'), такъ что ур. (2), удовлетворяется корнями двухъ уравненій: (1) и (1'). Поэтому, корни ур-нія (2) только тогда будутъ удовлетворять ур-нію (1), когда они дѣлаютъ разность m-x положительною, т. е. когда x < m. Затѣмъ, необходимо, чтобы x было дѣйствительно, положительно п не больше R; при несоблюденіи послѣдняго условія точка C будетъ лежать внѣ окружности и потому не дастъ хорды.

Итакъ, чтобы алгебранческій корень x ур-нія (2) удовлетворяль предложенной геометрической задачѣ, нужно, чтобы было: x—дѣйствительно, x > 0, x < m, x < R.

Но если x удовлетворяеть первымъ тремъ условіямъ, то оно удовлетворяеть п ур-нію (1), а слёд.  $\sqrt{R^2-x^2}$ , равняясь дёйствительному количеству m-x, также будеть дёйствителень, а слёдоват. будеть п x < R. Такимъ образомъ, предыдущія условія сводятся къ слёдующимъ тремъ:

$$x$$
 hence,  $x > 0$ ,  $x < m$ .

Условіе д'явствительности корней ур-нія (2) выражается неравенствомъ:  $m^2-5(m-4\mathbb{R}^2)\geqslant 0$ , или, по упрощенін,  $m^2-5\mathbb{R}^2\ll 0$ ,

плп

$$(m+R\sqrt{5})(m-R\sqrt{5}) \ll 0.$$

Но первой множитель > 0, слёд, должно быть  $m-\mathrm{R}\,\sqrt{5}\leqslant$  0, или

$$m \ll R \sqrt{5}$$
.

Отсюда три случая:

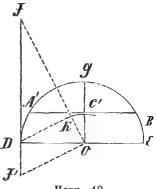
**Первый случай.**  $m > R\sqrt{5}$ . Ур-ніе (2) будеть им'єть корни мнимые: задача невозможна.

Второй случай.  $m = R\sqrt{5}$ . Ур-ніе (2) им'юєть корни д'я́йствительные равные: ихъ общая величина равна  $\frac{m}{\kappa}$ , или

$$x'=x''=\frac{R\sqrt{5}}{5}.$$

Это — величина дѣйствит., положительная и меньшая  $m=R\sqrt{5}$ , слѣд. представляеть рѣшеніе данной задачи; ей соотвѣтствуеть особое положеніе точки С. Проведя въ точкѣ D касательную DF=2R, соединяемъ точки F и О: прямая FO будеть =  $R\sqrt{5}$ ; отрѣзавь отъ нея пятую часть, ОК, отложимъ ее на радіусѣ ОС: пайдемъ точку  $C_1$  и хорда  $A_1B_1$ , будетъ требуемая.

Зам'єтнить, что величина  $R\sqrt{5}$  есть *тахітит* данной суммы m, ибо задача невозможна, когда m больше этой величины, но m



Черт. 42.

можеть достичь этой величины, когда точка С находится въ  $C_1$ . Итакъ сумма AB+OC достигаетъ maximum'a  $=R\sqrt{5}$  когда  $x=\frac{R\sqrt{5}}{5}$ 

**Третій случай.**  $m < R\sqrt{5}$ . Въ этомъ случай корви ур-нія (2) дійствительные и неравные; разсмотримъ ихъ знаки. Произведеніе корней  $\frac{m^2-4R^2}{5}$  положительно, равно нулю, или отрицательно, смотря по тому, будеть-ли m>, —, или < 2R, что не несовмістно съ условіємъ:  $m < R\sqrt{5}$ . Итакъ, этотъ случай подразділяется на три другяхъ:

$$m < R \sqrt{5} \begin{cases} m > 2R \\ m = 2R \\ m < 2R. \end{cases}$$

1.  $2R < m < R\sqrt{5}$ . Корни ур-нія (2) д'яйствительные, неравные, и оба положительны, потому что произведеніе и сумма ихъ > 0. Нужно знать, какъ они расположены относительно m; а для этого подставляемъ m вм'ясто x въ триномъ (2); находимъ:

$$5m^2 - 2m^2 + m^2 - 4R^2$$
 нап  $4m^2 - 4R^2$ , нап  $4(m^2 - R^2)$ .

Такъ какъ m>2R, то этоть результать всегда положителень, т. е. одного знака съ членомъ  $5x^2$ , след. m дежить вне корней; и какъ полусумма корней, равная  $\frac{m}{10}$ , меньше m, то заключаемъ, что оба корня меньше m, след. задача иметь 2 решенія, выражаемыя формулою

$$x = \frac{m}{5} \pm \frac{2}{5} \sqrt{5R^* - m^2}$$
.

II. m = 2R. Произведеніе корней равно нулю, слѣд., одинъ корень = 0, другой удовлетворяєть уравненію

$$5x - 4R = 0$$
, откуда  $x = \frac{4}{5}R$ ,

и задача опять имъетъ 2 ръшенія, изъ которыхъ первое даетъ хорду, сливающуюся съ діаметромъ.

ПІ. m < 2R. Корни ур-нія (2) дѣйствительные, неравные и противоположны по знаву, ибо ихъ произведеніе отрицательно. Чтобы положительный корень давалъ отвѣтъ на задачу, надо чтобы онъ былъ < m. Результатъ подстановки m вмѣсто x въ первую часть ур-нія (2)  $= 4(m^2 - R^2)$ ; отсюда заключаемъ:

- 1) Если m, будучи < 2R, въ тоже время > R, то результать этоть положителень, след., m лежить виф корией, и какъ m положительно, то оно больше положительнаго кория, который, след., даеть отвёть на задачу: задача имфеть 1 решеніе.
- 2) Когда m = R, результать подстановки R вмѣсто x обращается въ 0, а это значить, что R есть корень даннаго ур-нія: задача имѣеть одно рѣшеніе: x = R хорда обращается въ ноль.
- 3) Когда m < R, результать  $4(m^2 R^2)$  отридателень, слъд. m заключается между корнями, и потому положительный корень больше m: задача невозможна, что очевидно, ибо уже AC + OC, по свойству сторонь треугольника, больше R, а AB + OC и полавно.

### Резюме изслыдованія.

$$m> {
m R}\,\sqrt{5}$$
 . . . . .  $x'$  и  $x''$  мнимы : 0 рёшеній.  $m={
m R}\,\sqrt{5}$  . . . . .  $x'=x''=rac{{
m R}\,\sqrt{5}}{5}$  даеть

тахітит для т : 1 решеніе (2 равныхъ решенія.)

$$m < R\sqrt{5} egin{cases} m > 2R & \dots & 0 < x' < m; & 0 < x'' < m : 2 \ p$$
 в шенія.  $m = 2R & \dots & x' = 0; & x'' = rac{4}{5} R : 2 \ p$  в шенія.  $m < 2R \ m = R & \dots & \dots & : 1 \ p$  в шеніе.  $m < 2R \ m < R & \dots & x' = R & \dots & : 0 \ p$  в шенів.

Завлючаемъ, что когда m измѣняется отъ своего maximum'а  $= R\sqrt{5}$  до 2R, задача имѣетъ два рѣменія; при m меньшихъ 2R, но не меньшихъ R, она имѣетъ

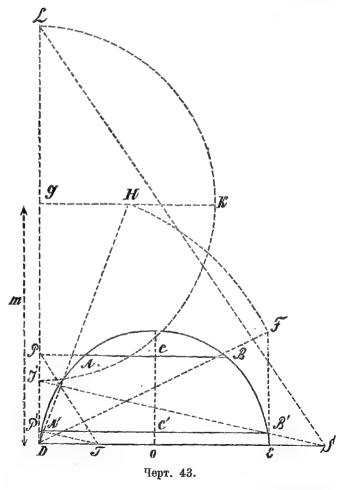
1 рѣшеніе; при m < R, она невозможна.

Построеніє. Проведя касательную EF = R, и соединивъ точки D и F, получимъ линію  $DF = R\sqrt{5}$ . Затѣмъ на касательной DL откладываемъ отрѣзокъ DG = m, взявъ его > 2R, но  $< R\sqrt{5}$ , и проводимъ прямую GH параллельно DE. Описавъ изъ точки D дугу радіусомъ DF до пересѣченія съ прямою GH въ точкѣ H, най-демъ:

$$GH = \sqrt{5R^2 - m^2};$$
затёмъ беремъ линію  $GK = 2GH:$ 

$$GK = 2\sqrt{5R^2 - m^2}$$
, и изъ точки  $G$  радіусомъ  $GK$  описываемъ полуокружность, которая пересъчеть прямую DL въ точкахъ I и L; очевидно:

DI = 
$$m - 2\sqrt{5R^2 - m^2}$$
,  
DL =  $m + 2\sqrt{5R^2 - m^2}$ .



Остается отъ каждой изъ этихъ прямыхъ отрёзать пятую часть. Беремъ  $\mathrm{DT} = \mathrm{ES} = \frac{\mathrm{R}}{2}$ , проводимъ SI и SL, и изъ точки T прямыя: TP параллельно SL

и TP' параллельно SI; остается изъ точекъ P и P' провести параллели діаметру DE, которыя и далуть требуемыя хорды АВ и А'В'.

### Запача VIII.

614. Зная высоту h устченнаго конуса, его объемъ V и радіусь R одного изг основаній, вычислить радіусь х другаго основанія.

Рашентв. Объемъ конуса, усъченнаго параллельно основанію, дается формулою:  $\frac{1}{2}\pi\hbar(R^2+Rx+x^2)$ , и если данный объемъ V мы представимъ въ видъ конуса той же высоты h, какъ и искомый, съ радіусомъ a основанія, т. е. положимъ  $V=\frac{1}{2}\pi ha^2$ , то прямо получимъ ур-ніе

откуда

Изсятдование. Еслп предположить, что искомый усѣченный конусъ состоить пзъ двухъ конусовъ, сложенныхъ вершинами, т. е. представляетъ усѣченный конусъ 2-го рода, то нашли бы ур-ніе

$$x^2 - Rx + R^2 - a^2 = 0, \dots$$
 (2)

отличающееся отъ перваго только перемѣною x на -x: слѣд. отрицательные корни ур-нія (1) служать положительными корнями (2), и потому дають рфшенія 2-го рода.

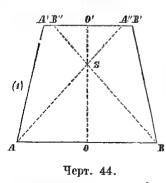
Зная это, обратимся къ изследованію ур-нія (1). Условіе действительности его корней выражается неравенствомъ:

$$a^2 \gg \frac{3}{4} R^2$$
.

Отсюда три случая:  $a^2 < \frac{3}{4} \ \mathrm{R}^2$ ,  $a^2 = \frac{3}{4} \ \mathrm{R}^2$ ,  $a^2 > \frac{3}{4} \ \mathrm{R}^2$ .

**Первый случай:**  $a^2 < \frac{3}{4} \ \mathrm{R}^2$  Кории ур-нія (1) минимы, и задача невозможна.

Второй случай:  $a^2 = \frac{3}{4} \ \mathrm{R}^2$ , т. е. при наименьшей величинѣ  $a^2$ :



$$x=-\frac{\mathrm{R}}{2}$$

что даеть усвченный конусь 2-го рода, у котораго радіусь верхняго основанія вдвое меньше радіуса нижняго основанія. Это значить, что изъ всёхъ усъченных конусовъ 1-го или 2-го рода, которые можно ностроить на данномъ основани и съ данною высотою, наименьшій объемъ принадлежить конусу 2-го рода ABSB"А", котораго вершина находится на  $\frac{2}{3}$  высоты отъ нижняго основанія.

**Третій случай**:  $a^2 > \frac{3}{4}$  R<sup>2</sup>. Уравненіе (1) имѣетъ корни дѣйствительные неравные; ихъ знакъ зависить отъ последняго члена  $\mathbb{R}^2-a^2$ ; поэтому следуеть различать три случая, смотря по тому, будеть-ли  $a^2 < , = ,$  нли  $> \mathrm{R}^2 ,$  нмёя въ виду, что когда  $a^2\!<\!\mathrm{R}^2$ , оно должно быть въ тоже время  $>\!rac{3}{4}\,\mathrm{R}^2$ .

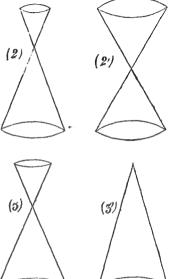
1.  $\frac{3}{4}$   $\mathrm{R}^2 < a^2 < \mathrm{R}^2$ . Произведеніе корней ур-нія (1) положительно, а сумма ихъ отрицательна ( -- R), след. оба кория отрицательны и дають два решенія 2-го рода (2) и

$$x=0$$
,  $x=-R$ .

Второй корень даеть усъченный конусь 2-го рода (3), пифющій вершнну въ срединф высоты; первое ръшеніе даеть полный конусь (3'), который по произволу можно разсматривать или какъ усвченный 1-й рода, или вакъ усвч. кон. 2-го рода.

3.  $a^2 > R^2$ . Произведеніе корней ур-нія (1) отрицательно; слёд, одинъ корень положителенъ, а другой отрицателенъ: первый даетъ усвч. конусъ 1-го рода, второй — 2-го рода, какъ на черт. (1).

Если теперь помножить объ части предыдущихъ равенствъ и неравенствъ на  $\frac{1}{2} \pi h$ , чтобы ввести данный объемъ V, то все изследование можно резюмировать такъ:



Черт. 45.

## Резюме изслыдованія.

$$abla < rac{1}{4}\pi \mathrm{R}^2\hbar$$
 . . . . . .  $x'$  и  $x''$  мнямы  $:$  0 рътеній.

$$V = \frac{1}{4}\pi R^2 h$$
 . . . .  $x' = x'' = -\frac{R}{2}$  даеть : 1 рыш. 2-го рода.

$$V > \frac{1}{4} \pi R^2 h$$
  $\begin{cases} V < \frac{1}{3} \pi R^2 h . . : x' < 0, \ x'' < 0 \ : \ 2 \ \text{рѣшенія 2-го рода.} \end{cases}$   $V > \frac{1}{4} \pi R^2 h$   $V > \frac{1}{3} \pi R^2 h . . : x' < 0, \ x'' > 0 \ : \ 1 \ \text{рѣшенія 2-го рода.} \end{cases}$   $V > \frac{1}{3} \pi R^2 h . . : x' < 0, \ x'' > 0 \ : \ 1 \ \text{рѣш. 1-го и 1 рѣш. 2-го рода.} \end{cases}$ 

615. Изслъдование измънения овъема V. Для объема V мы нашли формулу:  $V = \frac{1}{3}\pi h(x^2 + Rx + R^2)$ , которую можно написать въ вид $\mathfrak k$ 

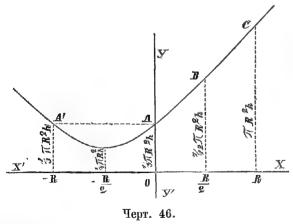
$$V = \frac{1}{3} \pi \hbar \left[ \left( x + \frac{R}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} R^2 \right].$$

Это есть ввадратный триномъ относительно х; научение его памёнений при памёненін x оть —  $\infty$  до  $+\infty$  приведеть нась къвышенайденнымъ результатамъ, но кратчайшимъ путемъ.

Даемъ x-су спачала значенія отъ 0 до  $+\infty$ , и вычисляємъ соотв'єтствующія значенія выраженія въ квадратныхъ скобкахъ; помноживъ каждое изъ этихъ значеній на  $\frac{1}{3}\pi h$ , найдемъ изм'єненія объема V. Тоже самое д'єлаємъ, изм'єняя x отъ 0 до  $-\infty$ . Такимъ образомъ получаємъ дв'є таблицы изм'єненій V: для положительныхъ и для отрительныхъ значеній x.

Итает конуст перваго рода неограниченно возрастаеть отъ  $\frac{1}{3}\pi R^2h$  до безконечности; конуст втораго рода сперва уменьшается отъ  $\frac{1}{3}\pi R^2h$  до  $\frac{1}{4}\pi R^2h$ , потомъ увеличивается до $\frac{1}{3}\pi R^2h$ , проходя два раза черезт всё величины между  $\frac{1}{4}\pi R^2h$  и  $\frac{1}{3}\pi R^2h$ ; а затёмъ продолжаеть увеличиваться проходя разъ черезъ каждое значеніе отъ  $\frac{1}{3}\pi R^2h$  до  $+\infty$ .

Представимъ эти измѣненія объема кривою. Для этого наносимъ положительныя



значенія x `по оси x вправо оть начала 0, отрицательныя— важво оть 0. Въ конечной точь каждаго значенія x проводимъ перпендикуляръ въ оси x'x, и откладываемъ на немъ величину функціи V. Соединивъ вершины ординать, получимъ параболу, пзображающую наглядно измѣпенія V. Эта кривая показываеть:

1) Чтобы найти значеніе V, соотейтствующее данному значенію x, нужно нанести x на ось x'x вправо или влёво

оть точки 0, смотря по знаку x-са, и провести ординату кривой, соответствующую взятому значенію x.

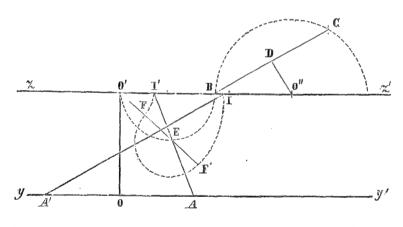
2) Чтобы найти значеніе x, соотв'єтствующее данной величия V, нужно перес'єчь кривую параллелью оси x'x, взятою на разстояніи оть x'x, равномь значенію V, и построить абсциссы точекъ перес'єченія этой параллели съ кривою.

Такимъ образомъ легко видѣть, что задача не имѣетъ рѣшенія, когда V меньше  $\frac{1}{4}\pi R^2h$ , пбо кривая не имѣетъ точекъ, которыхъ ординаты были бы меньше  $\frac{1}{4}\pi R^2h$ ; что наименьшее зпаченіе V есть  $\frac{1}{4}\pi R^2h$ , и что оно соотвѣтствуетъ  $x=-\frac{R}{2}$ ; что V принимаетъ два раза кажное значеніе между  $\frac{1}{4}\pi R^2h$  и  $\frac{1}{3}\pi R^2h$  при двухъ различныхъ отрицательныхъ значеніяхъ x, одномъ, содержащемся между 0 п  $-\frac{R}{2}$ , другомъ — между  $-\frac{R}{2}$  и -R; это — усѣченные конусы 2-го рода; что наконецъ, при x-хъ большихъ нуля и меньшихъ — R задача принимаетъ по одному рѣшенію — въ первомъ случаѣ 1-го рода, во второмъ 2-го рода.

Постровнів. Возьмемъ случай: a > R, когда задача имѣеть два рѣшенія — усѣченные конусы 1-го и 2-го рода. Верхнія основанія ихъ имѣють радіусы, выражаемые формулами:

$$x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{a^3 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Взявъ линію 00' = h, проведемъ въ ней въ точкахъ О и 0' перпендикуляры yy и zz'; на первомъ отъ точки О отложимъ ОА = ОА' = R, на второмъ отъ точки О' ли-



Черт. 47.

нію O'B = a, а на продолженін ея линію BO" = R. Изъ точки O" радіусомъ O"B описываемъ полукругь, въ которомъ винсываемъ сторону правильнаго треугольника BC, и дёлимъ ее въ точкѣ D пополамъ; линія BD =  $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ . Описавъ на и полукружность, наносимъ въ нее хорду BE = BD и соединяемъ точку E съ O': очевидно, O'E =  $\sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ . Затёмъ, описавъ изъ точки E радіусомъ EF = EF' =  $\frac{R}{2}$  полукругъ, получимъ окончательно:

$$0' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{R}{2} = x''; \ 0' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{R}{2} = -x'.$$

Нанеся линіи O'F и O'F' на линію O'O", получимъ: O'I=x'', O'I'=-x'. Остается соединить I съ A, а I' съ A' и повернуть чертежъ около оси OO': вращеніе дастъ искомые конусы.

#### Задача ІХ.

**616.** Построить треугольникъ, зная его сторону а, соотвътствующую ей высоту h и радіусъ R описаннаю круга.

Ръменів. Пусть неизвъстныя стороны будуть х и у. По извъстнымь теоремамъ геометріи имъемъ:

$$xy = 2Rh; \frac{ah}{2} = \sqrt{\frac{(x+y+a)}{2} \cdot \frac{(x+y-a)}{2} \cdot \frac{(a+x-y)}{2} \cdot \frac{[a-(x-y)]}{2}}.$$

Возвышая объ части 2-го ур. въ квадратъ, найдемъ:

$$4a^2h^2 = [(x+y)^2 - a^2][a^2 - (x-y)^2].$$

Примемъ за вепомогательное неизвъстное сумму  $x+y=s;\; x$  и y будутъ ворнями уравненія

$$X^2 - sX + 2Rh = 0$$
 . . . . . . . (1)

Для опредъленія з имфемъ соотношеніе

$$4a^{2}h^{2} = (s^{2} - a^{2})[a^{2} - (s^{2} - 8Rh)],$$
  

$$s^{4} - 2(a^{2} + 4Rh)s^{2} + a^{4} + 4a^{2}h^{2} + 8a^{2}Rh = 0 . . . . . (2)$$

или

Ръшая это ур-ніе относительно  $s^2$ , найдемъ, что подрадикальное количество —  $(4R^2-a^2)$ .  $4h^2$ : оно положительно, если a<2R. Если это условіе выполнено, оба значенія  $s^2$  дъйствительны; они и положительны, ибо произведеніе и сумма корней ур-нія (2), разсматриваемаго какъ квадратное, положительны; слёд. s, при условій a<2R, имъєть всегда два положительныя значенія, именно:

$$s = \sqrt{a^2 + 4Rh \pm 2h\sqrt{4R^2 - a^2}} = \sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)},$$

полагая  $d = \sqrt{4R^2 - a^2}$ .

Ръшая затъмъ ур-ніе (1), находимъ:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(-2R \pm d)},$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2h(-2R \pm d)},$$

подагая, что x>y, что позволительно; въ этихъ формулахъ нужно брать передъ d или верхніе знаки вмѣстѣ, или нижніе вмѣстѣ (въ силу ур нія xy=2Rh). Такимъ образомъ имѣемъ:

$$x_{1} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{a^{2} + 2h(2R + d)} + \sqrt{a^{2} + 2h(-2R + d)} \right\}$$

$$y_{1} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{a^{2} + 2h(2R + d)} - \sqrt{a^{2} + 2h(-2R + d)} \right\}$$
(3)

$$x_{2} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{a^{2} + 2h(2R - d)} + \sqrt{a^{2} + 2h(-2R - d)} \right\}$$

$$y_{2} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{a^{2} + 2h(2R - d)} - \sqrt{a^{2} + 2h(-2R - d)} \right\}$$
(4)

Изъ этихъ формулъ выводимъ следующія заключенія.

Въ системѣ (3) рѣшеній первый корень всегда дѣйствителенъ; чтобы и второй быль дѣйствителенъ, надо, чтобы было

$$a^2 + 2h \left( -2R + d \right) > 0$$
, otryja  $h < \frac{a^2}{2(2R - d)}$ .

Система (4) решеній будеть действительна, если подкоренное количество подъвторымь радикаломь будеть положительно, т. е. если  $a^2-2h(2R+d)>0$ , откуда  $h<\frac{a^2}{2(2R+d)}$ . Въ этомъ пределе заключается первый. Умножая оба члена второй части неравенства на 2R-d, имбемъ:

$$h < \frac{a^{\mathrm{e}}(2\mathrm{R}-d)}{2\left(4\mathrm{R}^2-d^2\right)}, \quad \text{fight} \quad h < \frac{2\mathrm{R}-d}{2}, \quad \text{fight} \quad h < \mathrm{R}-\frac{d}{2} \;.$$

Итавъ, задача имъетъ dea pnuenia, если  $h < \mathrm{R} - \frac{d}{2}$  .

Если  $a^2-2h(2\mathbf{R}+d)<0$ , но  $a^2-2h(2\mathbf{R}-d)>0$ , огвуда

$$\frac{a^2}{2(2R-d)} > h > \frac{a^2}{2(2R+d)}$$
 ,

то система (4) даеть мнимыя значенія для x и y, а система (3) дійствительныя; заключаемь, что при условін

$$R - \frac{d}{2} < h < R + \frac{d}{2}$$

задача имъетъ одно ръшсніе, выражаемое корнями  $x_i$  и  $y_i$ .

Наконець, если h> R  $+\frac{d}{2}$ , то объ системы (3) и (4) мнимы, и задача невозможна.

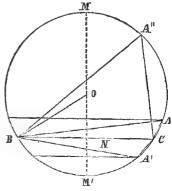
Эти результаты легко обнаружить на чертежѣ. Описавъ вругъ радіусомъ R, проведемъ въ немъ корду BC = a, и къ ней перпендикулярный діаметръ  $MM';ON = \sqrt{OB^2 - BN^2} = M'$ 

$$\sqrt{\mathbb{R}^3-\frac{a^2}{4}}$$
, слѣдовательно;

$$d = 20N$$
,  $\frac{d}{2} = 0N$ .

При  $h < R - \frac{d}{2}$ , т. е. при h < OM' - ON, или при h < NM' существують двѣ точки А и А', расположенныя въ разстояніи h отъ ВС, по ту и по другую сторону отъ ВС и лежащія на данной окружности; слѣд. задачѣ отвѣчають два треугольника: АВС и А'ВС.

Если 
$$R - \frac{d}{2} < h < R + \frac{d}{2}$$
, т. е. если



Черт. 48.

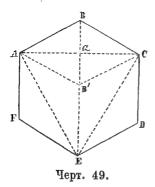
 $\mathrm{NM'} < h < \mathrm{NM}$ , одинъ треугольникъ А"ВС отвъчаеть вопросу.

Наконецъ, если h > NM, то певозможно вписать въ окружность треугольникъ, высота котораго была-бы = h, и задача невозможна.

#### Задача Х.

**617.** По данной плошади  $m\sqrt{3}$  и периметру 6а шестіуюльника, составленнаго тремя равными равнобедренными треуюльниками, построенными на сторонахъ равносторонняго треуюльника ACE, какъ на основаніяхъ, найти сторону AC этого правильнаго треуюльника.

Рашеніе. Заметимъ прежде всего, что шестіугольникъ можетъ быть двоякаго



вида, смотря по тому, будуть-ли равнобедренные треугольники построены внѣ треугольника АСЕ, или внутри его: въ первомъ случаѣ будемъ называть шестиугольникъ фигурою перваго рода, во второмъ — втораго рода.

Пусть 
$$AC = 2x$$
;  $AB = a$ ; ур-ніе будеть  $m\sqrt{3} = x^2\sqrt{3} \pm 3x\sqrt{a^2 - x^2}$ ,

причемъ знакъ — относится къ местіугольнику 1-го рода, знакъ — къ фигуръ 2-го рода.

Раздѣливъ обѣ части на  $\sqrt{3}$ , и изолировавъ радикадъ имѣемъ:

$$m-x^2=\pm x\sqrt{3(a^2-x^2)}$$
.

И з с л в д о в а и і в. Для того, чтобы вторая часть была дѣйствительною, необходимо, чтобы существенно положительное количество x содержалось между 0 и a; затѣмъ, смотря по знаку разности  $m-x^2$ , различаемъ, какой родъ шестіугольника отвѣчаетъ вопросу.

Возвышая объ части въ квадратъ, получимъ ур-ніе, отвъчающее задачь въ самомъ общемъ ен смыслъ:

$$(m-x^2)^2 = 3(a^2-x^2)x^2$$
,

или, приведя въ порядокъ:

$$4x^4 - (2m + 3a^4)x^2 + m^2 = 0$$
,

откуда

Различаемъ два случая; m>0 и m<0, что возможно, нбо можетъ случиться, что въ шестіугольник $\sharp$  2-го рода илощадь каждаго изъ равнобедренныхъ трсугольнивовъ будетъ больше илощади равносторопияго треугольника.

**1-й случай:** m>0. Первое подкоренное количество >0; чтобы второе было не меньше 0, надо, чтобы было  $-2m-1/3a^2 \le 0$ , откуда

$$m \geq \frac{3}{2} a^{q}.$$

Кавъ скоро это условіе удовлетворено, значенія x, выражаемыя формулою (1), дѣйствительны; а кавъ абсолютная величина перваго члена въ скобкахъ больше втораго, то положительныя значенія x, которыя только и отвѣчають на вопросъ, будуть;

$$x_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{6m + 3a^2} - \sqrt{-2m + 3a^2}),$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{6m+3a^2}+\sqrt{-2m+3a^2}).$$

I. При  $m=\frac{3}{2}\,a^3$ , имѣемъ:  $x_1=x_2=\frac{a\,\sqrt{3}}{2}$ , и задача имѣетъ одно рѣшеніе; соотвѣтствующій шестіугольникъ — правильный.

II. При  $m<\frac{3}{2}$   $a^2$  вопросъ имѣетъ два рѣшенія: существуютъ два шестіугольника, отвѣчающіе вопросу, и чтобы опредѣлить ихъ родъ, надо знать знаки разностей  $m-x_1^2$  и  $m-x_2^2$ ; но какъ  $x_2>x_1$ , то опредѣлимъ сначала знакъ  $m-x_2^2$ ; имѣемъ  $m-x_2^2=m-\frac{4m+6a^2+2\sqrt{(6m+3a^2)(-2m+3a^2)}}{16}=\frac{6m-3a^2-\sqrt{(6m+3a^2)(-2m+3a^2)}}{8}$ .

Пусть сперва  $6m > 3a^2$ , такъ что

$$\frac{a^3}{2} < m < \frac{3a^3}{2};$$

оба члена дроби можно умножить на положительное количество  $6m - 3a^2 + \sqrt{(6m - 3a^2)(-2m + 3a^2)}$ , и разсматривать только числителя, отъ котораго зависить искомый знакъ разности; но числитель, по упрощеніи, даеть  $48m^2 - 48u^2m$ , или 48m.  $(m - a^2)$ : эта разность положительна, если  $m > a^3$ . Слъд, если

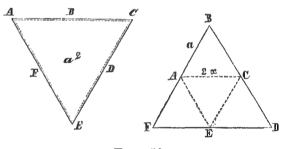
$$a^{\mathfrak{g}} < m < \frac{3}{2} a^{\mathfrak{g}},$$

то  $m-x_2^2>0$ , и нодавно  $m-x_1^2>0$  ибо,  $x_1< x_2$ ; след. оба шестіугольника относятся къ 1-му роду.

При  $m=a^{q}$ , имъемъ,  $x_{2}=a$ ,  $x_{1}=\frac{a}{2}$ , п оба шестіугольника превращаются въ

правильные треугольники: 1-й  $x_2$  совпадаеть съ треугольникомъ ACE; 2-й  $x_1$  имѣеть стороны (2a) вдвое большія сторонъ треугольника ACE, ибо  $2x_1 = a$ .

Когда m заключается между  $a^2$  и 0, шестіугольникъ, соотвётствующій корию  $x_2$ , будеть 2-го рода, ибо m—  $x_2$ 2 < 0. Что касается разности m—  $x_1$ 2, то она одного знака



Черт. 50.

съ выражениемъ  $6m-3a^2+\sqrt{(6m+3a^2)(-2m+3a^2)}$  . . . . . . . . . (2); слъд. положительна, если  $m>\frac{a^2}{2}$ , и остается положительною, если m содержится между  $\frac{a^2}{2}$  и 0, ибо при  $m<\frac{a^2}{2}$ , откуда  $3a^2-6m>0$ , умножая выраженіе (2) на положит. Количество

$$3a^2-6m+\sqrt{(6m+3a^2)(-2m+3a^2)}$$

не измѣнить его знака; но это произведеніе =  $(6m+3a^2)(-2m+3a^2)-(3a^4-6m)^2=-48m^4+48a^2m=48m(a^2-m)$ , что >0, ибо  $m<\frac{a^2}{2}$ . Итакъ, во всемъ этомъ интервальѣ шестіугольникъ, соотвѣтствующій корню  $x_1$ , будеть nepsaro poda.

**2-й случай:** m < 0. Чтобы корни были дёйствительны, нужно чтобы было

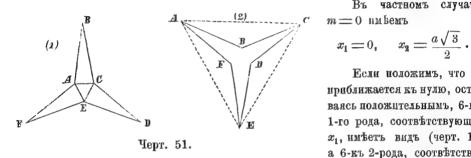
$$6m + 3a^2 > 0$$
, otryga  $m > -\frac{a^2}{2}$ .

Величина перваго члена скобокъ въ формулф (1) будетъ меньше втораго члена, и потому положительные корни, отвачающие вопросу, будуть;

$$x_1 = \frac{1}{4} \left( -\sqrt{6m + 3a^2} + \sqrt{-2m + 3a^2} \right),$$

$$x_2 = \frac{1}{4} \left( +\sqrt{6m + 3a^2} + \sqrt{-2m + 3a^2} \right).$$

Оба соотвътствующіе шестіугольнива относятся во втораму роду.



Въ частномъ случав: m = 0 ни bemъ

$$x_1=0, \quad x_2=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Если положимъ, что т приближается къ нулю, оставаясь положительнымъ, 6-къ 1-го рода, соотвътствующій  $x_1$ , имѣетъ видъ (черт. 1), а 6-къ 2-рода, соотвътствутолько расположениемъ вер-

ющій  $x_2$ , имбеть видь (черт. 2), разпящійся оть 1-то шинъ относительно правильнаго треугольника АСЕ.

### Резюме изслыдованія.

$$m>rac{3}{2}$$
  $a^2$  . . . .  $x_1$  и  $x_2$  мнимы . . . 0 рѣшеній. 
$$m=rac{3}{2}~a^2$$
 . . .  $x_1=x_2=rac{a\sqrt{3}}{2}$  . . . 1 рѣшеніе (перваго рода). 
$$a^2< m<rac{3}{2}~a^2$$
 .  $x_1>0,~x_2>0$  . . . 2 рѣшенія (перваго рода). 
$$0< m . . .  $x_1>0,~x_2>0$  . . . 1 рѣш. 1-го рода, 1 рѣш. 2-го р. 
$$-rac{a^2}{2}< m<0$$
 . . .  $x_1>0,~x_2>0$  . . . 2 рѣшеніе (2-го рода).$$

# Залача XI.

618. Шаръ радіуса г лежить на плоскости; на той же плоскости поставлень конусь, котораго радіусь основанія равень R, а высота 2r. На какомь растоянін х отъ данной плоскости пужно провести паральлельную ей плоскость, чтобы объемы, содержашівся между обыши плоскостями, были равновелики? — Изслидовать положеніе съкушей плоскости относительно центра шара.

Рышение. Объемы сферического сегмента, им'яющого высоту х, выражается формулою  $\frac{1}{3} \pi x^{9} (3r - x)$ . Объемъ усѣченнаго конуса, у котораго радіусы основаній суть R и y, а высота x, выражается формулою  $\frac{1}{3} \pi x (R^2 + y^2 + Ry)$ . Кром'в того между x и y имѣемъ соотношеніе  $y: \mathbf{R} = (2r - x): 2r$ , при помощи котораго можно изъ предыдущей формулы исключить y; найдемъ

$$\frac{1}{3} \pi R^2 x \cdot \frac{12r^2 - 6rx + x^2}{4r^2}$$
.

Уравненіе задачи, по сокращеніи на  $\frac{1}{3}$   $\pi$ , будеть

$$4r^2x^2(3r-x) = R^2x(x^2-6rx+12r^2).$$

Рѣшеніе x = 0 не соотвѣтствуеть задачѣ, пбо оба объема обращаются въ нули; остается квадратное ур-ніе

$$(R^2+4r^2)x^2-6r(R^2+2r^2)x+12R^2r^2=0$$
 . . . . . (1).

И в с д в д о в а н і в. Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы x было дѣйствительно, положетельно и <2r. Условіє дѣйствительности корней выражается неравенствомъ

$$9r^{9}(R^{2}+2r^{2})^{9}-12R^{2}r^{2}(R^{9}+4r^{9}) > 0$$

которое по сокращении на положительное количество 37° и по упрощении даетъ

Положивъ  $\frac{\mathrm{R}}{r}$  m, находимъ, что  $m^{\mathrm{s}}$  должно завлючаться между ворнями ур-нія

$$m^4 + 4m^9 - 12 = 0;$$

и какъ, сверхъ того,  $m^2$  д. б. >0, также какъ и m, находимъ, что должно быть

$$R \leqslant r \sqrt{2} \ldots \ldots \ldots (3).$$

При соблюденіи этого условія, корни ур-нія (1) дѣйствительны; но они и положительны, такъ какъ ихъ произведеніе и сумма положительны. Чтобы узнать, какъ расположено количество 2r по отношенію къ корнямъ, подставимъ въ первую часть ур-нія (1) 2r вмѣсто x. Найдемъ въ результатѣ  $4r^2(R^2+4r^2)-12r^2(R^2+2r^2)+12R^2r^2$  или,  $(R^2-2r^2)4r^2$ .

Но въ силу неравенства (3) заключаемъ, что первый множитель этого произведенія отрицателенъ, когда корни неравные; и обращается въ ноль при равныхъ корняхъ.

Этоть крайній случай означаєть, что 2r есть величина дъйствительныхъ равныхъ корней при условіи  $R = r\sqrt{2}$ . При дъйствительныхъ же неравныхъ корняхъ, 2r заключаєтся между корнями, сл. большій корень не соотвътствуєть вопросу, меньшій даєть отвъть на вопросъ: задача имъєть 1 ръшеніє:

$$x = r \cdot \frac{3(R^2 + 2r^2) - \sqrt{3(12r^4 - 4R^2r^2 - R^4)}}{R^2 + 4r^2} \cdot \dots \cdot (4)$$

619. Изслѣдованіе положенія сѣнущей плосности относительно центра шара. Съ эгою цѣлью опредѣлимъ знакъ, принимаемый первою частью ур-нія (1) при замѣнѣ х количествомъ r. Находимъ

$$r^2(7R^2 - 8r^2)$$
:

сл<sup>4</sup>д. пока  $7R^2 < 8r^2$ , рѣшеніе (4) меньше r, и потому сѣкущая илоскость и данная лежать по одну сторону отъ центра; если  $7R^2 - 8r^2 = 0$ , то x = r: сѣкущая илоскость проходить черезъ центръ; наконедъ, когда  $7R^2 > 8r^2$ , сѣкущая илоскость проходить надъ центромъ.

#### Задача XII.

**620.** Зная радіусь R шара и полную поверхность  $2\pi m^2$  вписаннаго вы него инлиндра, вычислить радіусь основанія и высоту цилиндра.

 $\Omega$  в ш в н і в. Обозначимъ буквою x радіусъ основанія, а 2y—высоту цилиндра; ур-нія задачи будутъ

$$x^2 + 2xy = m^2 \dots \dots (1)$$
  $x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2 \dots \dots (2)$ 

Изъ перваго имъемъ:

а подставляя эту величину y въ ур-ніе (2), им\*ьемъ

$$5x^4 - 2(m^2 + 2R^2)x^2 + m^4 = 0.$$
 (4)

отвуда 
$$x^2 = \frac{m^2 + 2R^2 \pm \sqrt{(m^2 + 2R^2)^2 - 5m^4}}{5} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (5)$$

Взявъ со знакомъ + корни ввадратные изъ второй части ур. (5), получимъ два значенія для x, а подставивъ ихъ въ формулу (3), найдемъ для каждаго изъ нихъ соотвътствующее значеніе y.

Изследовантв. Чтобы значенія x и y, выведенныя изъ ур-ній (3) и (5), давали отвёть на вопрось, необходимо, чтобы они были д'яйствительны, положительны и меньше R.

Чтобы значенія  $x^2$  были дів ствительны, должно быть

$$(m^2+2{
m R}^2)^2\!\geqslant\! 5m^4,$$
 нап  $m^2+2{
m R}^2\!\geqslant\! m^2\sqrt{5}\,,$ 

Когда это условіе удовлетворено, величины  $x^2$  будуть действительны; они будуть и положительны, ибо ихъ сумма и произведеніе положительны. Но чтобы какое-либо изъ значеній x отвічало на задачу, необходимо еще, какъ видно изъ ур-нія (3), чтобы оно было меньше m, для того чтобы соотвітствующее значеніе y само было положительно. Другихъ условій ність: ибо какъ скоро дійствительныя положительныя значенія x и y удовлетворяють ур-нію (2), въ силу этого уже величины эти меньше R.

Теперь необходимо опредѣлить, сколько значеній  $x^2$  содержится между О п  $m^2$ , а для этого подставниь  $m^2$  вмѣсто  $x^2$  въ первую часть ур-нія (4), какъ квадратнаго относительно  $x^2$ . Результать подстановки есть  $4m^2(m^2-R^2)$ . Должно прослѣдить измѣ-

ненія  $m^2$  отъ O до  $\mathbb{R}^2$ , п зат'ємь отъ  $\mathbb{R}^2$  до maximum'а  $m^2$ , равнаго  $\mathbb{R}^2$  .  $\frac{\sqrt{5+1}}{2}$  .

1.  $m^2 < \mathbb{R}^2$ . Въ такомъ случа $^4 4m^2(m^2 - \mathbb{R}^2) < 0$ ; сл $^4$ д, одно, и только одно, значение  $x^2$  меньше  $m^2$ , другое  $> m^2$ : задача им $^4$ еть одно р $^4$ шение; значение x, его дающее, таково:

$$x = \sqrt{\frac{m^2 + 2R^2 - \sqrt{(m^2 + 2R^2)^2 - 5m^4}}{5}}$$
.

 $m^2 = R^2$ . Результать указанной подстановки обращается въ ноль, а это значить, что одно изъ значеній x есть m или R; соотвітствующее значеніе y равно

нулю; цилиндръ обращается въ два свои основанія, сливающіяся съ большимъ кругомъ шара. Что касается другаго рѣшенія, то оно есть:  $x^2 = \frac{R^2}{5}$ , откуда

$$x = \frac{R\sqrt{5}}{5}$$
, a  $y = \frac{2R\sqrt{5}}{5}$ :

это — цилиндръ, подобный литру (иѣрѣ жидкостей). Это другое значеніе x получаємъ, замѣчая, что произведеніе двухъ значеній  $x^3$ , въ силу ур. (5), равно  $\frac{m^4}{5}$ , или, въ данномъ случаѣ,  $\frac{R^4}{5}$ .

III.  $R^2 < m^2 < R^3 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  · Въ этомъ случай  $4m^2(m^2-R^3) > 0$ , и слёд. или оба значенія  $x^2$  меньше  $m^2$ , или оба больше  $m^2$ ; но послёднее предположеніе невозможно, ибо произведеніе обонхъ значеній  $x^2$ , т. е.  $\frac{m^4}{5}$  меньше  $m^4$ . Заключаємъ, что когда  $m^2$  содержится между  $R^2$  и  $R^3$ .  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , задача всегда имбеть два решенія.

IV.  $m^2=\mathbb{R}^2\cdot \frac{\sqrt{5+1}}{2}$ , т. е. своей наибольшей величинё. Оба значенія  $x^2$  въ этомъ предёльномъ случає равны  $\frac{m^2+2\mathbb{R}^2}{5}$ , или, замёняя  $m^2$  его величиною, находимъ:  $x^2=\mathbb{R}^2\cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ , отвуда

$$x = R \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, 2y = 2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}};$$

полная же новерхность цилиндра  $= 2\pi R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , т. е. она равновелика боковой поверхности цилиндра, имѣющаго основаніемъ большой кругь даннаго шара, а высотою сторону правильнаго звѣзднаго десятнугольника, вписаннаго въ этоть кругъ.

V.  $m^2 > {
m R}^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , для x получаются минимыя значенія, слёд. задача невозможна.

Если теперь назовемъ полную поверхность цилиидра буквою S и помножимъ на  $2\pi$  предыдущім неравенства и равенства, можно все изследованіе резюмировать следующимъ образомъ.

# Резюме изслидованія.

*Примъчаніе*. Если въ ур-ніяхъ (1) и (2) перемѣнимъ y на — y, то легко видѣть, что ур-ніе (4) можно истолковать, полагая, что виѣсто полной поверхности

дилиндра дается разность между суммою его основаній и боковою поверхностью. Можно бы было повторить изслідованіе предыдущей задачи, называя різшеніями втораго рода — різшенія, отвітающія измізненной задачі.

#### Задача XIII.

**621.** Вычислить стороны прямоугольнаго треугольника, зная его периметръ 2р и сумму S гипотенузы и высоты.

P ть иг в н г в. Пусть будуть x и y — искомые катеты, z — гипотенуза, u — соотвётствующая высота. Ур-нія задачи будуть:

$$x + y + z = 2p;$$
  $z + u = S;$   $x^2 + y^2 = z^2;$   $xy = uz.$ 

Изъ перваго имъемъ:  $x^2 + y^2 + 2xy = (2p-z)^3 = 4p^2 - 4pz + z^2$ , пли, въ силу третьяго и четвертаго ур-ній:  $uz = 2p^2 - 2pz$ ; но u = S - z, сл.

$$z(S-z) = 2p^2 - 2pz$$
, where  $z^2 - (2p+S)z + 2p^2 = 0$ ...(1)

Найдя z, для опредёленія x и y получимъ ур-нія

$$x + y = 2p - z \quad \pi \quad xy = (S - z) \cdot z,$$

откуда видно, что x и y суть кории ур-нія

$$X^2 - (2p - z)X + (S - z)z = 0$$
 . . . . . (2)

Изследовантв. Чтобы корни ур-нія (1) были действительны, надо, чтобы  $(2p+S)^2-8p^2\geqslant 0$ , откуда

$$S \geqslant 2p(\sqrt{2}-1).$$

Пусть это условіе удовлетворено; тогда оба корня ур-нія (1) будуть и положительны, ибо ихь произведеніе  $(2p^3)$  и сумма (2p+8) положительны. Но большій корень должень быть отброшень; въ самомъ дёлё, высота u есть количество существенно положительное, а изъ ур-нія u=S-z видно, что для того, чтобы было u>0, необходимо, чтобы было z<S; но большій корень больше полусуммы корней, равной  $p+\frac{S}{2}$ , а само количество  $p+\frac{S}{2}$  больше S, ибо для возможности тре-

угольника, очевидно, необходимо, чтобы было  $p>\frac{S}{2}$ . Что касается меньшаго корня, то онъ будеть меньше  $S_s$  если результать подстановки S вмёсто  $\varepsilon$  въ первую часть ур-нія (1) отрицателень, что приводить къ неравенству

$$-2Sp+2p^2<0$$
 или  $S>p$ .

Какъ скоро это условіе удовлетворено, то будеть удовлетворено и условіе действительности корней, ибо

$$p > 2p(\sqrt{2}-1)$$
, han  $3 > 2\sqrt{2}$ , han  $9 > 8$ .

Итакъ, для в получается одно значеніе:

$$z' = \frac{2p + S - \sqrt{(2p + S)^2 - 8p^2}}{2}$$

съ условіемъ: p < S < 2p.

Условіе д'яйствительности корней ур-нія (2) есть:

$$(2p-z')^2-4(S-z')z'\geqslant 0, \quad \text{fig.} \quad 5z'^2-4z'(p+S)+4p^2\geqslant 0,$$

или, въ силу равенства (1),

$$5z'(2p+S)-10p^2-4z'(p+S)+4p^3\geqslant 0$$
, или  $(6p+S)z'-6p^2\geqslant 0$ ,

откуда

$$z' \geqslant \frac{6p^2}{6p+S}$$
.

Итакъ, чтобы x и y были дѣйствительны, необходимо, чтобы  $\frac{6p^2}{6p-S}$  было меньше меньшаго корня ур. (1); для этого же необходимо: 1) чтобы результатъ подстановки  $\frac{6p^2}{6p-S}$  вмѣсто s въ первую часть ур. (1) былъ > 0; и 2) чтобы приэтомъ  $\frac{6p^2}{6p-S}$  было < меньщаго корня, что въ свою очередь требуетъ, чтобы было  $\frac{6p^2}{6p-S} < \frac{2p+S}{2}$ . Подстановка даетъ:

$$36p^{4} - 6p^{2}(6p + S)(2p + S) + 2p^{3}(6p + S)^{2} = 36p^{4} - 24Sp^{3} - 4S^{2}p^{3} = 4p^{2}(9p^{2} - 6Sp - S^{2}),$$

этотъ результатъ д. б. > 0. Замѣтнвъ, что  $\frac{6p^2}{6p^2-S}$  въ самомъ дѣлѣ  $< \frac{2p^2-S}{2}$ , за-ключаемъ, что для дѣйċтвительности x и y должно быть удовлетворено неравенство  $-S^2-6Sp+9p^2>0$ ,

вытеть съ условіемь p < S < 2p.

Отсюда находимъ, что при  $S \le 3p(\sqrt{2}-1)$  x и y будуть дъйствительны; а замътивъ, что z' < p и S > p, находимъ, что сумма x - y, равная 2p - z' и произведене xy, равное (S - z')z', положительны, сл. x и y положительны.

Итакъ, условія возможности задачи таковы:

$$p < S < 2p$$
,  $S \ge 3p(\sqrt{2} - 1)$ .

Но  $3p(\sqrt{2}-1) < 2p$ , пбо это неравенство тождественно съ 18 < 25; слёд, условія, необходимыя и достаточныя для возможности задачи, приводятся въ:

$$p < S \le 3p(\sqrt{2} - 1),$$

причемъ задача имфетъ одно ришсије.

Отсюда, между прочимъ, завлючаемъ, что maximum  $S = 3p(\sqrt{2}-1)$ ; при этомъ x = y; слъд. изъ всъхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра равнобедренный имъетъ наибольную сумму гипотенузы съ соотвътствующего высотого.

# Задача XIV.

**622.** Вписать въ данный полукругь прямоугольникъ, знан сумму р его основанія и высоты.

P в ш е н г в. Пусть будуть: R — радіусь даннаго круга, 2x — основавіе и y высота искомаго прямоугольника; им'ємъ непосредственно ур-вія:

$$y + 2x = p$$
. . . . (1)  $x^2 + y^2 = R^2$ . . . . (2)

Рѣшая первое относительно у, имѣемъ:

Подставляя это выражение y въ ур-ние (2), найдемъ:

$$5x' - 4px + p^2 - R^2 = 0.$$
 . . . . . . . . . (4)

Затемь y вычисляется по формуле (3).

Изслъдованив. Въ этой задачѣ будемъ разсматривать и отрицательныя значенія x и y. Когда x и y будуть положительны, будемъ называть рѣшеніе — рѣшеніемъ перваго рода; оно будеть втораго рода, если при x < 0 будеть y > 0, т. е. когда дана будеть разность между высотой и основаніемъ; наконецъ, рѣшеніемъ третьяго рода называемъ то, когда x > 0, а y < 0, т. е. когда дана разность между основаніемъ и высотою.

Условіе действительности х выражается неравенствомъ

$$p \leqslant R\sqrt{5}$$
.

Затъмъ, изъ ур-нія (4) видимъ, что оба значенія x будутъ положительны, или

одно положительно, а другое отрицательно, смотря по тому, будеть-ли p больше, или меньше R. Съ другой стороны, изъ формулы (3) заключаемъ, что положительному x будеть соотвётствовать положительный y, когда  $x<\frac{p}{2}$ , и отрицательный y, когда  $x>\frac{p}{2}$ . Въ такомъ случав, нужно знать результать подстановки  $\frac{p}{2}$  вмёсто x въ первую часть ур-нія (4). Этотъ результать  $\frac{p^2-4R^2}{4}$ ; слёд. надо различать три случая: p<2R, p=2R, p>2R (послёдній случай возможенъ, пбо 2R меньше  $R\sqrt{5}$ ).

Итаеъ, количества, подлежащія разсмотрѣнію, въ порядкѣ возрастающихъ величнъ, таковы: R, 2R,  $R\sqrt{5}$ ; мы должны измѣнять p: отъ O до R, отъ R до 2R, и наконецъ отъ 2R до  $R\sqrt{5}$ .

I. p < R. Произведеніе корней ур-нія (4) отрицательно, сл. одно значеніе x положительно, другое отрицательно. Отрицательной величин $\hat{x}$  соотв $\hat{b}$  тстууеть положительное значеніе  $\hat{y}$ ; сл $\hat{b}$ д. всегда им $\hat{b}$ ем $\hat{b}$  р $\hat{b}$ шеніе 2-го рода. Положительное значеніе  $\hat{x}$  больше  $\frac{p}{2}$ ; въ самомъ д $\hat{b}$ л $\hat{b}$ , p, будучи меньше R, меньше и 2R, сл $\hat{b}$ д. количество  $\frac{p^2-4R^2}{4}$  отрицательно: это значить, что  $\frac{p}{2}$  заключается между корнями ур. (4), а потому отрицательный ворень д. 6.  $< \frac{p}{2}$ , а положительный больше. Такимъ образомъ, положительному x соотв $\hat{b}$ тствуеть, въ силу ур. (3), отрицательное значеніе y. Сл $\hat{b}$ д. им $\hat{b}$ ем $\hat{b}$ еменіе 3-го рода. Итакъ: при p R задача им $\hat{b}$ еть два р $\hat{b}$ шенія: одно 2-го рода, другое 3-го рода.

II. p = R. By этому случав

$$x = 0$$
,  $y = R$ ;  $x = \frac{4}{5}R$ ,  $y = -\frac{3}{5}R$ .

Первое ръшеніе можемъ разсматривать, какъ ръшеніе 1-го или 2-го рода; второе — ръшеніе 3-го рода. Этотъ случай относится къ первому, но его можно отпести и къ слъдующему.

III.  $R . Оба корня ур-нія (4) положительны, но какъ <math>\frac{p^2-4R^2}{4}$  отрицательно, одинъ изъ корней меньше, другой больше  $\frac{p}{2}$ . Первому соотвѣтствуетъ положительное значеніе y, второму — отрицательное. И такъ; одно рѣшеніе относится къ 1 му роду, другое къ 3-му.

IV. p=2R. Оба значенія x положительны, но количество  $\frac{p^2-4$ R2 обращается

въ ноль, слёд. одно значеніє x равно  $\frac{p}{2}$  или R, а соотвётствующее значеніе y равн. нулю. Другое значеніе x,  $\frac{3}{10} p$  или  $\frac{3}{5} R$  найдемъ, вычтя  $\frac{p}{2}$  изъ суммы корней  $\frac{4}{5} p$ , а для соотвётствующаго значенія y находимъ  $\frac{4}{5} R$ . Итакъ, имѣемъ два рѣшенія, изъ копхъ второе будетъ 1-го рода, между тѣмъ какъ первое можно отнести, по произволу, или къ 1-му или къ 3-му роду.

V. 2R . Въ этомъ случав оба значенія <math>x положительны, и оба меньше  $\frac{p}{2}$ . Въ самомъ двлв, сумма корней, равная  $\frac{4}{5}p$ , меньше p, слвд. оба корня не могутъ быть больше  $\frac{p}{2}$ , и какъ количество  $\frac{p^2-4R^2}{4}$  положительно, они необходимо меньше  $\frac{p}{2}$ . Въ такомъ случав положительнымъ значеніямъ x соотвътствуютъ и положительные y-ки: имвемъ два рвшенія 1-го рода.

VI.  $p = R\sqrt{5}$ . Имфемъ двойное ръшеніе 1-го рода.

Нельзя брать  $p>\mathrm{R}\sqrt{5}$  , нбо тогда оба значенія x дёлаются минимими, и задача невозможна.

#### Резюме изслъдованія.

Измънения $p$ .							Число ръшеній:				
								1-	го рода;	2-го рода;	3-го рода.
$p < \mathrm{R}$ .									0	1	1
p = R.										1	1
$R .$						•		•	1	0	1 .
p=2R.	٠	•		•		•		4	1	0	1
$2{\rm R}$				٠			•	•	2	0	0
$p = R\sqrt{5}$	•			•	•			•	1	0	0
$p > R\sqrt{5}$	•			•		٠			0	0	0

### Задача XV.

**623.** Вычислить стороны прямоугольнаго треугольника, зная его периметръ 2р, если притомъ извъстно, что сумма объемовъ, образуемыхъ треугольникомъ при обрашении его поочередно около каждаго катета, равновелика полушару радјуса R.

Ръшентв. Пусть будуть x и y — катеты, z — гипотенуза; непосредственно имъемъ 3 ур-нія:

$$x+y+s=2p$$
;  $xy(x+y)=2R^3$ ;  $x^2+y^2=z^2$ .

Легко исключить изъ этихъ ур-ній x и y; для этого выводимъ изъ 1-го и 2-го x + y и xy черезъ  $\varepsilon$ ; имъемъ

$$x+y=2p-z; \quad xy=\frac{2{\bf R}^3}{2p-z}.$$
 Отсюда имћемъ:  $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2p-z)^2-\frac{4{\bf R}^3}{2p-z}.$ 

Вставляя это выражение  $x^2 + y^2$  въ третье ур. системы, находимъ

$$z^2 = (2p-z)^2 - \frac{4R^3}{2p-z}$$
, with  $pz^3 - 3p^2z + 2p^3 - R^3 = 0$ . . (1)

Итакъ, для опредъленія z имѣемъ ур-ніе (1), квадратное относительно z. Опредъливъ z, можемъ вычислить x и y; въ самомъ дѣлѣ, зная, что сумма x+y=2p-z, а произведеніе  $xy=\frac{2R^3}{2p-z}$ , найдемъ эти неизвѣстныя изъ ур-нія

$$X^{2} - (2p - \epsilon)X + \frac{2R^{3}}{2p - \epsilon} = 0 \dots (2)$$

Изслъдовантв. Чтобы система опредъленных в такимъ образомъ величинъ x, y и z отвъчала задачь, необходимо и достаточно, чтобы эти величины были дъйствительны и положительны.

Чтобы корни ур-иія (2) были дійствительны, необходимо, чтобы

$$(2p-z)^2 \geqslant \frac{8R^3}{(2p-z)};$$

а чтобы они были положительны, необходимо, чтобы быль

$$2p-\varepsilon>0$$
, whehere  $\varepsilon<2p$ .

Пусть это последнее условіе удовлетворено; въ таком'я случай, умножнять обычасти предыдущаго нерявенства на положительное количество 2p-z, найдемъ:  $(2p-z)^3 \geqslant 8\mathrm{R}^3$ , или, извлекая изъ объихъ частей кубичный корень, имъемъ:  $2p-z \geqslant 2\mathrm{R}$ , или  $z \leqslant 2(p-\mathrm{R})$ ; и какъ z должно быть положительно, необходимо, чтобы

$$0 < z \leqslant 2(p - R)$$
.

а это предполагаеть, чтобы было p>R. Какъ скоро s меньше или равно 2(p-R), оно и подавно будетъ меньше 2 p, и условіе s<2p будетъ удовлетворено. Итакъ, число рѣшепій задачи равно числу корней ур-нія (1), удовлетворяющихъ условіямъ

$$0 < z \leqslant 2(p - R)$$
.

Нетрудно уб'ёдиться, что вории ур-нія (1) всегда д'ёйствительны; а вакъ предполагается R < p, то они и положительны. Остается изсл'ёдовать, сколько этихъ корней заключается между 0 п 2(p-R). Для этого нужно знать величины нервой части ур-нія (1) при z=0 и z=2(p-R). При z=0, она даеть  $2p^3-R^3$ величину положительную. Подстановка 2(p-R) вм'ёсто z даетъ

- 
$$(R^2 - 4pR + 3p^2)$$
, или -  $[R - p(2 - \sqrt{2})][R - p(2 + \sqrt{2})]$ .

Итавъ, нужно разсмотръть три случая:

$$0 < R < p(2 - \sqrt{2}); \quad p(2 - \sqrt{2}) < R < p; \quad R > p.$$

- 1. Пусть:  $0 < R < p(2-\sqrt{2})$ . Въ такомъ случай результатъ подстановки вм. z выраженія 2(p-R) отрицателенъ, а потому одинъ изъ корпей ур-нія (1) заключается между 0 и 2(p-R), другой корень больше 2(p-R). Первый корень даетъ искомое рѣшеніе, второй не соотвѣтствуетъ вопросу: задача имѣетъ 1 рѣшеніе. Это рѣшеніе мы получимъ, взявъ для z меньшій корень ур-нія (1), а для x и y корин ур-нія (2), когда въ немъ z замѣненъ меньшимъ корнемъ ур-нія (1).
- II. Когда  $p(2-\sqrt{2})<\mathrm{R}< p$ , то при  $z=2(p-\mathrm{R})$  триномъ ноложителенъ, и слъд, или оба корня ур-нія (1) заключаются между 0 и  $2(p-\mathrm{R})$ , или оба больше  $2(p-\mathrm{R})$ . Чтобы оба корня содержались между 0 и  $2(p-\mathrm{R})$ , иужно, чтобы ихъ полу-

сумма  $\frac{3}{2}$  p была < 2(p-R), т. е. чтобы 3p < 4(p-R), нли  $R < \frac{p}{4}$ , условіє, несогласное съ положеніємъ  $R > p(2-\sqrt{2})$ . Итакъ, въ данномъ случат оба корня ур-нія (1) больше 2(p-R), и ни тотъ, ни другой не даютъ рѣшенія.

III. Если  ${
m R}>p$ ,, то уже вид ${
m 5}$ ли, что въ такомъ случа ${
m 5}$  задача невозможна.

#### Резюме изслыдованія.

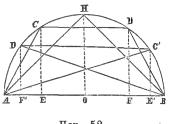
- 1.  $R < p(2-\sqrt{2})$ : Задача имбеть 1 рып, (z = меньшему корню ур-нія (1)).
- 2.  $R = p(2 \sqrt{2})$ : " 1 " (z = 2(p R)), треугольникъ равнобедренный).
- 3.  $R > p(2 \sqrt{2})$ : Задача невозможна.

#### Задача XVI.

**624.** Въ данный полукругь діаметра AB = 2R вписать хорду CD, параллельную AB, такт чтобы  $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = m^2$ , гдо m -данная линія.

Это ур-ніе, выведенное для одного случая, приложимо ко всёмъ случаямъ. Въ самомъ дёлё, пусть хорда СD приняла положеніе С'D', въ которомъ точки С' и D' лежатъ въ другихъ четвертяхъ: обозначая, какъ и прежде, прямую AC' букво x, будемъ имёть: C'D' = 2AE' - 2R; а какъ  $AE' \times 2R = AC'^2$ , то  $C'D' = \frac{x^2}{R} - 2R$ ; ур-ніе будеть въ этомъ случаё

$$2x^{2} + \left(\frac{x^{2}}{R} - 2R\right)^{2} = m^{2}$$



Чер. 52.

оно тождественно съ (1). Даемъ ему видъ

$$x^4 - 2R^2x^2 + R^2(4R^2 - m^2) = 0$$
 . . . . . . (2)

Изслъдование. Для изследованія и решенія этого биквадрагнаго ур-нія, полагаемъ

такъ что ур-ніе будетъ

$$y^2 - 2R^2y + R^2(4R^2 - m^2) = 0$$
 . . . . . . . (4)

Для того, чтобы корень ур-нія (2) служиль отвітомь на предложенную задачу, необходимо и достаточно, чтобы было

$$x$$
 15 hctb.,  $x > 0$ ,  $x < 2$ R. . . . . . (5)

Но для полученія корней ур-нія (2) нужно рёшить (4) и найденные корни внести поочередно въ (3); отсюда видно, что x будеть дёйств., если y будеть дёйств. и положительно; поэтому нужно изслёдовать съ этой точки эрёнія корни ур-нія (4).

Въ виду этого изследование распадается на три случая.

Первый случай.  $m^2 < 3$ R2. Кории ур-нія (4) будуть миними, а потому будуть миними и кории ур-нія (2), и задача будеть невозможна.

Второй случай.  $m^2=3R^2$ . Корни ур-нія (4) въ этомъ случав — двиствительные равные; ихъ общая величина  $=R^2$ ; слёд. ур-ніе (2) имветь два корня равныхъ +R и два корня равныхъ -R. Изъ нихъ x=+R отвечаеть на задачу, нбо +R-двиствительно, положительно и <2R. Искомая фигура представляеть въ этомъ случав правильный полу-шестиугольникъ.

Слъдуетъ замътить, что сумма трехъ квадратовъ, равная въ данномъ случа $3R^2$ , представляетъ minimum, нбо мы видъли, что она не можетъ быть меньше  $3R^2$ , но дълается равною  $3R^2$  при x = R. Слъд. сумма квадратовъ mpexъ разсматриваемыхъ хордъ импетъ  $minimum = 3R^3$ , когда фигура, ими образуемая, есть правильный полу-шестіугольникъ.

Третій случай.  $m^2 > 3R^2$ . При этомъ условіи корни ур-нія (4) — дъйствительные и неравные; изследуемъ ихъ знави: ихъ произведеніе  $= R^2(4R^2 - m^2)$ , и потому имъетъ знавъ разности  $4R^2 - m^2$ , т. е. будетъ >, =, или < 0, смотря потому, будетъ-ли  $m^2 <$ , =, или  $> 4R^2$ , что совмъстимо съ случаемъ  $m^2 > 3R^2$ . Итакъ, различаемъ три случая:

 $m^2 > 3\mathrm{R}^2 \left\{egin{array}{l} m^2 < 4\mathrm{R}^2 \ m^2 = 4\mathrm{R}^2 \ m^2 > 4\mathrm{R}^2. \end{array}
ight.$ 

I.  $3R^2 < m^2 < 4R^2$ . Ур-ніе (4) имѣетъ въ этомъ случай корни дѣйств. и положительные, ибо ихъ произведеніе и сумма положительны; а потому четыре корня ур-нія (2) дѣйствительны, и слѣд. это ур. имѣетъ два положительныхъ корня. Но еще нужно, чтобы эти корни были < 2R, или чтобы ихъ квадраты были  $< 4R^2$ ; но эти квадраты сутъ корни ур-нія (4), а оно имѣетъ положительные корни, составляющіе въ суммѣ  $2R^2$ , слѣд. каждый изъ нихъ меньше  $2R^2$ .

Итакъ, въ данномъ случав задача имветъ два решенія

$$x = \sqrt{R^2 \pm R \sqrt{m^2 - 3R^2}}$$
.

II.  $m^2 = 4R^2$ . Произведеніе корней ур-нія (4) равно нулю, слёд. одинъ корень = 0, а другой равенъ суммё ихъ, т. е.  $2R^2$ ; слёд. ур. (2) имёетъ два корня равныхъ 0, и два корня равныхъ  $\pm R \sqrt{2}$ ; другими словами, задача имёетъ 2 рёшенія

$$x'=0$$
,  $x''=R\sqrt{2}$ ,

изъ конхъ первое даетъ діаметръ 2R, а другое полупериметръ вписаннаго ввадрата AHB.

III.  $m^2 > 4 R^2$ . Ур. (4) имѣетъ кории съ противоположными знаками; изъ нихъ только положительный даетъ дѣйствительныя значенія для x; слѣд. ур. (2) имѣетъ въ данномъ случаѣ два кория миммыхъ и два дѣйствительныхъ.

Положительный корень дасть отвёть на задачу, если будеть < 2R, или если его квадрать  $< 4R^2$ ; чтобы это имёло мёсто, необходимо и достаточно, чтобы результать подстановки  $4R^2$  вмёсто x въ первую часть ур-нія (4) быль положителень, т. е. чтобы  $16R^4-2R^2\cdot 4R^2+R^2(4R^2-m^2)\geq 0$ , или

условіе, совмѣстимое съ положеніємъ  $m^2 > 4 R^2$ ; такимъ образомъ разбираемый случай распадается на 3 новыкъ:

$$m^2 > 4R^2 \left\{ egin{array}{l} m^2 < 12R^2 \\ m^2 = 12R^2 \\ m^2 > 12R^2. \end{array} \right.$$

1°.  $4R^2 < m^2 < 12R^2$ . Положительный корень ур-нія (2) отвѣчаеть на задачу, которая имѣеть одно рѣшеніе

$$x = \sqrt{R^2 + R \sqrt{m^2 - 3R^2}}$$
.

 $2^{0}$ .  $m^{2} = 12 R^{2}$ . — Въ этомъ случав положительный корень ур-нія (4) равенъ  $4 R^{2}$ ; слёд.

$$x = 2R$$
:

это—пред $\pm$ льный случай задачи: контуръ, квадраты сторонъ котораго им $\pm$ ютъ сумму  $12R^2$  есть ABAB.

 $3^{\circ}$ .  $m^2 > 12 R^2$ . — Положительный ворень ур-нія (4) будеть  $> 4 R^2$ , и сл'єд. положительный корень (2) не соотв'єтствуеть задач'є, которая становится невозможнюю. Итавъ: maximum суммы трехъ ввадратовъ  $\equiv 12 R^2$ .

#### Резюме изслъдованія.

**625.** Изслѣдованіе суммы трехъ квадратовъ. — Для суммы  $m^2$  трехъ квадратовъ мы нашли (2) выраженіе:

$$m^2 = \frac{1}{R^2} \left[ x^4 - 2R^2 x^2 + 4R^4 \right],$$

представляющее биквадратный триномъ, который изследовать мы умёсмъ при измёненіи x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$ ; след. мы можемъ проследить его измёненія при измёненіи x отъ 0 до 2R, какъ требуетъ геометрическій вопросъ, и этимъ путемъ найдемъ въ болёе сжатой формё результаты предыдущаго изследованія. Для этого представимъ  $m^2$  въ видё:

$$m^2 = \frac{1}{R^2} \left[ (x^2 - R^2)^2 + 3R^4 \right].$$

Отсюда прямо видно, что когда x возрастаеть оть 0 до R,  $x^2-R^2$  уменьшается оть  $R^4$  до 0, в след.  $m^2$  уменьшается оть  $4R^2$  до  $3R^2$ ; при дальнейшемъ возрастани x оть R до 2R,  $(x^2-R^2)^2$  возрастаеть оть 0 до  $9R^4$ , и след.  $m^2$  увеличивается оть  $3R^2$  до  $12R^2$ ; иначе говоря,  $m^2$  проходить черезь minimum  $3R^2$ , когда x=R.

. Эти результаты резюмированы въ следующей таблице:

$$x \mid 0 \dots < \dots R \dots < \dots R \sqrt{2} \dots < \dots 2R.$$
 $m^2 \mid 4R^2 \dots > \dots 3R^2 \dots < \dots 4R^2 \dots < \dots 12R^2.$ 

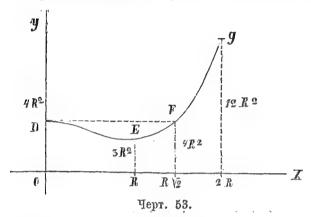
Величина  $m^2$  измѣняется, уменьшаясь отъ  $4R^2$  до  $3R^2$ , затѣмъ увеличивается до  $12^2R$ ; слѣд. она принимаетъ два раза всякое значеніе, содержащееся между  $3R^2$  и  $4R^2$ : разъ при x, содержащемся между 0 и R, другой разъ при x, лежащемъ между

R и  $R\sqrt{2}$ ; и одинъ разъ всякое значеніе, содержащееся между  $4R^2$  и  $12R^2$ . Это значитъ, что задача певозможна, когда данное  $m^2$  меньше  $3R^2$ , или больше  $12R^2$ , что она имъ́етъ 1 рѣшеніе, когда  $m^2$  содержится между  $12R^2$  и  $4R^2$ , и имъ́емъ 2 рѣшенія, когда  $m^2$  заключается между  $4R^2$  и  $3R^2$ . Это—результаты предыдущаго изслѣдованія, но представленные въ сжатой формъ́.

Изобразимъ графически измѣненія  $m^2$ , представляя величины x прямыми, откладываемыми на оси x'x отъ точки 0, а величины  $m^2$  нанося на перпендикуляры паралые ОУ. Такимъ образомъ получимъ кривую DEFG, изображающую измѣненія  $m^2$ .

На ней видно, что:

1) Для опредёленія величины  $m^2$ , соотвётствующей данному значенію x, доста-



точно нанести x на ось ОХ оть точки О, и взять ординату кривой, соотвётствующую полученной точкё.

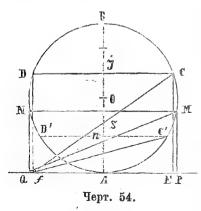
2) Чтобы найти величину x, соотвётствующую данной величинё m², достаточно пересёчь кривую параллелью къ ОХ, отстоящею отъ ОХ на m², и взять абсинссы точекъ пересёченія кривой съ парадлелью.

Такимъ образомъ легко видъть, что задача не имъетъ

Ръменій, когда  $m^2$  меньше  $3R^2$ , или больше  $12R^2$ , что получаются двъ точки встръчи, слъд. и два ръменія, когда  $m^2$  содержится между  $3R^2$  и  $4R^3$ , и наконець одна точка встръчи, или только одно ръменіе, когда  $m^2$  содержится между  $4R^2$  и  $12R^2$ .

### Задача XVII.

**626.** Дана окружность 0 и къ ней касательная въ точкъ A. Провести хорду MN параллельно этой касательной такъ, чтобы прямоугольникъ MNPQ имълъ діагональ MQ данной длины m.



Рышенте. — Примемъ за неизвёстное разстояніе AS = x искомой хорды отъ точки A, и замётниъ, что это неизвёстное можетъ имёть только величину положительную, не большую 2R.

Изъ прямоугольнаго треугольника MQP на-

ходимъ: 
$$\overline{MQ} = \overline{MP}^2 + \overline{PQ}^2$$

Но  $PQ = 4MS = 4 \times SA \times SB = 4x(2R-x);$  подстановка даеть:  $x^2 + 4x(2R-x) = m^2$ . Это уравніе совершенно общее, ибо выраженіе для  $\overline{PQ}$  остается одинаковымь, каково бы ни было положеніе хорды MN. Итакъ, ур-ніе задачи будеть  $3x^2 - 8Rx + m^2 = 0$  . . . (1)

Изслъдование. — Чтобы корень этого ур-нія даваль рёшеніе геометрическаго вопроса, необходимо и достаточно, чтобы онъ быль дёйствителень, положителень и не больше 2R.

Условіе д'виствительности корней ур-нія (1) выражается неравсиствомъ

$$16R^2 - 3m^2 \geqslant 0$$
, han  $m^2 - \frac{16R^2}{3} \leqslant 0$ . . . . . (2)

Корни этого неполнаго квадратнаго тринома суть:  $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$ , слёд., чтобы удовлетворить неравенству (2), необходимо и достаточно дать m значеніе внутри интервадла

между 
$$-\frac{4R\sqrt{3}}{3}$$
 и  $+\frac{4R\sqrt{3}}{3}$ ;

но какъ въ данномъ вопросѣ m положительно, то необходимо и достаточно, чтобы было  $m \leqslant \frac{4 \mathrm{R} \sqrt{3}}{3}$ .

Итакъ, нужно различать три случая:

$$m > \frac{4R\sqrt{3}}{3}$$
,  $m = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$ ,  $m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$ .

Первый случай.  $m>\frac{4\mathrm{R}\,\sqrt{3}}{3}$ . Корин ур-нія (1) будуть мнимме: задача невозможна.

Второй случай.  $m=\frac{4 \, \mathrm{R} \, \sqrt{3}}{3}$ . Ур. (1) ниветь вории действительные равные; общая величина ихъ  $=\frac{4}{3} \, \mathrm{R}$ : она положительна и  $< 2 \, \mathrm{R}$ , след. задача имееть 1 решеніе. Завлючаємь, что длина m діагонали не м. б.  $> \frac{4 \, \mathrm{R} \, \sqrt{3}}{3}$ , но можеть достичь этого предёла, который и есть ен maximum, и что прямоугольникь, имеющій діагональ махімим, получаєтся проведеніємь хорды CD въ разстояніи  $\mathrm{AJ} = \frac{4}{3} \, \mathrm{R}$  оть точки  $\mathrm{A}$ .

**Третій случай.**  $m < \frac{4 \mathrm{R} \sqrt{3}}{3}$ . Въ этомъ случав ур. (1) имветъ кории двйствительные неравные. Но чтобы корень ур-віл (1) отввчалъ на геометрич. вопросъ, нужно чтобы онъ былъ положителенъ и не больше  $2 \mathrm{R}$ .

Но дъйствительные корни ур-нія (1) оба положительны, пбо ихъ произведеніе  $\frac{m^2}{3}$  п сумма  $\frac{8\mathrm{R}}{3}$  положительны. А чтобы они оба были меньше  $2\mathrm{R}$ , необходимо и достаточно, чтобы: 1) триномъ  $3x^2-8\mathrm{R}x-m^2$ , по замънъ въ немъ x количествомъ  $2\mathrm{R}$ , имълъ знакъ одинаковый съ коэффиціентомъ при  $x^2$ , т. е. былъ бы положителенъ; и 2) чтобы сумма корней ур. (1) была меньше  $4\mathrm{R}$ .

Второе условіе удовлетворено, ибо сумма корией  $=\frac{8}{3}$  R.

Итакъ, чтобы задача нийла  $d\theta a$  рёшенія, необходимо и достаточно, чтобы  $12R^2-16R^2+m^2\geqslant 0$ , или  $m^2-4R^2\geqslant 0$ , или  $(m+2R)(m-2R)\geqslant 0$ , а какъ m>0, то необходимо и достаточно, чтобы было

$$m > 2R$$
.

Ho мы имъемъ условіе:  $m<rac{4 ext{R}\sqrt{3}}{3}$ ; слъд. нужно сравнить  $2 ext{R}$  съ  $rac{4 ext{R}\sqrt{3}}{3}$ , что-

бы уб'ёдиться, совм'ёстны-ли эти условія. Но легко вид'єть, что  $\frac{4R\sqrt{3}}{3}>2R$ : а потому разбираємый случай подразд'ёляется на три новыхъ:

$$m > 2R$$
,  $m = 2R$ ,  $m < 2R$ .

I.  $2R < m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$ : корни ур-нія д'яйствительны, положительны и меньше 2R. Сл'яд, задача им'яєть *два рышенія*:

$$x' = \frac{4R + \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3}, \quad x'' = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3},$$

дающія двѣ точки на AB, равноотстоящія отъ I, пбо  $\frac{x'+x''}{2}$  — AI.

11. m=2R: неравенство m > 2R становится равенствомъ, и слѣд. 2R есть корсиъ ур-нія (1); другой корень  $=\frac{8}{3}R-2R=\frac{2}{3}R$ . Оба рѣшенія удовлетворяютъ задачѣ: одна искомая хорда касательна въ точкѣ В; другая проходитъ черезъ точку H, симметричную точкѣ I относительно центра.

III. m < 2R, неравенство  $m \gg 2R$  не удовлетворяется, и триномъ (1) становится отрицательнымъ по замѣнѣ x количествомъ 2R. Это значить, что одинъ корень < 2R, другой > 2R. Меньшій корень одинъ удовлетворяетъ вопросу и задача имѣетъ 1 рѣшеніе:

$$x = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3}$$
.

### Резюме изслыдованія.

$$m>rac{4{
m R}\sqrt{3}}{3};$$
 корни мнимые. . . . . . . . . . . . . . . 0 рёшевій  $m=rac{4{
m R}\sqrt{3}}{3};$   $x'=x''=rac{4{
m R}}{3},$  maximum  $(m)$ . . . . . . 1 рёшевіё  $m<rac{4{
m R}\sqrt{3}}{3}$   $\begin{cases} m>2{
m R}: & x'$  и  $x''$  дёйств., полож., и  $<2{
m R}.$  2 рёшенія  $m=2{
m R}: & x'=2{
m R}, & x''=rac{2}{3}{
m R}.$  . . . . . 2 рёшенія  $m<2{
m R}: & x'<2{
m R}, & x''>2{
m R}.$  . . . . . 1 рёшеніе.

# 627. Прямое изследованіе длины діагонали. — Ур. (1) даеть

$$m^2 = -3x^2 + 8Rx$$
 . . . . . . . . (3).

Вторая часть есть квадратный триномъ, измѣненія котораго мы изучать умѣемъ. Намъ нужно прослѣдить его измѣненія, когда x возрастаетъ отъ 0 до 2R, и затѣмъ взять отъ полученныхъ величинъ ариеметич. квадратный корень. Для изслѣдованія удобнѣе  $m^2$  написать въ видѣ:

$$m^2 = -3 \left[ x^2 - \frac{8}{3} Rx \right], \text{ или } m^2 = -3 \left[ \left( x - \frac{4}{3} R \right)^2 - \frac{16}{9} R^2 \right].$$

Отсюда видно, что когда x возрастаеть отъ нуля до  $\frac{4}{3}$  R, количество  $m^2$  возрастаеть отъ нуля до  $\frac{16}{3}$  R<sup>2</sup>; затъмъ, когда x увеличивается отъ  $\frac{4}{3}$  R до 2R,  $m^2$  уменьшается до 4R<sup>2</sup>. Итакъ, имъемъ таблицу измъненій;

Отсюда непосредственно видно, что когда хорда MN перемѣщается отъ A до B, длина діагонали MQ возрастаеть до того момента, когда MN проходить черезь I, для которой  $AI = \frac{4}{3}$  R. Затѣмъ длина діагонали уменьшается до 2R, когда хорда движется къ B.

Діагональ принимаєть одинь разь всякую длину, содержащуюся между О и 2R, когда точка S перемѣщаєтся оть A къ H; напротивь она принимаєть два раза всякую величину, содержащуюся между 2R и  $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$ : одинь разь, когда точка S перемѣщаєтся оть H къ I, и другой разь, когда точка S пробѣгаєть отрѣзокъ IB; эти два положенія хорды симметричны относительно DC, ибо триномъ  $m^2$  береть равныя величины при  $x=\frac{4}{3}$  R  $\pm y$ . Такимъ образомъ, находимъ всѣ результаты прежняго изслѣдованія.

Чтобы графически представить измѣненія m при измѣненіи x отъ O до 2R, откладываемъ x на оси Ox, а соотвѣтствующія значенія m на оси OY, Напр. взявъ

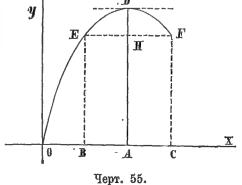
$$OA = \frac{4}{3} R$$
  $H$   $AB = AC = \frac{2}{3} R$ ,

наносимъ на ординатъ точки А

$$AD = \frac{4R\sqrt{3}}{3},$$

на ординатахъ точекъ В п С:

$$BE = CF = 2R$$
.



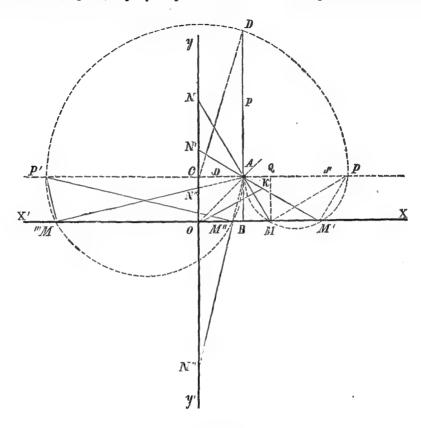
Такимъ образомъ получимъ дугу OEDF элипса, ординаты которой и представляютъ измѣненія діагонали m, соотвѣтствующія измѣненіямъ x отъ O до 2R.

### Задача XVIII.

**628.** Задача Паппуса. Дана точка  $\Lambda$  на биссектриссъ прямаго угла, составляемаго линіями XX' и YY'; провести черезъ эту точку прямую линію такъ, чтобы отръзокъ ея въ одномъ изъ четырехъ угловъ имълъ данную длину p.

Приводима эту задачу кака поучительный образець, выясняющій значеніе выбора неизвъстныхъ. Неръдко выбора неизвъстныхъ является дъломъ существенной важности: отъ него зависить полученіе ур-ній большей или меньшей сложности. Иной выборь можеть повести къ ур-нію биквадратному, иной—въ квадратному, наконець — къ полному ур-нію четвертой степени. Какъ скоро взятое неизвъстное приводить къ ур-нію сложному, нужно поимтаться взять за неизвъстное другую величену, чтобы убъдиться, не приведеть ли новый выборь неизвъстнаго къ менъе сложному ур-нію.

629. Первый способъ. Легко видёть, что если задача имѣетъ решеніе МN въ угле ХОУ, то будеть имѣть и другое М'N', симметричное съ первымъ по отношенію къ ОА. Затемъ, задача всегда имѣетъ решеніе въ каждомъ изъ угловъ УОХ' и ХОУ'; въ самомъ деле, проведя прямую черезъ точки; А и О и поворачивая ее около точки



Черт. 56.

А, въ угл& YOX', зат&мъ въ XOY', видимъ, что ея отр&зокъ въ важдомъ изъ этихъ угловъ будетъ изм&виться отъ 0 до  $\infty$ .

Итакъ, при всякой величинъ линіп р задача необходимо питетъ 2 ръшенія—по одному въ каждомъ изъ угловъ YOX' и XOY'; къ этимъ двумъ ръшеніямъ, въ нъкоторыхъ случаяхъ, могутъ прибавиться еще два; слъд. задача можетъ интъ 4 ръшенія.

Слъд., если за неизвъстное примемъ такую величину, которой вначенія, относящіяся къ четыремъ ръшеніямъ, суть корни одного и того-же ур-нія, то получимъ ур. четвертой степени, ръшеніе котораго въ общемъ видъ намъ не извъстно.

Напр., примемъ за непзвъстное — разстояние отъ точки О до одной изъ точекъ: М, М' М", М"; пусть ОМ = x. Обозначимъ длину равныхъ периендикулировъ АВ и

АС буквою a; треуг. МОХ даеть:  $x^2 + \overline{OX} = p^2$ ; но изъ подобія треуг-въ МОХ и МВА имфемъ: OX : a = x : (x - a); отсюда ур-ніе:

Освободивъ его отъ знаменателя и развернувъ, убъдимся, что оно четвертой степени, полное и не возвратное. Въ немъ содержатся всъ четыре ръшения.

Во-первыхъ очевидно, что для съвущей М'N' получимъ тоже самое ур. (1), принявъ ОМ' = x. Для съвущей АМ"N", принявъ ОМ" = x, изъ треуг-въ ОМ"N" и АМ"В имъемъ:  $x^2 + ON'' = p^2$  и = ON'': a = x : -(a - x), откуда ОN" = ax : (a - x); внося эту величину въ предыдущее ур., получимъ опять ур. (1). Наконецъ, для съкущей АN""М", положивъ ОМ" = -x, имъемъ:  $x^2 + ON''' = p^2$  и ОN": a = -x: (-x+a) вли ОN": a = x : (x-a), съъд. снова получаемъ ур. (1).

Итакъ, при сдёланномъ выборё неизвёстнаго мы не достигнемъ рёшенія задачи. 630. Второй способъ. Взявъ за неизвёстное ВМ, найдемъ, ур-ніе

$$(x+a)^2 - \frac{a^2(x+a)^2}{x^2} = p^2 \dots \dots \dots (2)$$

которое выводится изъ (1) замѣною x количествомъ x+a; это ур. имѣетъ четыре кория: ВМ, ВМ', — ВМ" — ВМ"', нбо ур. (1)—общее.

Хотя здъсь мы опять получили полное биввадратное ур., тъмъ не менъе мы легко можемъ ръшить его слъдующимъ искусственнымъ пріемомъ. Ур. (2) можно написать въ видъ

$$x^2 + 2ax + a^2 + a^2 + \frac{2a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} = p^2$$
, или  $\left(x^2 + 2a^3 + \frac{a^4}{x^2}\right) + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2$ , или  $\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2 + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2$ ;

отсюда видно, что опо приводится въ рашенію двухъ ур-ній

$$x + \frac{a^2}{x} = y$$
 if  $y^2 + 2ay - p^2 = 0$ ,

пли

$$\begin{cases} x^2 - yx + a^2 = 0 \\ y^2 - 2ay - p^2 = 0 \end{cases} \dots \dots (3)$$

Итакъ, этотъ пскусственный пріемъ даеть решеніе задачи.

Посмотримъ, каково геометрическое значение вспомотательнаго неизвъстнаго y. Проведя перпендикуляръ MQ на линію AZ, параллельную OX, и возставивъ къ MN перпендикуляръ MP, замѣчаемъ, что PQ есть третья пропорціональная къ MQ и AQ = x; слѣд.

$$AP = AQ + QP = x + \frac{a^2}{x} = y.$$

Итакъ, вспомогательное неизвъстное, соотвътствующее ръшенію MAN, есть AP; точно также, для вспомогат. неизвъстнаго y, соотвътствующаго ръшенію N''M''', получили-бы (— AP'), возставивъ перпендикуляръ M''P' въ AM'''.

Ур-віе въ у системы (3) есть квадратное, слѣд. необходимо, чтобы величны у, относящіяся въ четыремъ возможнымъ рѣшеніямъ задачи, были попарно равны; и въ самомъ дѣлѣ, проведя М'Р, получимъ равные треугольники АМР и АМ'Р, пбо: АМ'— АМ по причипѣ симметричеости относительно ОА; затѣмъ треугольники АСМ и МРQ равны, какъ имѣющіе стороны перпецдикулярныя и по равной сходственной сторонѣ (AC = MQ), слѣд. MP = AM'; уголъ APM = PAM' ибо ихъ дополненія равны; итакъ, треугольники равны, имѣя по равному углу между порознь равными сторонами.

Отсюда слъдуеть, что перпендикуляры, возставленные въ М и М' къ прямымъ МN, М'N' проходять черезъ одну и туже точку Р линіи АZ, и что тоже самое относится къ перпендикулярамъ, возставленнымъ въ М" и М" къ М"N" и М"'N". Этимъ подтверждается вышеприведенное вычисленіе.

Для рѣшенія задачи достаточно знать точки P п P', ибо окружности, описанныя на діаметрахъ AP и AP', пересѣкаясь съ прямою XX', дадуть искомыя точки M,M', M''.

Эти точки дало-бы намъ рѣшеніе системы (3).

Итакъ, АР и АР' суть абсолютныя величины корней ур-нія

$$y^2 + 2ay - p^2 = 0$$
 . . . . . . . . . . . . (4)

Изследование. Корни этого ур-нія, какъ видно а'priori, действительные, перавные, по знаку противоположные.

I. Чтобы положительный корень y', который должень быть нанесень въ направленія AZ, даваль рѣшеніе задачи, необходимо, чтобы окружность діаметра AP встрѣчала прямую XX'. Но ен радіусь  $=\frac{y'}{2}$ , а разстояніе центра отъ XX' равно a; слѣд. необходимо, чтобы было  $y' \ge 2a$ ; а чтобы это имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы триномъ (4), при подстановкѣ 2a вмѣсто y, принималь отрицательное значеніе т. е. чтобы было

$$4a^2 + 4a^2 - p^2 \ge 0$$
, with  $p^2 - 8a^2 \ge 0$ .

Кории тринома  $p^2 - 8a^2$  суть  $\pm 2a\sqrt{2}$ , а какъ p — существенно положительно, то неравенство удовлетворяется при

$$p > 2a\sqrt{2}$$
.

Первый случай:  $p < 2a\sqrt{2}$ .

Въ углъ ХОУ нътъ ръшенія.

Второй случай:  $p=2a\sqrt{2}$ . Положительный ворень ур. (4) равень въ этомъ случав 2a; сл. обружность діаметра AP басается ОХ, точки М и М' сливаются: задача имьеть одно рышеніе въ углы ХОУ, и это рышеніе — перпендикулярь въ ОА. Въ этомъ, слыд, положеній отрызовъ МN въ углы ХОУ на прямой, проходящей черезъ А, имьеть minimum величины. Этоть результать легко объяснить геометрически. Пусть MAN = min. и пусть M'N' бабая либо сыбущая; очевидно, что AN' < AN и AM' > AM; а бабъ AM = AN, то AM' > AN', слыдов. средина линіи M'N' ниже A, напр. въ К. Соединивь О съ К, имыемь AN = M'N'; но AN = M'N', и очевидно AN = MN = MN, и очевидно AN = MN = MN = MN, и очевидно AN = MN = MN = MN, и очевидно AN = MN = MN = MN, и очевидно AN = MN = MN = MN

**Третій случай:**  $p>2a\sqrt{2}$ . Окружность пересъчеть линію ОХ въ двухъ точкахъ, и задача имъ̀етъ въ углъ̀ ХОУ два ръ̀шенія.

II. — Во-вторыхъ, чтобы отрицательный ворень y'', наносимый въ направленін AP', даваль рѣшеніе, необходимо и достаточно, чтобы окружность діаметра (-y'') встрѣчала XX', т. е. чтобы было:  $-\frac{y''}{2} > a$ , нли y'' < -2a; отсюда слѣдуетъ, что необходимо и достаточно, чтобы (-2a) содержалось между корнями ур. (4), или чтобы, замѣнивъ y количествомъ (-2a) въ триномѣ (4), получить отрицательный результатъ:  $4a^2 - 4a^2 - p^2 < 0$ , что всегда удовлетворяется. Слѣд. задача имѣетъ одпо рѣшеніе въ углѣ X'OY, и одно въ углѣ XOY', что согласно съ выводами предварительнаго изученія задачи.

### P e 3 10 M e.

$$p < 2a\sqrt{2}$$
 . . . . . . . . . 2 рѣшенія (XOY', X'OY).  $p = 2a\sqrt{2}$  . . . . . . . . 3 рѣшенія.  $p > 2a\sqrt{2}$  . . . . . . . . . 4 рѣшенія.

Постровние. — Сделаемъ построение для случая четырехъ решений.

Ур. (4) даетъ:

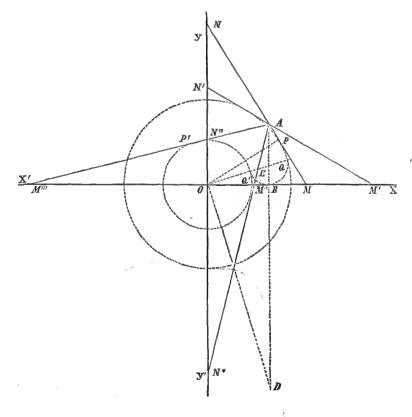
$$y' = \sqrt{a^2 + p^2} - a,$$
  
 $-y'' = \sqrt{a^2 + p^2} + a.$ 

На параллели въ ОУ (черт. 56) наносимъ  ${
m AD} \doteq p$ , отвуда  ${
m CD} = \sqrt{a^2+p^2}$ . Описавъ изъ С какъ изъ центра радіусомъ CD полуокружность, находимъ на  ${
m PP'}$  точки Р и Р', которыя и даютъ

$$AP = y'$$
,  $AP' = -y''$ .

Описавъ на AP и AP' полуокружности, получаемъ искомыя точки М, М', М" и М", которыми опредъляются искомыя прямыя: МАХ, М'АХ', АХ"М" и АМ""Х". — Повърка — циркулемъ.

631. Третій способъ.— Такъ какъ рёшенія задачи попарно симметричны относительно ОА. то заключаемъ, что точка О находится въ равномъ разстояніи отъ



Черт. 57.

двухъ симетричныхъ р $\pm$ шеній. Сл $\pm$ д. если за неизв $\pm$ стное принять разстояніе r точки О отъ этихъ двухъ р $\pm$ шеній, то ур. въ r будеть не выше второй степени.

Итакъ, пусть будеть OP = r (черт. 57) радіусь окружности центра O, касательной къ рѣщеніямъ въ угаѣ XOY; обозначивъ буквами x и y вспомогательныя неизвѣстныя OM и ON, получимъ три ур-нія:

Остается исключить изъ этихъ ур-ній x и y, чтобы получить ур. съ главнымь неизвъстнымь r. Для этого второе ур. нашишемь въ видъ: xy = a(x + y); возвысивъ объ его части въ квадратъ:  $(xy)^2 = a^2(x^2 + y^2 + 2xy)$  и замънивъ xy и  $x^2 + y^2$  ихъ величинами изъ двухъ другихъ уравненій, получимъ:

$$p^{2r^2} = a^2(p^2 + 2pr)$$
, with  $pr^2 - 2a^2r - pa^2 = 0$ . . . . . (6).

Чтобы убъдиться въ общности этого ур-нія, обозначимъ буквою r радіусъ OP' окружности центра O, касательной въ ръшеніямъ въ углахъ XOY' и X'OY. Обозначивъ буквами x и y количества OM', ON', найдемъ 3 ур-нія:

$$x^2 + y^2 = p^2$$
,  $\frac{y}{x} = \frac{u}{x + a}$ ,  $pr = xy$ .

Второе напишемъ въ видѣ xy = a(x-y), и преобразованіами, подобными вышеприведеннымъ, придемъ къ ур-нію

Это ур. отличается отъ (6) перемъною r на (-r); слъд. абсолютная величина отрицательнаго корня ур-нія (6), представляетъ радіусъ, дающій ръшенія въ углахъ ХОУ и ХОУ.

Изслъдовантв. — Итакъ, разсмотримъ, при какомъ условін корни ур-нія (6) дадуть искомыя ръменія.

Необходимо и достаточно, чтобы эти корин были дѣйствительны, а ихъ абсолютная величива не превышала  $OA = a\sqrt{2}$ ; ибо необходимо, чтобы изъ точки A можно было провести касательную къ окружности, имѣющей радіусомъ абсолютную величину того или другаго кория. Но ур. (6) имѣеть кории дѣйствительные, неравные и противоположные по зваку; сл., что касается положительнаго кория, то если овъ не больше  $a\sqrt{2}$ , то и дастъ искомое рѣшевіе; значить, если замѣнить r количествомъ  $a\sqrt{2}$  въ триномѣ (6), результать замѣны не долженъ быть отрицательнымъ, т. е. должно быть

$$2pa^2 - 2a^3\sqrt{2} - pa^2 > 0$$
, where  $p > 2a\sqrt{2}$ .

Отсюда: 1) если  $p < 2a\sqrt{2}$ , задача не имѣетъ рѣшеній въ углѣ ХОУ. 2) Если  $p = 2a\sqrt{2}$ , точка А будетъ находиться на окружности центра О и радіуса, равнаго положит. корню; слѣд. будетъ только одна касательная; это рѣшеніе, перпендикуляръ къ ОА, есть положеніе прямой МN, при которомъ отрѣзокъ въ углѣ ХОУ есть minimum. 3) Наконецъ, если  $p > 2a\sqrt{2}$ , точка А будетъ находиться виѣ окружности; существуютъ двѣ различныя касательныя, выходящія изъ этой точки, и слѣд. два рѣшенія въ углѣ ХОУ.

Чтобы отрицательному корию r'' соотвётствовали рёшенія задачи, необходимо и достаточно, чтобы абсолютняя величина (— r'') не превышала  $a\sqrt{2}$ , т. е.

$$r'' > -a \sqrt{2}$$

иными словами, необходимо и достаточно, чтобы триномъ (6) не быль отрицательнымъ при замѣнѣ r количествомъ —  $a\sqrt{2}$ , что даетъ

$$2pa^2 + 2a^3\sqrt{2} - pa^2 \geqslant 0$$
, when  $pa^2 + 2a^3\sqrt{2} \geqslant 0$ .

Но p и a положительны, след. это неравенство всегда верпо, т. с. всегда есть по одному решенію вы каждомы изы угловы XOY' и X'OY.

Построение. — Уравнение даеть

$$r = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + p^2 a^2}}{p} = \frac{a^2}{p} \pm \sqrt{\frac{a^4}{p^2} + a^2};$$

сябд. нужно построить радіусы:

$$r' = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2} + \frac{a^2}{p}; \quad -r'' = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2} - \frac{a^2}{p}.$$

Наносимъ на продолжени AB (черт. ) длину BD = p, проводимъ OD, и въточкѣ О возставляемъ перпендикуляръ OE къ OD; очевидно, что

EB = 
$$\frac{a^2}{p}$$
,

нбо OB = a. Слёд.  $OE = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2}$ ; а нотому, нанося EQ = EQ' = EB, имёнемъ: r' = OQ п -r'' = OQ'. Остается провести изъ точки А касательныя къ окружностямъ дентра O, проходящимъ черезъ точки Q и Q'.

631. Четвертый способъ. — Можно принять за вспомогательное неизвъстное сумму ОМ --- ОN; къ этому выбору приводить замъчаніе, что для двухъ положеній съкущей МN и М'N' величина этого неизвъстнаго одинакова, ибо треуг-ки ОМN, ОМ'N' равны. Слъд. для четырехъ положеній съкущей получится только два корня; и мы должны придти къ ур-нію второй степени.

Итакъ, пусть

$$OM + ON = x$$
....(1), sateme:  $OM^2 + ON^2 = p^2$ ....(2)  
Кроме того:  $\frac{OM}{ON} = \frac{a}{ON - a}$ , отвука  $\frac{OM + ON}{OM} = \frac{ON}{a}$ , а нотому

$$OM \times ON = (OM + ON) \cdot a$$
, when  $OM \cdot ON = ax \cdot \dots \cdot (3)$ 

Удвонвъ объ части (3) и придавъ ко (2), найдемъ въ первой части  $x^2$ , в ур-ніе будеть:  $x^2 = p^2 + 2ax$ , или

 $x^2-2ax-p^2=0 \ldots \ldots \ldots (4)$ 

Такое же ур-ніе получили бы, взявь за неизвѣстное OM' + ON'.

Легко видѣть, что это ур-віе пригодно и для двухъ другихъ положеній сѣкущей, только x тогда будеть выражать разности ON''' - OM''' и OM'' - ON''.

Какъ скоро x будетъ найдено, останется найти разность отрѣзковъ ON — ОМ; для этого удвоиваемъ (3) и результатъ вычитаемъ изъ (2); получимъ

$$ON - OM = \sqrt{p^2 - 2ax};$$
 отвуда  $p^2 > 2ax$ .

Найдя x, вносимъ его величину въ разность ON — ОМ, которая такимъ образомъ и будетъ извъстна; а какъ извъстна и сумма отръзковъ, то будетъ извъстенъ и каждый изъ нихъ.

Изслъдование. Нужно, чтобы разность эта была действительна. При отрицательномъ корие ур-нія (4) это и будеть безусловно; и въ самомъ деле, отрицательный корель соответствуеть случаю секущей, проведенной или въ угле УОХ' или въ ХОУ'. Итакъ, изследованію подлежить только положительный корень; онь должень быть  $<\frac{p^2}{2a}$ , след.  $\frac{p^2}{2a}$  должно заключаться внё корней (4), а для этого результать подстановки этого количества въ триномъ (4) долженъ быть положителенъ:

$$rac{p^4}{4a^2}-2a$$
 .  $rac{p^2}{2a}-p^2>0$ , или  $p^4-8a^2p^2>0$ , отвуда  $p>2a\sqrt{2}$ :

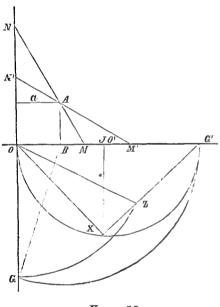
условіе, раньше найденное. Отсюда min  $p = 2a\sqrt{2}$ .

Постровите. Ръшивъ ур-ніе (4), найдемъ

$$x' = a + \sqrt{a^2 + p^2}$$
,  $x'' = \sqrt{a^2 - \frac{1}{1} - p^2} - a$ .

Пусть OG = p, то BG =  $\sqrt{a^2 + p^2}$ ; нанеся BG на 0x, получимъ:

$$OG' = a + \sqrt{a^2 + p^2} = x'$$
.  $Cxbz$ .  $OM - ON = \sqrt{p^2 - 2ax'} = \sqrt{p^2 - 2a \cdot OG'}$ .



Черт. 58.

Взявь ВІ $\equiv$ ОВ, на ОС' описываемъ полуокружность и проводимъ периендикуляръ ІХ, тогда ОХ  $\equiv \sqrt{2ax'}$ . Слъд. нанеся ОС на ОС:

$$ZX = \sqrt{OZ^2 - OX^2}$$
,  $ZX = \sqrt{p^2 - 2a \cdot OG'} = OM - ON$ .

Но ОМ + ОN = x' = OG'; слъд. если отъ среднны O' линіи OG' отложить въ объ стороны равныя длины  $\dot{O}'M = O'M' = \frac{ZX}{2}$ , найдемъ объ точки М и М', опредъляющія искомыя прямыя МАN и М'АN'.

Для отриц. корня построенія аналогичны этимъ.

632. Пятый способь. Можно принять за неизвёстное разность линій ОМ—ОN—х. Для другаго положенія сёкущей, второй корень будеть ОМ'—ОN', или ОМ—ОМ; опъ равенъ переому, но противоположенъ по знаку. Также и два остальные корня

равны и противоположны по знаку; слъд. корни попарно равны и противоположны по знаку, а потому этимъ способомъ должны придти къ биквадратному ур-нію.

Имѣемъ: OM - ON = x (1),  $OM^2 + ON^2 = p^2$  (2), и  $OM \times ON = a(OM + ON)$  (3); отсюда:  $2OM \times ON = 2a(OM + ON)$  и  $OM^2 + ON^2 - 2OM \times ON = p^2 - 2a(OM + ON)$ , слъд.  $x^2 = p^2 - 2a(OM + ON)$ , отвуда  $OM + ON = \frac{p^2 - x^2}{2a}$ . Зная же, что OM - ON = x, имѣемъ

$$OM = \frac{p^2 - x^2}{4a} + \frac{x}{2}, \quad ON = \frac{p^2 - x^2}{4a} - \frac{x}{2}.$$

Внеся эти величины въ ур. (2), получимъ

$$(p^2 + 2ax - x^2)^2 + (p^2 - 2ax - x^2)^2 = 16a^2p^2$$

или, распрывъ скобки и приведя въ порядокъ:

$$x^4 + 2(2a^2 - p^2)x^2 + p^2(p^2 - 8a^2) = 0$$

Чтобы корни  $x^2$  этого ур-нія были д'яйствительны, необходимо, чтобы было:  $(2a^2-p^2)^2-p^2(p^2-8a^2)>0$ , или  $4a^4-4a^2p^2+p^4-p^4+8a^2p^2>0$ , или  $4a^4+4a^2p^2>0$ , что всегда удовлетворено.

Чтобы оба они были положительны, необходимо, чтобы произведеніе и сумма ихъ были положительны. Произведеніе будеть положительно при  $p^2 > \varepsilon a^2$ , или при

$$p > 2a\sqrt{2}$$
.

Но при этомъ условіи будеть p>2a, слѣд.  $2a^2-p^2$  будеть <0, и потому сумма корней будеть >0, и оба корня— положительны. Итакъ, единственное условіе возможности задачи будеть:  $p\geqslant 2a\sqrt{2}$ , т. е. чтобы данная линія была не меньше удвоенной линіп AO.

Рѣшивъ ур., найдемъ:

$$x = \pm \sqrt{p^2 - 2a^2 \pm 2p\sqrt{a^2 + p^2}};$$

выражение это легко построить; а имъя x, нетрудно уже найти ОМ и ОN.

**633.** Шестой способъ. Если за вспомогательное неизвъстное принять произведеніе отръзковъ ОМ  $\times$  ОN, то какъ для двухъ положеній съкущей произведеніе это имъсть одну и туже величину, для четырехъ ся положеній получимъ два значенія для произведеніа; поэтому, ур. съ неизвъстнымъ x, равнымъ произведенію отръзковъ, должно быть квадратнымъ.

Положивъ  $OM \times ON = x$ , имфемъ еще два ур-нія:

$$OM^2 + ON^2 = p^2$$
 if  $OM \times ON = a(OM + ON)$ , the  $x = a(OM + ON)$ .

Возвысивъ последнее ур. въ квадратъ, имеемъ

$$x^2 = a^2(p^2 + 2x)$$
, откуда  $x^2 - 2a^2x - a^2p^2 = 0$ .

Какъ скоро x найдено, МО и NO получимъ изъ биквадратнаго ур $\mathring{\cdot}$ нія

$$X^4 - p^2X^2 + x^2 = 0.$$

Корин этого ур-нія будуть дійствительны при условіи  $p^4-4x^2>0$ , или  $(p^2+2x)$   $(p^2-2x)>0$ ; отсюда видно, что при x>0, необходимо, чтобы было  $x<\frac{p^2}{2}$ . Заміняя x количествомь  $\frac{p^2}{2}$  въ ур-ній ві x, должны иміть:  $\frac{p^4}{4}-a^2p^2-a^2p^2>0$ , или  $p^2>8a^2$ , откуда  $p>2a\sqrt{2}$ — условіє изв'єстноє. x<0 должно давать  $x>-\frac{p^2}{2}$ , т. е.  $-\frac{p^2}{2}$  должно быть вий корпей ур-нія ві x, и потому должно быть  $\frac{p^4}{4}+a^2m^2-a^2m^2>0$ , что всегда имітеть місто. Итакь, единственное условіє есть

$$p > 2a\sqrt{2}$$
.

Какъ скоро оно удовлетворено, оба значенія  $x^2$  будуть положительны, а потому всb четыре значенія X дbйствительны.

Впрочемъ, какъ скоро найденъ x, то вмѣсто рѣшенія биквадратнаго ур-нія, дающаго отрѣзки ОМ и ОN, стоитъ только замѣтить, что въ тр-кѣ ОМN извѣстна гипотенуза p и илощадь, равная  $\frac{\mathrm{OM} \times \mathrm{ON}}{2}$  или  $\frac{x}{2}$ .

**634.** Седьмой способъ. Если за неизвъстное принять отношеніе  $\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}}$  отръзковъ, то очевидно должно получиться возвратное ур. четвергой степени; ибо для положенія

M'N' съкущей второй корень есть  $\frac{OM'}{ON'}$  или  $\frac{ON}{OM}$ , т. е. онъ обратенъ первому корню; тоже самое имъетъ мъсто и для двухъ другихъ корней. Для составленія ур-нія стонтъ только исключить OM и ON изъ трехъ уравненій

$$\frac{OM}{ON} = x$$
 . . . (1)  $OM^2 + ON^2 = p^2$  . . . (2) и  $\frac{OM}{ON} = \frac{OM - a}{a}$ , или  $ax = OM - a$ , откуда  $OM = a(x+1)$  . . . . . . . . . . . . . . . . . (3).

Изъ перваго ур-нія пийемъ  $\frac{OM^2}{ON^2} = \frac{x^2}{1}$ ; отсюда  $\frac{OM^2 + ON^2}{OM^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ , пли

$$\frac{p^2}{\mathrm{OM}^2} = \frac{x^2+1}{x^2}, \quad \text{или } \frac{p^2}{a^2(x+1)^2} = \frac{x^3+1}{x^2}, \quad \text{или } p^2x^2-a^2(x^2+1)(x+1)^2 = 0, \quad \text{или } a^2x^4+2a^2x^3+(2a^2-p^2)x^2+2a^2x+a^2 = 0.$$

Положивь  $x+\frac{1}{x}=y$ , откуда  $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ , и раздёливь все ур. на  $x^2$ , находимъ

$$a^{2}\left(x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\right)+2a^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a^{2}-p^{2}=0, \text{ with } a^{2}y^{2}+2a^{2}y-p^{2}=0$$

$$x^{2}-xy+1=0.$$

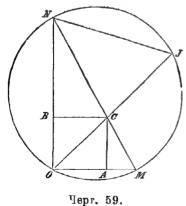
Изъ ур-нія въ y найдемъ два значенія для y: y' и — y'', которыя поочередно вносимъ въ послѣднее ур-ніе. Но чтобы для x нолучились величины дѣйствительныя, нужно, чтобы абсолютная величина y была больше 2; и сл. замѣна y числами 2 и — 2 должна давать отрицательные результаты;  $\tau$ , e.

$$4a^2 - 4a^2 - p^2 < 0$$
, where  $p > 2a\sqrt{2}$  is  $4a^2 - 4a^2 - p^2 < 0$ , where  $p > 2a\sqrt{2}$ 

что приводится въ одному условію:  $p>2a\sqrt{2}$ , уже изв'єстному.

Когда это условіе не выполнено, когда p содержится между  $2a\sqrt{2}$  и 0, годится только отрицательное значеніе y, которому отв'ячають два отрицательныя значенія x: с'вкущая проходить въ углахъ x0y' и x'0y'.

635. Опуская тригонометрическія ріменія вопроса, дадимь въ заключеніе рішеніе задачи чисто геометрическое.



1. Пусть задача рѣшена, п МN—требуемая сѣкущая. Опишемъ около треуг-ка МОN вругъ, въ которомъ NM будетъ діаметромъ. Продолживъ ОС до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ I, соединимъ I съ N; тр-ка NIC, ONI подобны, ибо имѣютъ общій уголъ NIO и сверхъ того INС— IOМ — NOI (ибо ВОС — СОА); сл. сходственных стороны даютъ пропорцію ОІ: IN — IN : IC, откуда ОІ × IС — IN². Здѣсь IN² извѣстно, ибо точка I находится въ срединѣ дуги NM, именно IN есть сторона вписаннаго квадрата въ кругѣ, кото-

рагора діусь 
$$=\frac{MN}{2} = \frac{p}{2}$$
, сл.  $NI = \frac{p\sqrt{2}}{2} = \frac{p}{\sqrt{2}}$ ;

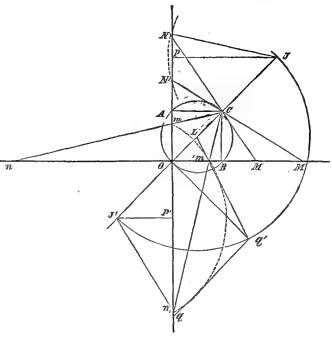
сверхъ того  $10-10=00=a\sqrt{2};$  сявд, задача приводится въ построенію прямоугольника по даннымъ; площади  $\frac{p^2}{2}$  и разности измъреній  $a\sqrt{2}.$  Для рѣшенія задачи описываемъ кругъ около квадрата ОАСВ, беремъ Oq = p, проводимъ въ точкъ О касательную къ кругу и изъ точки q опускаемъ на нее пер-

пендикулярь qq'; тогда  $Oq' = \frac{p}{\sqrt{2}}$ , ибо  $q'q^2 = Oq'^2$ . Центрь L круга соединяемъ съ q' и линію Lq' наносимъ на LI; тогда  $OI \times OI' = Oq'^2 = \frac{p^2}{2}$ ; но OI' = IC, слъд.

$$0I \times IC = \frac{p^2}{2}.$$

Затёмъ изъ точки I какъ изъ центра радіусомъ Oq' описываемъ дугу круга, которая пересёчеть ось у въ точкахъ № и N'. Искомыя сёкущія будуть: NCM и N'CM'. Въ самомъ дёлё, проведя NI, имёемъ

$$0q^{1/2} = NI^2 = I0 \times IC;$$



Черт. 60.

слѣд. треуг-ки NIC, NIO подобны, имѣя по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами; слѣд.  $CNI = NOI = IOM = 45^{\circ}$ ; но въ треуг. NIM уголь NMI = также  $45^{\circ}$ ; а какъ ONM + OMN = d, откуда NI = IM, слѣд. четыре-угольникъ NIOM = Bписуемый; но NOM = d, сл. NIM = d, и какъ  $INM = 45^{\circ}$ , то  $NM^2 = 2IN^2$ . Но  $IN^2 = Oq'^2 = \frac{p^2}{2}$ , сл.  $NM^2 = p^2$  и MN = p.

Изследованів. — Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы кругь, описанный изъ точки J какъ изъ центра, пересъкаль ось y; сл. необходимо, чтобы

IN > IP, had 
$$\frac{p}{\sqrt{2}} > \frac{10}{\sqrt{2}}$$
,

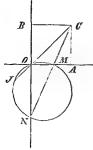
ибо IPO есть прямоугольный равнобедренный тр-къ, такъ-какъ  $POI = 45^{\circ};$  отсюда: p > IO.

Ho IO = OL + IL = 
$$\frac{a\sqrt{2}}{2}$$
 + Lq' =  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  +  $\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{p^2}{2}}$ , отвуда  $p > \frac{a\sqrt{2}}{2}$  +  $\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{p^2}{2}}$ , или  $p\sqrt{2} - a > \sqrt{a^2 + p^2}$ , или  $2p^2 > 2ap\sqrt{2} + p^2$ , или  $p > 2a\sqrt{2}$ ,

условіе извѣстное.

При  $p=2a\sqrt{2}$ , кругъ, описанный изъ центра I, касателенъ къ оси y; тогда  $IP=\frac{p}{\sqrt{2}}$ , сл.  $IO=p=2a\sqrt{2}$ , и какъ  $OC=a\sqrt{2}$ , то IC=OC. Слъд. если провести PC, PC будетъ нерцендикулярна къ OI, и съкущая будетъ minima.

2. Возьмемь другое положеніе сѣкущев, напр. МN въ углѣ хоу'; описавъ окружность около треуг. ОМN и продолживъ СО до пересѣченія въ точкѣ І съ окружностью, замѣчаемъ, что уголъ ІОХ—45°, слѣд. дуга ІХ—90°, а потому хорда ГХ есть сторона вписаннаго квадрата; и потому



$$IN = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{p}{\sqrt{2}}$$

Треугольники CIN, ION подобны, ибо уголь I общій, и сверхь того ION =  $45^{\circ}$  = INC; откуда CI : IN = IN : OI и CI × IO = IN<sup>2</sup> =  $\frac{p^2}{2}$ ; кром'в того: IC—IO = OC =  $a\sqrt{2}$ ; сл'яд. задача приводится въ построенію прямоугольника по площади и разности изм'вреній. Отсюда: тоже самое построеніе, какое указано выше, съ тою разницею, что нанесеніе должно быть сд'ялано на діагональ ОС съ другой стороны точки С.

Черт. 61.

Итакъ, сдълавъ это построеніе, наносимь Lq' на линію LO въ LI', затъмъ изъ точьи I' какъ изъ центра радіусомъ  $\frac{p}{\sqrt{2}} = IN = Lq'$  опишемъ дугу, которая пересъчеть ось y въ m и n'. Проведя Cnm и Cn'm', получимъ двъ съкущія, отвъчающія вопросу.

Для довазательства соединяемъ точки I' и n'; по построенію:  $I'N'^2 = I'O \times I'C$ 

нли  $\frac{p^2}{2}$  = I'O × I'C или  $\frac{I'O}{p\sqrt{2}}$  =  $\frac{p}{I'C}$ ; слёд. треуг-ники I'On' и I'Cn', какъ имѣющіе по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами, подобны; откуда I'n'C = I'On' = 45°. Но четыреугольникъ I'Om'n' вписуемый, ибо углы I'n'C I'Om' дополнительны до 180°. Но уголъ n'Om' = d, сл. и уголъ n'I'm' = d; а какъ I'n'm' = d5°, сл. треугольникъ—прямоугольный равнобедренный, а потому

$$n'm' = I'n'\sqrt{2} = p$$
.

Изследованте. — Чтобы задача была возможна, нужно, чтобы I'n' или  $\frac{p}{\sqrt{2}}$  было больше перпендикуляра IP'. Но  $I'n'=I'P'\sqrt{2}=I'L-OL=Lq'-\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{a^2+p^2}{2}};$  сл. должно быть  $p>-\frac{a\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{a^3+p^2}{2}},$  или  $p\sqrt{2}>-a+\sqrt{a^2+p^2},$   $p\sqrt{2}+a>\sqrt{a^2+p^2},$  или  $2p^2+2ap\sqrt{2}+a^2>a^2+p^2,$   $p^2+2ap\sqrt{2}>0,$  условіе, всегда выполненное; и потому въ разсматриваємомъ случає задача всегда возможна.

# Задача ХІХ.

**636.** Въ окружности радіуса R беруть секторь, котораго уголь = 45°; требустся въ этомъ секторь помыстить прямоугольникъ MNPQ (двѣ вершины котораго находились бы на одномъ радіусѣ, а изъ двухъ остальныхъ одна на другомъ радіусѣ, а другая на дугѣ сектора) такъ, итобы діагональ MP имъла данную длину т.

Примемъ за неизвъстное длину OP = x; треугольнивъ МОР даеть

$$m^2 = R^2 + x^2 - 2x$$
. OQ.

Но ихъ треугольника ОQM, замѣчая, что MQ = OP, имѣемъ: OQ =  $\sqrt{\mathbb{R}^2-x^2}$ . Отсюда

$$m^2 = R^2 + x^2 - 2x \sqrt{R^2 - x^2}$$
 . . . . . . . . (1).

Это ур. останется въ томъ же видъ, пока точка М будетъ находиться на дугъ АС, ибо уголъ РОМ будетъ острый.

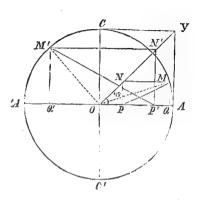
Если точка М будеть находиться на дугѣ CA', причемъ прямоугольникъ будетъ, напр., MN'P'Q', найдемъ, опять полагая OP' = x, ур-ніе

$$m^2 = R^2 + x^2 + 2x \sqrt{R^2 - x^2}$$
. (2)

отличное отъ (1).

Затёмъ, безполезно брать точки на полуокружности А'С'А, потому-что, очеведно, найдемъ решенія симметричныя, относительно О, решеніямъ уже полученнымъ.

Итакъ, задача рѣшается двумя прраціональными ур-ми



Черт. 62.

$$\pm 2x\sqrt{\mathbb{R}^2-x^2}=x^2+\mathbb{R}^2-m^2$$
 . . . . . . . . (3),

гдx > 0, или ц $\xi$ лымъ ур-мъ:

$$4x^{2}(R^{2}-x^{2})=(x^{2}+R^{2}-m^{2})^{2}$$
 . . . . . (3'),

или 
$$5x^4 - 2(m^2 + R^2)x^2 + (m^2 - R^2)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

изъ числа корней котораго надо брать только положительные и наносить ихъ въ направленіи ОА.

Нѣкоторой точк $^{\pm}$  Р, для которой ОР есть корень ур. (4), соотв $^{\pm}$ тствують дв $^{\pm}$  точки окружности, лежащія на одной и той же парадлели єть AA', если только PN = x не больше R; изъ этихъ двухъ точекъ вопросу отв $^{\pm}$ чаетъ та, для которой

$$x^2 + R^2 - m^2 > 0$$
, when  $x^2 > m^2 - R^2$ ,

если она находится на дугѣ АС; или та, для которой

$$x^2 + R^2 - m^2 < 0$$
, where  $x^2 < m^2 - R^2$ ,

если она находится на дугѣ А'С.

Изследование. — Чтобы корни ур-нія (4) отвёчали на задачу, необходимо и достаточно: 1) чтобы они были действительны; 2) положительны; 3) меньше R.

Кромѣ того, а ргіогі видно, что какъ скоро корни будуть дѣйствительны, они будуть попарно равны и противоположны по знаку; сл. будуть два положительных корня, и очевидно, что они будуть меньше R, ибо, удовлетворяя ур-нію (3'), дѣлають разность  $4x^2(R^2-x^2)$  положительною. Итакъ, остается единственно условіе дѣйствительности.

Такъ какъ ур. (4) биквадратное, то для дъйствительности его корней необходимо, чтобы значенія  $x^2$  были дъйствительны и положительны; по очевидно, что какъ скоро они дъйствительны, то и положительны; сл. необходимо и достаточно, чтобы было

$$(m^2+\mathrm{R}^2)^2-5(m^2-\mathrm{R}^3)^2\geq 0,$$
 или 
$$\left[m^2+\mathrm{R}^2-(m^2-\mathrm{R}^2)\sqrt{5}\right]\!\left[m^2+\mathrm{R}^2+(m^2-\mathrm{R}^2)\sqrt{5}\right]\geq 0,$$
 или 
$$\left[(\sqrt{5}+1)\,m^2-(\sqrt{5}-1)\mathrm{R}^2\right]\!\left[(\sqrt{5}-1)\,m^2-(\sqrt{5}+1)\mathrm{R}^3\right] < 0.$$

Разделяя первый множитель на  $\sqrt{5}+1$ , а второй на  $\sqrt{5}-1$  и замечая, что

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \quad \text{if} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

даемъ неравенству видъ:

$$\Big\{m^2 - \Big[\frac{{\rm R}}{2}(\sqrt{5}-1)\Big]^2\Big\}\Big\{m^2 - \Big[\frac{{\rm R}}{2}(\sqrt{5}+1)\Big]^2\Big\} < 0,$$

или, по разложени на множители первой степени:

$$\left[ m + \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1) \right] \left[ m - \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1) \right] \left[ m + \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1) \right] \left[ m - \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1) \right] < 0.$$

Но первый и третій множители положительны, сл. д. б.

$$\left[m - \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right] \left[m - \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)\right] \ge 0,$$

откуда видно, что т должно удовлетворять условіямъ:

При этихъ условіяхъ всё 4 корня ур. (4) будуть действительны; сл. задача будеть имёть два рёшенія въ полуокружности АСА', и два симметричныя имъ рёшенія въ другой полуокружности.

Остается показать положение прямоугольниковь, отвічающихь задачів.

Чтобы оба положительныя значенія x давали прямоугольники съ вершиною М на дугѣ AC, необходимо и достаточно, чтобы для каждаго изъ этихъ значеній было  $x^2 > m^2 - \mathbb{R}^2$ ; а для этого необходимо и достаточно:

- 1) Чтобы триномъ, составляющій первую часть (4) быль положителень при замінів въ немъ  $x^2$  разностью  $(m^2 - \mathbb{R}^2)$ ;
  - 2) Чтобы полусумма корней не была меньше  $(m^2 \mathbb{R}^2)$ .

Первое изъ этихъ условій даеть:

$$5(m^2 - R^2)^2 - 2(m^2 + R^2)(m^2 - R^2) + (m^2 - R^2) \ge 0,$$

$$(m^2 - R^2)(m^2 - 2R^2) \ge 0. \qquad (6)$$

Второе условіе даетъ

NLH

$$\frac{m^2 + R^2}{5} \ge m^2 - R^2$$
, или  $m^2 < \frac{3R^2}{2}$  . . . . . . . . (7)

Отсюда, такъ какъ  $\frac{3R^2}{2}$  содержится между  $R^2$  и  $2R^2$ , слёдуеть, что: 1) если  $m^2 < R^2$  или m < R, оба рёшенія лежать на дугё AC; 2) если  $R < m < R\sqrt{2}$ , одно рёшеніе находится на AC, другое на A'C; 3) если  $m > R\sqrt{2}$ , оба рёшенія на дугё A'C.

Итакъ, максимумъ m, равный  $\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$  (т. е. сторона правильнаго вписаннаго звъзднаго десятіугольника), принадлежитъ прямоугольнику, котораго вершина М лежитъ на дугѣ А'С; между тъмъ какъ минимумъ m, равный  $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$  (сторона выпуклаго десятіугольника), принадлежитъ прямоугольнику, котораго вершина М находится на дугѣ AС.

#### Резюме изслъдованія.

#### Запача ХХ.

638. Данъ правильный △ ABC и параллель DE къ сю основанію. Если нъкоторую точку М, взятую на этой параллели, соединить съ вершинами, то продолженія полученныхъ прямыхъ образують на сторонахъ △-ка щесть отръзковъ. Опредълить точку М такъ, чтобы произведеніе трскъ изъ этихъ отръзковъ, взятыхъ не
послъдовательно, имъло данную величину.

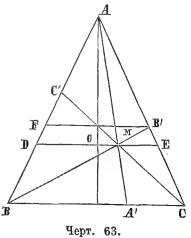
Решенів. Пусть (черт. 63) сторона даннаго  $\triangle$ -ка равна  $\alpha$ , параллель DE = b. Примемь за неизвёстное — разстояніе OM = x искомой точки отъ средины DE. По условію должны имѣть

$$BA' \times CB' \times AC' = K^3$$
.

Выразимъ эти отръзви въ функціи данныхъ a и b и искомаго x. Изъ подобія тр-въ ABA' и ADM имъемъ:  $BA': DM \Longrightarrow BA: DA$ ,

откуда ВА' = DM. 
$$\frac{\text{BA}}{\text{DA}}$$
 =  $\left(x + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{a}{b}$  . • (1)

Для вычисленія В'С проводимъ ВТ параллельно ВС и, зам'єтивъ, что ВГ—СВ', изъ подобія тр-въ ВОМ и ВВ'Г им'ємъ: ВГ: ВО—В'Г: DМ,



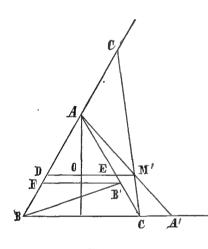
Затемъ, AC' = a - BC'. Подобные тр-ки DC'М и BCC' дають:

$$BC': (BC' - BD) = BC: DM,$$
 или  $BC': (BC' - a + b) = a: (x + \frac{b}{2}),$  или  $BC': (b - a) = a: (x + \frac{b}{2} - a);$  след. 
$$AC' = a - \frac{a(b - a)}{x + \frac{b}{2} - a} = \frac{a(x - \frac{b}{2})}{x + \frac{b}{2} - a} \cdot \dots (3)$$

Итакъ, имћемъ уравненіе

$$\frac{a}{b}\left(x+\frac{b}{2}\right)\times\frac{a(a-b)}{a+x-\frac{b}{2}}\times\frac{a\left(x-\frac{b}{2}\right)}{x+\frac{b}{2}-a}=K^{3}.....(4)$$

Пусть искомая точка находится ви $\dot{\text{E}}$   $\triangle$ -ка въ M' (черт. 64), и пусть OM' = y.



Черт. 64.

Тр-ви ABA' и ADM' дають: ВА': DM'=ВА: DA, отвуда ВА'= $\left(y+\frac{b}{2}\right)\cdot\frac{a}{b}$ — выраженіе, совершенно сходное съ (1). Для вычисленія СВ' проводимъ В'F параллельно ВС; треуг-ви ВВ'F и ВМ'D дають: ВF: ВD = FB': DM', или В'C:  $(a-b)=(a-B'C):\left(y+\frac{b}{2}\right);$  слёд. и для линіп В'C получится прежнее выраженіе. Наконець АС'=ВС'—а. Подобные тр-ви С'ВС и С'DM' дають ВС': СD'=ВС: DM'; ВС': (ВС'—ВD) = ВС: DM'; или

BC': 
$$(BC'-a+b)=a:(y+\frac{b}{2});$$
  
BC':  $(b-a)=a:(y+\frac{b}{2}-a);$  caba.

$$AC' = \frac{a(b-a)}{y + \frac{b}{2} - a} - a = \frac{a(\frac{b}{2} - y)}{y + \frac{b}{2} - a}.$$

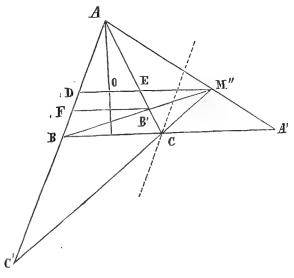
Итакъ новое значеніе AC' отличается отъ прежняго знакомъ; слѣд. получимъ новое ур-піе, которое можно представить въ видѣ BA'. CB'.  $AC' = -K^3$ , такъ что оно отличается отъ (4) перемѣною  $K^3$  на  $-K^3$ .

Пусть точка M находится вправо оть параллели прямой AB, проведенной черезь точку C, напр. въ M", и пусть  $OM'' = \varepsilon$ , (черт. 65).

Прямо видимъ, что для BA' новаго не получится, разсматривая треугольники ABA' и AM''D.

Для СВ', проведя В'F параллельно ВС, имѣемъ изъ тръвъ В'ВF и ВDМ'' : ВF : ВD = FB' : DМ'', или СВ' : (a-b)=  $(a-CB'): \left(z+\frac{b}{2}\right)$ , слѣд. нивакой перемѣны нѣтъ.

Затёмъ имѣемъ AC'=a+CB; тр-ви C'CB и C'M''D даютъ: C'B:C'D=BC:DM'', или C'B:  $(C'B+a-b)=a:\left(z+\frac{b}{2}\right)$ , или  $BC':(a-b)=a:\left(z+\frac{b}{2}-a\right)$ ; слёд.  $AC'=a+\frac{a(a-b)}{z+\frac{b}{2}-a}=$ 



Черт. 65.

$$rac{a\left(z-rac{b}{2}
ight)}{z+rac{b}{2}-a}$$
: та же величина, какъ въ первомъ случаћ.

Пусть теперь точка M находится влёво отъ O, между O и D; пусть  $OM_1 = x_1$ . Тр-ки ABA' и  $ADM_1$  дають (черт. 66):

$$BA': DM_1 \Longrightarrow BA: DA$$
, отвуда  $BA' \Longrightarrow \left(\frac{b}{2} - x_1\right) \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (5)$ 

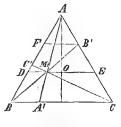
Проведя черезъ точку В' прямую В' парадлельно ВС, нивемъ:

BF: BD = FB': DM', B'C: 
$$(a-b) = (a-B'C): \left(\frac{b}{2} - x_1\right) \Longrightarrow a: \left(a - \frac{b}{2} - x_1\right)$$
, отвуда
$$B'C = \frac{a(a-b)}{a - \frac{b}{2} - x_1}. \qquad (6)$$

Наконецъ, нетрудно вычислить и АС'. Легко видёть, что мы найдемъ ур-ніе (4), въ которомъ х перемёнено въ — х. Такимъ образомъ, мы умёемъ истолковывать отрицательныя рёшенія ур-нія (4).

Передвинемъ точку М еще лѣвѣе, въ  $M_2$ , и пусть  $0M_2 = x_2$ . Найдемъ (черт. 67):

$$BA' = \left(-\frac{b}{2} + x_2\right) \cdot \frac{a}{b}.$$



Черт. 66.

Для вычисленія СВ' проводимъ черезъ точку В параллель къ линін ВС до встр'єчи съ продолженіемъ АВ въ точкі F. ВF = В'С. Тр-ки ВВ'F и ВDM<sub>2</sub> даютъ:

BF: BD 
$$=$$
 B'F: M<sub>2</sub>D. Ho B'F  $=$  B'A  $=$  B'C  $-$  a; caba.

$$B'C: (a-b) = (B'C-a): \left(-\frac{b}{2} + x_2\right) = a: \left(a - \frac{b}{2} - x_2\right),$$

$$B'C = \frac{a(a-b)}{a - \frac{b}{2} - x_2}.$$

Черт. 67.

Затёмъ AC' = a - BC'. Треуг-ки  $M_2DC'$  и BCC' дають:  $BC' : C'D = BC : M_2D$ , или  $BC' : (BD - BC') = BC : M_2D$ , или  $BC' : (a - b - BC') = a : \left( -\frac{b}{2} + x_2 \right)$ ,

нли  $BC': (a-b) = a: (-\frac{b}{2} + x_2 + a),$  слъд.

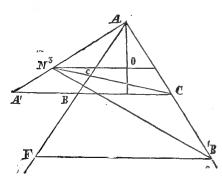
$$AC' = a - \frac{a(a-b)}{-\frac{b}{2} + x_2 + a} = \frac{a\left(x_2 + \frac{b}{2}\right)}{a + x_2 - \frac{b}{2}},$$

что можно представить въ вид $\frac{a\left(-x_2-\frac{b}{2}\right)}{\frac{b}{2}-x_2-a}$ 

Слёд, если перемёнить x на -x, то AC' и B'C получать тоть же видь, какъ въ первомъ случать, но BA' получить противоположный знакъ.

Достаточно перемѣнить  $K^3$  на —  $K^3$ , и мы можемъ принять отрицательныя рѣшенія ур-нія, такимъ образомъ составленнаго.

Наконель, пусть точка М будеть еще лъвъе, въ  $M_3$ ; пусть  $0M_3 = x_3$  (черт. 68).



Черт. 68.

$$BA' = \left(-\frac{b}{2} + x_3\right) \cdot \frac{a}{b}.$$

Тр-кп ВВ'Е и МаВО дають

$$BF : BD = B'F : M_3D$$
,

$$\frac{CB'}{a-b} = \frac{a + CB'}{-\frac{b}{2} + x_3} = \frac{a}{\frac{b}{2} - a + x_3}.$$

Отсюда CB' = 
$$\frac{a(a-b)}{\frac{b}{2}-a+x_3}$$
.

Наконецъ, треугольники  $C'M_3D$  и BCC дають  $BC':C'D = BC:M_3D$ , или

ВС': 
$$(BD - BC') = BC$$
:  $M_3D$ , или  $BC'$ :  $(a - b - BC') = a$ :  $\left(x_3 - \frac{b}{2}\right)$ , или  $BC'$ :  $(a - b) = a$ :  $\left(x_3 - \frac{b}{2} + a\right)$ ; след.  $AC' = a - \frac{a(a - b)}{x_3 - \frac{b}{2} + a} = a$ 

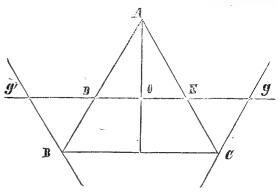
$$\frac{a\left(x_3+\frac{b}{2}\right)}{x_3-\frac{b}{2}+a}.$$

Если перемънить x на -x, найдемъ ур-ніе (4), нбо двѣ линін BA' и CB' перемънили знакъ, слъд. произведеніе останется безъ перемъны.

Итакъ, (черт. 69), проведя СС параллельно АВ, и ВС, караллельно АС, заключаемъ, что когда М находится между О и Е, или вправо отъ С, ея положение опредёлнется

положительными рѣшеніями ур. (4); если М находится между О и D, или влѣво отъ G'—отрицат. рѣшеніями ур. (4); если М лежитъ между Е и G, положит, рѣшеніями ур-нія, въ которомъ  $K^3$  измѣнено въ —  $K^3$ , п отрицат. рѣшеніями этого ур-нія, если М находится между D и  $G_1$ .

Ноложивъ  $K^3 = ma^3$ , уничтожимъ множителя  $a^3$ , и приведя уравнение въ цѣлый видъ, получимъ



Черт. 69.

$$4(b-a+mb)x^2-(b-a)(b^2-4mab)-mb^3=0$$
. . . . . (7)

откуда

$$x = \pm \sqrt{\frac{(b-a)(b^2-4mab)+mb^3}{4(b-a+mb)}}$$
.

639. Изследованте. — Чтобы одно изъ этихъ значеній x представляло отвётъ на вопрось, нужно прежде всего, чтобы оно было дъйствительно, а слъд. чтобы подрадикальное количество было положительно; а какъ это послъднее ссть дробь, надо, чтобы оба члена ея имъли одинаковый знакъ. Разсматривая эти члены какъ полиномы первой степени въ m, должно дать m значенія, лежащія внѣ корпей этихъ полиномовъ. Корень числителя  $m'=\frac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$ , корень знаменателя  $m''=\frac{a-b}{b}$ . Въ нашей задачъ мы предположили a>b, слъд. 2a-b>b; а потому m'< m''. Итакъ, чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы было

$$m<rac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$$
, here  $m>rac{a-b}{b}$ .

Недостаточно, чтобы x было дъйствительно; необходимо, чтобы (будеть-ли x> или <0) абсолютная величина была меньше  $\frac{b}{2}$ , или больше  $a-\frac{b}{2}$ . Итакъ, должно быть

$$x < \frac{b}{2}$$
, where  $x > a - \frac{b}{2}$ .

Подставивъ первое изъ этихъ значеній въ первую часть ур. (7), имбемъ

$$b^2(b-a+mb)-(b-a)(b^2-4mab)mb^3$$
, where  $+(b-a)$ . A made.

Такъ какъ b-a<0, знакъ этого произведенія будеть зависьть только отъ знака m; въ данной задачь m м. б. только >0, слъд. разсматриваемое произведеніе <0. Итакъ результатъ подстановки  $\frac{b}{2}$  всегда отрицателенъ; но коэффиціентъ при  $x^2$  имъетъ перемънный знакъ, отсюда необходимость различать нъсколько случаевъ, смотря по знаку выраженія b-a+mb.

1. Если  $m<\frac{a-b}{b},\ b-a+mb$  отрицательно; результать подстановки будеть одинаковаго знака съ коэффиціентом при  $x^2$ , сабд.  $\frac{b}{2}$  внё корней, и какъ одинъ

изъ корней отрицателенъ,  $\frac{b}{2}$  всегда больше обоихъ корней. Положительный корень удовлетворяетъ задачѣ; отрицательный—также, ибо онъ равенъ положительному, но по знаку протевоположенъ. Такимъ образомъ, если  $m < \frac{a-b}{b}$ , задача имѣетъ два рѣшенія—положительное и отрицательное, если только  $m < \frac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$ , какъ требуется для дѣйствительности корней.

2. Если  $m>\frac{a-b}{b}$ , результать подстановки отрицателень и след, имееть знакъ противоположный коэффиціенту при  $x^2$ , который положителень. След,  $\frac{b}{2}$  заключается между кориями. Корень большій  $\frac{b}{2}$  должень быть больше и разности  $a-\frac{b}{2}$ ; посмотримь, во что обращается первая часть ур-нія, если въ ней положить  $x=a-\frac{b}{2}$ .

Имѣемъ:  $4\left(a-\frac{b}{2}\right)^2(b-a+mb)-(b-a)(b^2-4mab)-mb^3$ ; по упрощеніи получимъ:  $8a^2b-4ab^2-4a^3$ , нли  $-4a(a-b)^2$ . Такимъ образомъ, результать подстановки всегда отрицателенъ; а коэффиціентъ при  $x^2$  положителенъ; слѣдовательно  $a-\frac{b}{2}$  заключается между корнями. Поэтому, большій корень удовлетворяєть задачъ; меньшій—также, ибо онъ отъ перваго отличается только знакомъ.

Итакъ, задача имѣетъ всегда два рѣшенія, если только m>0 п не содержится между  $\frac{b(a-b)}{(2a-b)^2}$  и  $\frac{a-b}{b}$ .

Когда m отрицательно, мы нивемь уже иную задачу; ур-ніе дасть два двйствит. корня, ибо m не заключается между m' и m''. Корни эти могуть быть положительны или отрицательны; но они еще должны заключаться между  $\frac{b}{2}$  и  $a-\frac{b}{2}$ , или  $-\frac{b}{2}$  и  $-\frac{b}{2}+a$ .

Результать подстановки  $\frac{b}{2}$  положителень, и вавь m всегда меньше  $\frac{a-b}{2}$ , коэф. при  $x^2$  отрицателень. Слёд.  $\frac{b}{2}$  завлючается между ворнями. Если годень положительный корень, то годень будеть и отрицательный.

Разсмотримъ, поэтому, положительный корень, который больше  $\frac{b}{2}$ ; онъ д. б.  $< a - \frac{b}{2} \cdot$ 

Результать подстановки  $a-\frac{b}{2}$  всегда отрицателень, слѣдоват. одного знака съ коэффиціентомъ при  $x^2$ ; слѣд.  $a-\frac{b}{2}$ —внѣ корней; п какъ одинъ изъ корней отрицателенъ, то  $a-\frac{b}{2}$  больше обоихъ корней: оба корня дають отвѣтъ на задачу.

Слёд., если m>m': два рёшенія внё треугольника; если m< m'', два рёшенія: въ треуг-кё, при m>0; внё треугольника, если m<0; нётъ рёшеній, если m заключается между m' п m''.

#### Задача ХХІ.

**640.** Въ какомъ разстояніи отъ центра даннаю шара провести съкущую плоскость, чтобы боковая поверхность конуса ABC, описаннаю около шара по съченію, сложенная съ т разъ взятою поверхностью внъшняю сегмента AED, равнялась данной поверхности (m—число положительное). —  $25 \in \mathbb{K}$ 

Раменте. — Пусть радіусь даннаго шара будель R; данная поверхность  $2\pi a R$ ; x, y, z — три неизв'єстныя линіп DO, DB, CB. По уни-

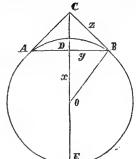
чтоженін общаго множителя 27, имбемъ, во-первыхъ, ур.

$$yz + 2mR(x + R) - 2aR = 0$$
. (1)

Проведя радіусь ОВ, пзъ прямоугольнаго треугольника ОDВ и изъ подобныхъ треугольниковъ ОDВ и СDВ имѣемъ:

$$x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2$$
 if  $xz = \mathbb{R}y$ , if  $z = \frac{\mathbb{R}y}{x}$ ,  $yz = \frac{\mathbb{R}y^2}{x} = \frac{\mathbb{R}(\mathbb{R}^2 - x^2)}{x}$ .

Замёнивъ въ ур-нін (1) уг послёднимъ выраженіемъ, найдемъ ур-ніе



Черт. 70.

$$(2m-1)x^2-2(a-mR)x+R^2=0$$
 . . . . . (2)

изъ котораго

$$x = \frac{a - mR \pm \sqrt{(a - mR)^2 - (2m - 1)R^2}}{2m - 1}.$$

Изследование. — Чтобы предложенная задача была возможна, необходимо и достаточно, чтобы x было действительно, положительно и не больше R. Прежде всего очевидно, что кории ур-вія (2) будуть действительны, если  $2m-1 \le 0$ . Итакъ, должно различать 3 случая:  $m < \frac{1}{2}$ ,  $m = \frac{1}{2}$ ,  $m > \frac{1}{2}$ .

1 случай. — 
$$m<\frac{1}{2}$$

Корни ур-нія (2) дійствительны, одинь положителень, другой отрицателень. Откидывая отрицательный корень, замічаемь, что задача можеть иміть только одно ріменіе, и чтобы оно существовало, нужно еще, чтобы x было меньше R. Это будеть иміть місто, когда результать подстановки буквы R вмісто x въ 1-ую часть ур. (2) будеть иміть тоть же знакь, какъ первый члень, T. е. отрицательный; ибо отрицательная величина x необходимо меньше R. Результать подстановки есть 2R(2mR-a); слід, должны иміть a > 2mR или  $2\pi Ra > 4m\pi R^2$ .

Такимъ образомъ, когда данная поверхность будетъ меньше то разъ взятой поверхности шара, задача будетъ невозможна, когда же данная поверхность равна или больше то разъ взятой поверхности шара, задача имъетъ всегда ръшеніе, и только одно. Итакъ, если S есть данная поверхность, можно написать слъдующую таблицу.

$$m < rac{1}{2} \left\{ egin{array}{lll} \mathrm{S} < 4m\pi\mathrm{R}^2 & . & . & . & 0 \ \mathrm{p}$$
ьшеній.  $\mathrm{S} = 4m\pi\mathrm{R}^2 & . & . & . & 1 \ \mathrm{S} > 4m\pi\mathrm{R}^2 & . & . & . & 1 \end{array} 
ight.$ 

2 случай. — 
$$m = \frac{1}{2}$$
.

Ур ніе (2) приводится къ цервой степени и даеть:

$$x = \frac{\mathbf{R^2}}{2a - \mathbf{R}};$$

выразивъ, что величина x должна быть равна или меньше R, найдемъ: a > R, или  $2\pi Ra > 2\pi R^2$ : это тоже самое условіе, что и въ предыдущемъ случаѣ, если примемъ во впиманіе, что  $m=\frac{1}{2}$ ; слѣд., заключенія остаются тѣ-же.

3 случай. — 
$$m > \frac{1}{2}$$
.

Въ виду того, что произведение корней ур-нія (2) больше, равно или меньше  $\mathbb{R}^2$ , смотря по тому, будеть ли m меньше, равно или большее 1, мы должны настоящій случай подраздёлить на три другихъ.

1. 
$$-\frac{1}{2} < m < 1$$
.

Во-первыхъ, чтобы х было действительно, должно быть

$$a < (m - \sqrt{2m-1})R.$$
 (3), HJII  $a > (m + \sqrt{2m-1})R.$  (4).

Когда то или другое изъ этихъ условій выполнено, корни дѣйствительны и имѣютъ одинаковый знакъ. Но еслибы мы взяли первое неравенство, a было бы меньше mR и оба значенія x были бы отрицательны: слѣд. нужно взять второе неравенство. При этомъ a будетъ больше mR, и оба значенія x положительны. Кромѣ того, замѣчая, что m < 1, находимъ, что произведеніе значеній x больше  $R^2$ , и что слѣд, корни ур-нія (2) могутъ быть заразъ меньшими R: слѣд. задача не можетъ имѣть болѣе одного рѣшенія. Притомъ, чтобы это рѣшеніе существовало, необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки R на мѣсто x въ первую часть ур-нія (2), т. е. 2R(2mR-a) быль отрицателенъ или нуль. Такимъ образомъ, должно быть

$$a \ge 2mR$$
 или  $2\pi Ra \ge 4m\pi R^2$ ;

этого условія достаточно, ибо оно влечеть за собою и неравенство (4). Заключенія тіже, что и вь двухь первыхь случаяхь.

- 2. m = 1. Заключение тоже самое.
- 3.-m>1. Какъ скоро условіе (4) удовлетворено, оба значенія x дѣйствительны и положительны. Но или оба они будуть меньше R, или одно будеть меньше, а другое больше R, смотря потому, будеть-ли a меньше или больше 2mR. Такимъ образомъ, задача будеть имѣть 2 рѣшенія, когда будеть  $a>(m+\sqrt{2m-1})R$  и  $\leq 2mR$ ; и одно рѣшеніе, когда будеть a>2mR. Затѣмъ, задача будеть пмѣть одно рѣшеніе при  $a=(m+\sqrt{2m-1})R$ , и будеть невозможна, когда  $a<(m+\sqrt{2m-1})R$ .

Если обозначить для краткости количество  $m+\sqrt{2m-1}$  буквою p, то изследование последняго случая можно резюмировать такъ:

вдняго случая можно резюмировать такъ: 
$$m>1\begin{cases} S<2\pi p R^2, & \dots & 0 \text{ рѣшевій.}\\ S=2\pi p R^2, & \dots & 1 \text{ рѣшевіе.}\\ 2\pi p R^2< S\leq 4m\pi R^2 & \dots & 2 \text{ рѣшенія.}\\ S>4m\pi R^2 & \dots & 1 \text{ рѣшеніе.} \end{cases}$$

Результаты изследованія показывають, что въ сущности имеются только два различные случая:  $m \leq 1$ , m > 1.

# Задача XXII.

641. Даны два шара, лежащія одинь внь другаго: 0 п 0'; на линіи центрово, между обоими шарами, найти такую точку А, чтобы два конуса, импьющіе общую вершину въ этой точкь и касающісся къ даннымъ шарамъ, заключали внутри себй два сегмента, сумма поверхностей которыхъ имъла бы данную величину.

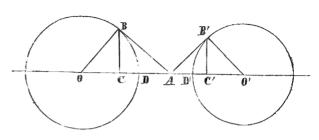
Ръшвите. — Пусть будеть r, r' и d — радіусы шаровъ и разстояніе центровъ; x и x' — разстоянія A0 и A0'. Зная, что поверхность сферич. сегмента — произведенію окружности большаго

круга на высоту сегмента, имъемъ: пов. сегмента  $BCD = 2\pi r$ . CD; но CD = r - OC, по свойству-же катета имъемъ:  $r^2 = OC \times x$ ,

отвуда 
$$OC = \frac{r^2}{x}$$
,

и 
$$2\pi r$$
, CD= $2\pi \left(r^2 - \frac{r^3}{x}\right)$ .

Сумма поверхностей обоихъ сегментовъ выразится форму-



Черт. 71.

лой  $2\pi \left[r^2 + r'^2 - \left(\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{x'}\right)\right]$ . За данное можно принять  $2\pi \left(\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{x'}\right)$ ; пзобразивъ его формулою  $2\pi m^2$ , и замънивъ x' равною величиною d-x, получимъ уравненіе

$$\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{d-x} = m^2, \quad \text{Him} \quad m^2x^2 - (r^3 - r'^3 + dm^2)x + dr^3 = 0. \quad . \quad (1)$$

откуда

$$x = \frac{r^3 - r'^3 + dm^2 - \sqrt{(r^3 - r'^3 + dm^2)^2 - 4dm^2r^3}}{2m^2} .$$

Изследование. — Количество х будеть действительно, если

$$m^2 \le \frac{(r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})^2}{d} \cdot \cdot \cdot (2), \text{ HIH } m^2 > \frac{(r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'})^2}{d} \cdot \cdot \cdot (3)$$

а по ур-нію (1) заключаемъ, что оба корня будуть и положительны.

Но чтобы величина x представляла рёшеніе даннаго вопроса, нужно еще, чтобы она была >r, но < d-r'. Результаты подстановки количествъ r и d-r' вмёсто x въ первую часть ур. (1) суть:

$$r[dr^2 + r'^3 - r^3 - m^2(d-r)]$$
 u  $r'[dr'^2 + r^3 - r'^8 - m^2(d-r')];$ 

поэтому главными значеніями  $m^2$  будуть количества

$$\frac{dr^2 + r'^3 - r^3}{d - r}$$
  $\Pi$   $\frac{dr'^2 + r^3 - r'^3}{d - r'}$ .

Сверхъ того нужно сравнить съ  $r^2$  и  $(d-r')^2$  произведеніе корией  $\frac{dr^3}{m^2}$ , в это даеть еще два главныя значенія  $m^2$ , именно dr и  $\frac{dr^3}{(d-r')^2}$ .

нижолоП вимъ

$$\frac{(r\sqrt{r}-r'\sqrt{r'})^2}{d} = a, \quad \frac{(r\sqrt{r}+r'\sqrt{r'})^2}{d} = b, \quad \frac{dr'^2+r^3-r'^3}{d-r'} = f,$$

$$\frac{dr^2+r'^3-r^3}{d-r} = g, \quad \frac{dr^3}{(d-r')^2} = c, \quad dr = h.$$

Во-первыхъ замѣчаемъ, что неравенство (2) должно отбросить, и слѣд. взять неравенство (3). Въ самомъ дѣлѣ, разности f - a и c - a положительны, пбо

$$f - a = \frac{(dr' - r'^2 + \sqrt{rr'})^2}{d(d - r')}, \ \sqrt{c} - \sqrt{a} = \frac{r' (d\sqrt{r'} + r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})}{\sqrt{d(d - r')}}.$$

Значить, еслибы количество  $m^2$  было меньше a, то тыть болые оно было бы меньше c и f, и слыд, произведение обонкь значений x было бы больше  $(d-r')^2$ , вь то время какь результать подстановки разности d-r' на мысто x вь первую часть ур-нія (2) быль бы положителень. Обы величины x были бы больше d-r' и слыд, должны бы быть отброшены.

Распредёлимъ теперь въ возрастающемъ порядкѣ главныя величны b, f, c, g, h. Для этого вычислимъ сначала разности: h-g, g-f, f-b: паходимъ

$$h - g = \frac{r(d - r)^2 - r'^3}{d(d - r')}, \quad f - b = \frac{\left(dr' - r'^2 - r\sqrt{rr'}\right)^2}{d(d - r')},$$

$$\frac{g - f}{r - r'} = \frac{(r + r')d^2 - (2r^2 + 2r'^2 + 3rr')d + (r + r')(r^2 + r'^2 + rr')}{(d - r)(d - r')};$$

первыя двѣ разпости очевидно положительны; положительна и третья. Въ самомъ дѣлѣ, приравнивая нулю ея числителя и рѣшая получаемое ур. относительно d, находимъ ворни: r+r' и  $r+r'-\frac{rr'}{r+r'}$  Но вавъ шары лежатъ одинъ внѣ другаго, то d больше большаго изъ ворней r+r', и слѣд. числитель дроби, а потому и g-f положительны. Итакъ, доказано, что b < f < g < h.

Вычисляя затёмъ разности f-c,  $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ , получаемъ:

$$f - c = \frac{r'[r'(d - r')^2 - r^3]}{(d - r')^2}, \ \sqrt{b} - \sqrt{c} = \frac{r'(d\sqrt{r'} - r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})}{(d - r')\sqrt{d}},$$

отвуда видно, что обѣ разности будуть положительны, или же обѣ отрицательны, смотря потому, будеть-ли d больше или меньше  $r'+r\sqrt{\frac{r}{r'}}$  Затѣмъ, три ноличества b, c и f составять одно, если d будеть  $=r'+r\sqrt{\frac{r}{r'}}$  Отсюда заключаемъ, что когда  $d>r'+r\sqrt{\frac{r}{r'}}$ , количество c будеть < b, въ противномъ случаѣ будеть c>f. Далѣе изслѣдованіе покажеть, что когда  $d< r'+r\sqrt{\frac{r}{r'}}$ , то достаточно знать, что c>f, не фиксируя его мѣста относительно количествъ g и h. Изъ сказаннаго видно, что слѣдуеть различать 3 случая, см. по тому, будетъ-ли d больше, равно, или меньше суммы  $r'+r\sqrt{\frac{r}{r'}}$ .

1 случай: 
$$d>r'+r\sqrt{\frac{r}{r'}}$$

Главныя значенія  $m^2$  идуть возрастая въ порядк $^4$ : c, b, f, g, h. Будемъ увеличивать  $m^2$  отъ его наименьшей величины до наибольшей, наблюдая, что случится при переход $^4$  перем $^4$ ннаго чрезь одно изъ главных $^4$  его значеній.

 $1^0 \quad m^2 < b$ . Прежде всего видно, что нельзя давать  $m^2$  значеній меньшихъ c, или содержащихся между c и b, ибо  $m^2$  не м. б. < b по причинѣ необходимаго неравенства (3).

 $2^{0}$ .  $m^{2}$   $\equiv b$ . Получаенъ для x значеніе

$$x = \frac{dr\sqrt{r}}{r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'}};$$

н какъ въ настоящемъ случав эта величина больше r и меньше d-r', задача имветъ рвиненіе и только одно.

 $3^0$ .  $b < m^2 \le f$ . Такъ какъ  $m^2$  больше b, оба значенія x дѣйствительны и положительны; но какъ  $m^2$  меньше f и больше c, оба эти значенія меньше d-r'. Въ самомъ дѣлѣ, подстановка вмѣсто x въ ур. (1) количества.d-r' даетъ результатъ положительный, п произведеніе корней ур нія меньше  $(d-r')^2$ . Такъ какъ  $m^2$  также меньше g и h, то объясненіе, подобное предыдущему, покажетъ, что оба значенія x больше r. Итакъ, доказано, что когда  $m^2$  содержится между b и f, задача имѣетъ два рѣшенія.

Когда  $m^2 = f$ , одинъ изъ корней равенъ d - r', другой меньше d - r', ибо  $m^2 > c$  и слѣд. произведеніе корней меньше  $(d - r')^2$ : опять — два рѣшьнія.

- $4^0$ .  $f < m^2 \le g$ . Такъ какъ  $m^2$  больше f, результатъ подстановки d-r' вмѣсто x въ 1-ую часть ур. (1) отрицателенъ: сл. одинъ корень больше d-r', другой меньше. Но какъ  $m^2$  меньше g и h, оба корня больше r; сл. рѣшеніе только одно. Когда  $m^2 = g$ , одинъ корень = r, другой > r; но вмѣстѣ съ этимъ меньшій корень < d-r', между тѣмъ какъ другой больше; сл. опять задача имѣстъ только одно рѣшеніе.
- $5^{0}$ .  $m^{2} > g$ . Въ этомъ случай одно значеніе x больше r, другое меньше. Но какъ  $m^{2}$  больше f, одно пзъ значеній x меньше d-r', а другое больше; итакъ, меньшій и большій корни, соотвётственно меньше r и d-r', и больше r п d-r'. Задача невозможна.

# Резюме изслыдованія.

2 случай: 
$$d = r' + r. \sqrt{\frac{r}{r'}}$$

Въ этомъ случав c, b, f равны; п всегда f < g < h.

Имъемъ слъдующие результаты:

- 10.  $m^2 < f$ . Такъ какъ f = b, задача невозможна.
- $2^{0}$ ,  $m^{2}=f$ . Когда  $m^{2}=f$ , двойное значение d-r' всегда возможно.
- $3^{0}$ .  $f < m^{2} \le g$ . Какъ и въ предыдущемъ случав, задача имветь решеніе, птолько одно.
  - $4^{\circ}$ ,  $m^2 > g$ . Задача невозможна.

Замѣчая, что при f = b интервалла отъ b до f не существуетъ, видимъ, что результатъ изслѣдованія тотъ же, что п въ первомъ случаѣ.

3 случай: 
$$d < r' + r \cdot \sqrt{\frac{r}{r'}}$$

Главныя значенія  $m^2$ , за исключеніемь c, теперь возрастають въ порядкѣ: b, f, g, h. Что касается c, достаточно знать, что теперь c > f. Будемъ измѣнять  $m^2$ , заставля его проходить чрезъ главныя значенія b, f, g, h.

- $1^{\circ}$ .  $m^2 < f$ . Задача невозможна: въ самомъ дѣлѣ,  $m^2$  меньше f п c, поэтому оба значенія x больше d-r'.
- $2^{0}$ ,  $m^{2} = f$ . Въ такомъ случа одинъ изъ корней равенъ d r', другой больше: задача имъетъ одно ръшеніе.
- 30.  $f < m^2 \le g$ . Одно изъ значеній x будеть больше, другое меньше d-r'; и какъ въ то же время  $m^2$  меньше g н h, оба значенія x больше r: сл $\dot{\mathbf{r}}$ д. задача имъ̀стъ только одно рътеніе. Тоже самое будетъ, когда  $m^2$  равно g, ибо одинъ изъ корней равенъ r, а другой больше d-r'.
  - $4^{\circ}$ .  $m^2 > g$ . По той же причинъ вавъ и въ первомъ случаъ задача невозможна.

## Резюме изслъдованія.

. 
$$d < r' + r. \sqrt{\frac{r}{r'}}$$
 
$$m^2 < f; \quad m^2 = f; \quad f < m^2 \le g; \quad m^2 > g.$$
 प्रस्ता. 0 1 1 0

Такъ какъ сумма поверхностей сегментовъ измъняется въ обратномъ смыслъ измъненіямъ  $m^2$ , то эта сумма им'єть maximum, соотв'єтствующій  $m^2 = b$  въ первомъ случав, и  $m^2 = f$  въ третьемъ.

#### Задача XXIII.

642. Въ данный шаръ радіуса г вписать усписнный конусь АВСД, имплошій данныя: высоту h и объемь  $\frac{1}{2}$   $\pi a^2 h$ .

Ръшение. Пусть будуть х, у, в радіусы FB, АЕ основаній и аповема АВ. Выражая, что объемъ тѣла  $=\frac{1}{3}\pi a^2 h$ , имѣемъ ур-ніе

Проведя радіусь ОА, прямыя ОІ, АН, соотв'ятственно иерпендикулярныя къ AB и FB, и параллель IL въ BF, изъ треугольниковъ AOI и АНВ имфемъ:



$$(x-y)^2 = z^2 - h^2, \ldots (3)$$

а изъ подобія тр-въ ОІІ и АВН получаемъ

$$(x+y)^2 = \frac{h^2(4r^2-z^2)}{z^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

Черт. 71.

 $\boldsymbol{L}$ 

Помноживъ ур. (1) на 4 и вычтя (3), имфемъ

$$3(x+y)^2 = 4a^2 - z^2 + h^2$$
.

Приравнивая величины  $(x+y)^2$  изъ этого ур. и изъ (4), получ

$$z^4 - 4(a^2 + h^2)z^2 + 12h^2r^2 = 0.$$
 (5)

Отсюда 
$$z = \sqrt{2(a^2 + h^2 + \sqrt{(a^2 + h^2)^2 - 3h^2r^2})}$$
. . . . . . . (6)

### Изслъдованіе.

643. Апализъ. — Все дѣло, очевидно, въ вычисленіи z. Но недостаточно, чтобы величина z была дѣйствительною и положительною; нужно еще, чтобы она была не меньше h и не больше 2r. Можно разсматривать усѣченные конусы обоего рода, къ которымъ, какъ легко убѣдиться, одинаково прилагаются ур-нія (1), (3) и (4), и слѣд. ур. (5). Значеніе z даеть усѣченный конусъ 1-го или 2-го рода, смотря потому, меньше-ли оно или больше  $\sqrt{2rh}$ . Въ самомъ дѣлѣ, въ трапеціи АВСО произведеніе AВ  $\times$  АС стороны на діагональ равно 2rh, а какъ нзъ двухъ линій АВ и АС меньшая есть первая или вторая, смотря потому, 1-го ли или 2-го рода отрѣзовъ конуса, то сторона z меньше  $\sqrt{2rh}$  въ первомъ случаѣ и больше во второмъ. Если  $z=\sqrt{2rh}$ , отрѣзовъ дѣлается полнымъ конусомъ.

Зная это, находимъ во-первыхъ для дъйствительности в условіе

$$a^2 \gg h(r\sqrt{3}-h)$$
. . . . . . . . . . . . . . . . (7)

(Можно замѣтить, что когда h равно или больше  $r\sqrt{3}$ , условіе само собою удовлетворяется).

Какъ скоро неравенство (7) существуеть, то, въ силу ур. (5), оба значенія  $s^2$  д'яйствительны и положительны.

Затімь, чтобы сравнить значенія  $z^2$  съ  $h^2$ ,  $4r^2$  и 2rh, подставляемъ поочередно эти три воличества въ первую часть ур-нія (5), разсматривая ее вакъ триномъ ввадратный относительно  $z^2$ . Находимъ слідующіе результаты подстанововъ:

$$h^2(12r^2-4a^2-3h^2)$$
 для  $h^2$ . . . . . . . . (8)  $4r^2(4r^2-4a^2-h^2)$  ,  $4r^2$  . . . . . . . . (9)

$$8rh(2rh-r^2-a^2)$$
 "  $2rh$  . . . . . (10).

Приравнивая нулю каждый изъ этихъ трехъ полиномовъ и рѣшая относительно  $a^2$  получаемыя ур-нія, найдемъ слѣдующія главныя значенія для  $a^2$ :

$$\frac{3}{4}(4r^2-h^2)=e, \qquad \frac{4r^2-h^2}{4}=d, \qquad h(2r-h)=c.$$

Вторую часть неравенства (7) следуеть также разсматривать какъ главное значение  $a^2$ ; полагаемъ

$$h(r\sqrt{3}-h)=b.$$

Такъ какъ произведеніе корней, по ур. (5), независить оть  $a^2$ , то новыхъ главныхъ значеній не получимъ, сравнивая это произведеніе съ количествами  $h^4$ ,  $16r^4$  и  $4r^2h^2$ .

Теперь сдъдуеть узнать, вы вакомы порядкъ идуть возрастая количества b, c, d, e. Во-первыхъ, очевидно, что b < c, и что d < e. Вычислимы затъмы разности d - b, e - c, d - e.

Имфемъ:

$$d-b=\frac{(h\sqrt{3}-2r)^2}{4}; \qquad e-c=\frac{(2r-h)(6r-h)}{4}; \qquad d-c=\frac{(2r-3h)(2r-h)}{4}.$$

Двѣ первыя разности всегда положительны; третья же — положительна, равна нулю, или отрицательна, см. пот. будеть-ли h <, =, или  $> \frac{2r}{3}$ . Итакъ, видно,

что смотря по тому, будеть-ли h меньше или больше  $\frac{2r}{3}$ , главныя значенія  $a^2$  распредѣляется такъ: b, c, d, e; b, d, c, e.

Когда 
$$h=\frac{2r}{3}$$
,  $c$  и  $d$  будуть равны.

Замѣтимъ еще, что произведеніе обоихъ значеній  $z^2$ , т. е.  $12h^2r^2$  всегда больше  $h^4$  и  $4h^2r^2$ , слѣд. никогда не можетъ случиться, чтобы два значенія z были оба меньше h или  $\sqrt{2rh}$ . Но какъ произведеніе значеній  $z^2$  меньше или больше  $16r^4$ , смотря по тому, меньше ли или больше h количества  $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ , это послѣднее количество слѣдуетъ также разсматривать, какъ главную величину количества h.

**644.** Синтвзъ. — Изъ предыдущаго анализа видно, что пасавдование распадается на такія три главиме случая:

$$h \le \frac{2r}{3}; \qquad \frac{2r}{3} < h \le \frac{2r\sqrt{3}}{3}; \qquad h > \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Первый случай.  $h \leq \frac{2r}{3}$ .

Измѣненія а2	Число	ръшеній.
	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < b$	0	0
$a^2 = b$	0	1
$b < a^2 \le c$	. 0	2
$c < a^2 \le d$	1	1
$d < a^2 \le e$	1	0
$a^2 > e$	0	0 *

Рѣшеніями 1-го рода названъ усѣченный вонусъ 1-го рода, рѣшеніями 2-го рода отрѣзовъ конуса 2-го рода. Главныя величины взяты въ порядкѣ: b, c, d, e;  $a^2$  измѣняемъ съ b до e, проходя черезъ промежуточныя значенія c и d.

- 1°.  $a^2 < b$ . Объ величины z мнимы: задача невозможна.
- $2^{0}$ .  $a^{2}=b$ . Для z получаемъ формулу:  $z=\sqrt{2rh\sqrt{3}}$ . Эта величина больше h п  $\sqrt{2rh}$ , но меньше 2r, нбо  $h<\frac{2r}{3}$ , а потому меньше н  $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ . Слёдов. нмѣемъ усѣч. конусъ 2-го рода.
- $3^{0}$ .  $b < a^{2} \le c$ . Количество  $a^{2}$  меньше c, d, e; слёд. полиномы (8), (9) и (10) положительны; и какъ h меньше  $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ , обѣ величины z меньше 2r и больше h и  $\sqrt{2rh}$ . Задача имѣетъ два рѣшенія 2-го рода.

Когда  $a^2=c$ , одна изъ величинъ z равна  $\sqrt{2rh}$ , и ей соотвътствуетъ цълый конусъ; вторая величина остается меньше 2r, по больше h и  $\sqrt{2rh}$ : она даетъ отръзокъ 2-го рода. Такъ какъ полный конусъ можно разсматривать безразлично какъ отръзокъ 1-го или 2-го рода, то можно сказать, что и въ этомъ случат задача имъетъ два ръшенія 2-го рода.

 $4^{0}$ .  $c < a^{2} \le d$ . Такъ какъ  $a^{2}$  становится больше c, полиномъ (10) отрицателенъ, и одна изъ величинъ s меньше  $\sqrt{2rh}$ , между тъмъ какъ другая больше. Но оба эти значенія остаются, какъ и прежде, больше h, но меньше 2r: имъемъ одно ръшеніе 1-го, и одно ръшеніе 2-го рода.

Когда  $a^2 = d$ , одна изъ величинъ z становится равною 2r, другая меньше 2r; но они всегда больше h, и одна больше  $\sqrt{2rh}$ , другая—меньше. Слѣд. онять имѣемъ отрѣзокъ 1-го рода, и отрѣзокъ 2-го рода, только этотъ послѣдиій имѣемъ аповему=2r.

 $5^{0}$ .  $d < a^{2} \le e$ . Такъ какъ  $a^{2} > d$ , полиномъ (9) отрицателенъ, п одна изъ величинъ z меньше 2r, другая—больше. Значеніе z, большее 2r, отбрасываемъ, и какъ меньшее значеніе z меньше  $\sqrt{2rh}$ , а другое больше, имѣемъ только одно рѣшеніе: отрѣзокъ 1-го рода.

Когда  $a^2 = e$ , получаемъ цилиндръ высоты h.

 $6^{\circ}$ .  $a^{\circ} < e$ . Задача невозможна. Въ самомъ дълъ, пока  $a^{\circ}$  превосходить e, одно изъ значеній z меньше, а другое больше нежели h и 2r. Поэтому, первое должно быть отброшено какъ меньшее h, а другое—какъ большее 2r.

Когда  $h = \frac{2}{3} r$  заключенія остаются тіже, какі и ири  $h < \frac{2}{3} r$ . Только оба преділа c п d ділаются равными, и потому интервалла между c и d въ таблиці изслідованія не будеть.

Затэмъ, безъ новыхъ объясненій, слёдують таблицы для двухъ послёднихъ случаевъ: содержащіяся въ нихъ детали изслёдованія найдемъ, слёдуя пути, указанному въ первомъ случаъ.

Второй случай:  $\frac{2r}{3} < h \le \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ .

ismbhehin $a^2$ .	Число решеній.		
	1-го рода.	2-го рода.	
$a^2 < b$	0	0	
$a^2 = b$	0	1	
$b < a^2 \le d$	0	<b>2</b>	
$d < a^2 \le c$	0	1	
$c < a^2 \le e$	1	0	
$a^2 > e$	0	0.	

Третій случай:  $h < \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ 

Измъненія $a^2$ .	Число рашеній.		
	1-го рода.	2-го рода	
$a^2 < d$	0	0	
$a^2 = d$	0	1	
$d < a^2 \le c$	0	1	
$c < a^2 \le e$	1	0	
$a^2 > e$	0	0	

Сделаемъ только следующія замечанія:

Когда  $h=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ , d равно b, и во второй таблицѣ нужно только опустить интервалль отъ d до b.

Что касается третьей таблицы, то нисшій предѣль  $a^2$  равень d вмѣсто b. Но это значить, что какъ h больше  $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$  когда  $a^2$  меньше d, то оба значенія s становятся больше 2r.

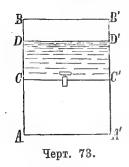
Иримъчаніе. Такъ какъ такітит  $a^2$  во ветхъ случанхъ равенъ e, то заключаемъ, что вет отръзки конуса данной высоты, вписанные въ шаръ, всегда меньше цилиндра той же высоты. Но minimum  $a^2$  различенъ, смотря по тому, меньше ли b нли больше нежели  $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ : онъ равенъ b въ первомъ случат, и d — во второмъ. Когда  $b = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ , d равно b, и оба minima сливаются въ одинъ.

#### 645. Задачи.

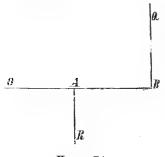
Нижеследующія задачи должны быть изследованы вполне, а maxima и minima, когда они встречаются, лолжны быть указаны какъ простая леталь изследованія.

вогда они встрѣчаются, должны быть указаны вакъ простая деталь изслѣдованія.

1. Цилиндрическій сосудъ высоты 1, плотно закрытый въ верхней части, содер-



- житъ въвоторое количество жидеости, высота которой = h; воздухъ надъ жидвостью находится подъ давленіемъ атмосферы. Въ диъ сосуда дълаютъ отверстіе на столько узкое, чтобы витемаетъ. Спрашивается, какова будетъ высота жид-кости въ сосудъ, когда истеченіе превратится?
- 2. Цилиндрическій сосудь ABA'B' раздівлень на двів части перегородкой CC', снабженной краномь. Нижняя часть ACA'C', которой высота равна l, содержить воздухь подъ атмосфернымь давленіемь H; вы верхней части находится колонна ртути CDC'D' высоты h и воздухь годь давленіемь
- Н. Отерываютъ кранъ, причемъ ртуть начинаетъ вытекать въ нижнюю часть сосуда. Опредёлить высоту колонны ртути, вытекшей изъ верхней части въ нижнюю, по окончанія истеченія.
- 3. Камень, брошенный снизу вверхъ, ударяется въ преграду В, находящуюся на вертикалъ; опредълить высоту АВ, зная, что прошло t секундъ отъ момента, въ который наблюдатель, находящійся въ А, услыхалъ ударъ, до момента, въ который камень возвратился въ точку А.
- 4. На неопределенной прямой даны двё точки А п В, разстояние между которыми равно 10 метрамъ. Два тёла пробёгають эту прямую въ направлени АВ, и приходять одновременно, одно въ точку А со скоростью 3 метровъ въ секунду, другое въ точку В со скоростью v метр. въ секунду. Первое тёло движется равномёрно ускореннымъ движениемъ, причемъ скорость его возрастаетъ на 1 метръ въ секунду; движение втораго тёла равномёрно. Спрашивается: 1) Черезъ сколько секундъ послё одновременнаго прохода 1-го тёла черезъ А, а 2-го черезъ В первое тёло встрё-



Черт. 74.

тится со вторымъ; 2) вакому условію должна удовлетворять скорость v втораго тѣла, чтобы встрѣча имѣла мѣсто въ разстояніи отъ точки В, меньшемъ 10 метровъ; 3) въ какомъ разстояніи отъ точки В произойдеть встрѣча, если v = 4 метрамъ?

5. Данъ прямолинейный горизонтальный рычагь, котораго точка опоры О находится по одну сторону отъ точевъ приложенія силъ. Данная сила В приложена въ точкі А перпендикулярно къ АО; найти на продолженіи этой линіи такую точку В, что если приложить въ ней данную силу Q, параллельно и противо-

положно B, то чтобы рычагь находился въ равновѣсін. Предполагается, что точка B есть конецъ рычага, что рычагь одпороденъ, а вѣсъ единицы длины равенъ  $\pi$ .

- 6. Найти стороны прямоугольника, зная: 1) ихъ сумму a и сторону b равновеликаго квадрата; 2) ихъ разность d и сторону b равновеликаго квадрата; 3) діагональ d и периметръ 2p; 4) діагональ d и сторону равновеликаго квадрата b.
  - 7. Въ данный квадратъ вписать квадратъ данной илощади  $m^2$ .
- 8. Въ  $\triangle$  съ основаніемъ b и высотою h вписать прямоугольникъ данной площади  $k^2$ .
- 9. Данъ кругъ радіуса R и внѣ его точка A въ разстояніи d отъ центра. Провести черезъ точку A сѣкущую ABC такъ, чтобы ея внутренній отрѣзокъ BC равнялся: 1) радіусу; 2) данной линіи l.
- 10. Внутри даннаго прямоугольника ABCD, котораго изм'вренія суть: AB = a, AD = b, провести въ сторонамъ BC, CD, параллели B'C', C'D' въ равномъ отъ сторонъ разстояніи, такъ чтобы прямоугольникъ A'B'C'D' составляль половину ABCD.
- 11. Въ правильномъ  $\triangle$  ABC сторона =a; на основани BC въ разстояни =b отъ В дана точка F. Провести прямую DE параллельно BC такъ, чтобы отрѣзокъ ел DE въ углѣ A былъ видѣнъ изъ точки F подъ прямымъ угломъ.
- 12. Данъ прямоугольникъ ОАРВ (измъренія: OA = a, OB = b); найти на ОА п ОВ или на ихъ продолженіяхъ такія двѣ точки М и N, чтобы соединивъ ихъ съ вершиною Р, противоположною А, получить правильный  $\triangle$ PMN.
- 13. На биссектриссѣ ОР прямаго угла дана точка Р въ разстояніи ОР  $\equiv d$  отъ вершины. Найти на сторонахъ АО и ВО такія точки М и N, чтобы, проведя РМ, РN, получить прав.  $\triangle$  РMN.
- 14. На сторонахъ СА, СВ треугольника ABC взяты отръзки СG = CF = d и проведена прямая FG. Требуется равнобедренный  $\triangle$  CFG преобразовать въ другой  $\triangle$  CED, ему равновелный, прямою ED такъ, чтобы AD = BD.
- 15. Въ прямоугольникѣ ABCD провести прямую DM, встрѣчающую AB въ точѣѣ M, такъ, чтобы: 1)  $DM^2 + MB^2 = K^2$ ; 2)  $DM^2 = AM.BM$ .
- 16. На окружности полукруга діаметра АВ дана точка Р. Требуется провести черезъ эту точку прямую Px (пересъкающую діаметръ въ точкx) такъ, что если къ діаметру возставимъ перпендикуляръ xy (точка y на окр.), то чтобы  $Px^2 xy^2 = d^2$ .
- 17. На діаметрѣ AB шара найти такой отрѣзовъ AI, что если черезъ точку I проведемъ плоскость CD, перпендикулярную въ діаметру, то. 1) чтобы поверхность сегмента CAD равнялась боковой пов. конуса CBD; 2) чтобы сумма поверхностей сегмента высоты AI и боковой поверхности конуса COD равнялась бы данному кругу  $\pi a^2$ ; 3) чтобы отношеніе объема сегмента CAD въ объему сферич. сектора CODA равнялось данному числу m; 4) если черезъ центръ шара провесть плоскость EF перпендикулярно въ AB, то чтб. объемъ слоя, содержащагося между кругами CD и EF, относился въ объему усѣченнаго конуса, имѣющаго основаніями тѣже круги, какъ m: 1.
- 18. Въ прямоугольномъ  $\triangle$  ABC (А прямой уг.) провести прямую DE паралдельно AC такъ, чтобы поверхность, описанная доманой CDE при обращении фигуры около AB, равнялась данному кругу  $\pi m^2$ .
- 19. Построять △, зная сторону, прилежащій уголь и отношеніе площади этого △ къ площиди тр-ка, составляемаго двумя биссектриссами даннаго угла съ противоположною стороною.
- 20. Въ концѣ В діаметра АВ проведена касательная; найти на ней такую точку C, что если соединимъ ее съ другимъ концомъ діаметра, то внѣшній отрѣзокъ CD имѣлъ бы данную длину a.

- 21. На гипотенувѣ даннаго прямоугольнаго  $\triangle$  найти такую точку, чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ катетовъ равнялась  $m^2$ .
- 22. На сторонъ АВ прямоугольника ABCD найти такую точку Е, изъ которой стороны AD и CD были бы видны подъ равными углами.
- 23. Въ данномт  $\triangle$  ABC пом'єстись прямую DE параллельно BC такъ, чгобы: 1) площадь  $\triangle$  BDE равинлась данному квадрату  $K^2$ ; 2)  $DE^2 = DB \times BC$ .
- 24. Въ прямоугольникъ ABCD измъренія равны b и h. Провести черезъ вершину D прямую MDN, пересъвающую линін AB и AC въ точкахъ N и M, такъ, чтобы:
- 1)  $\triangle$  MCD +  $\triangle$  DBN = k.bh, гдb k данное число; 2) DM2 + DN2 = k.bh;
- 3) DM × DN =  $m^2$ .
- 24. Данную прямую a дѣлять пополамъ и продолжають. Найти длену продолженія подъ условіємъ, чтобы прямоугольнивъ, имѣющій измѣреніями  $\frac{a}{2}$  и сказанное продолженіе, быль равновеликъ ввадрату, построенному на продолженіи.
- 25. На гипотенузѣ ВС прямоугольнаго  $\triangle$  наѣти такую точку M, что если соединимъ ее съ A и опустимъ перпендикуляръ MD на AB, то чтобы  $\triangle$  AMD  $= m^2$ .
- 26. На двукъ смежныхъ сторонахъ квадрата, какъ на діаметрахъ, извиѣ построены 2 полукруга, къ которымъ проведены касательныя нараллельно сторонамъ квадрата. Построить кругъ, касательный къ сказаннымъ кругамъ и касательнымъ.
- 27. Черезъ точку Р, взятую внутри круга, провести хорду такъ, чтобы она въ этой точке делинась въ крайнемъ и среднемъ отношения.
- 28. Построить прямоугольный △ по данным»: 1) сумый з катетовъ и площади  $k^2$ ; 2) разности катетовъ и высотъ; 3) биссектриссъ прямаго угла и высотъ; 4) сторонамъ двухъ вписанныхъ квадратовъ; 5) суммъ (или разности) катетовъ и разности отръзковъ, образуемыхъ высотою на гипотенузъ; 6) биссектриссъ прямаго угла и отношенію катетовь; 7) радіусу вписаннаго круга и площади; 8) гипотенузь и радіусу вписаннаго круга; 9) гипотенуз'в и площади; 10) гипотенуз'в и разности катетовъ; 11) гипотенузъ и суммъ катетовъ съ высотою; 12) периметру и суммъ объемовъ, происходящих отъ обращенія тр-ка около каждаго катета; 13) высоть и произведенію трехъ сторонь; 14) высоть и радіусу вив-виисаннаго круга, касательнаго къ одному изъ катетовъ; 15) одному изъ катетовъ и радіусу вписаннаго круга; 16) высоть (или гинотенузь) и объему, происходящему отъ обращения тр-ка около гинотевузы; 17) периметру и сумм $\dot{\mathbf{E}}$  ( $\pi m^2$ ) поверхностей, описанныхъ катетами при обращеній тр-ка около гипотенузы; 18) перпметру и отношенію объема, производимаго обращеніемъ около гипотенузы, въ сумм'я объемовъ, производимыхъ обращеніемъ около катетовъ; 19) периметру и высотъ; 20) гипотенувъ и высотъ; 21) радіусу вимсаннаго круга и сторонѣ вписаннаго квадрата, помѣщеннаго въ прямомъ углѣ; 22) гипотенузѣ и периметру; 23) периметру и биссектриссѣ прямаго угла; 23) площади и сумм'в гипотенузы и высоты; 24) радіусу вписаннаго круга и сумм'в поверхностей, описанныхъ катетами при обращении фигуры около гипотенузы.
  - 29. Построить 🛆, зная высоту и радіусы вписаннаго и описаннаго круговъ.
- 30. Опредълить стороны  $\triangle$ , зная его периметръ 2p, произведение двухъ сторонъ  $bc = m^2$ , зная, кромъ того, что медіаны, соотвътствующія сторонамъ b и c, пересъваются подъ прямымъ угломъ.
- 31. Вычислить стороны равнобедреннаго  $\triangle$ , зная медіану и высоту, выходящія изъ вершины основанія.

- 32. Построить △, зная одинъ изъ его угловъ, биссектриссу его и разность сторопъ, заключающихъ данный уголъ.
- 33. Въ  $\triangle$  извъстны: основаніе b, высота h и разность d двухъ другихъ сторонъ. Вычислить эти стороны.
- 34. Опредълить стороны  $\triangle$ , зная сумму 2s двухъ сторонъ, высоту h, соотвътствующую третьей сторонъ, и разность 2d отръзковъ, образуемыхъ ею на этой сторонъ.
  - 35. Рашита 🛆, зная одну изъ сторонъ, периметръ и радіусъ описаннаго круга.
- 36. Рѣшить △, зная периметръ, высоту и отношеніе отрѣзковъ, образуемыхъ высотою на основаніи.
- 37. Вписать въ данный кругъ равнобедренный  $\triangle$ , зная: 1) сумму (или разность) основанія и высоты; 2) что сумма квадратовъ трехъ сторонъ его равняется данному квадрату  $m^2$ .
- 38. Построить △, зная: его площадь, сумму двухъ сторонъ и сторону виисаннаго квадрата, опирающагося на третью сторону треугольника, или же длину внутренней биссектриссы, заключающейся между сказанными сторонами.
- 39. Данъ угодъ и внутри его точка Р. Провести черезъ эту точку прямую такъ, чтобы: 1) прямоугодьникъ, составленный изъ отрѣзковъ, образуемыхъ искомого прямого на сторонахъ даннаго угла, былъ равновеликъ данному квадрату  $k^2$ ; 2) сумма тѣхъ же отрѣзковъ равнялась данной прямой l.
  - 40. Найти стороны равнобочной трапецін, зная ся высоту, периметръ и площадь.
- 41. Въ транецін, которой одинъ бокъ AB перпендикуляренъ къ основаніямъ, даны: AB = a, площадь s и периметръ p; вычислить остальныя стороны.
- 42. Зная сумму 4a діагоналей ромба и радіусь r вписаннаго круга, вычислить об $\dot{b}$  діагонали и сторону.
  - 43. Описать около даннаго круга равнобочную транецію данной площади  $a^2$ .
- 44. Черезъ концы діаметра даннаго круга проведены двѣ касательныя. Провести третью касательную такъ, чтобы она съ первыми двумя образовала трацецію: 1) даннаго периметра; 2) данной площади.
- 45. Въ данномъ  $\triangle$  ABC провести прямую DE параллельную BC, такъ, чтобы трапеція DEBC имѣла данную площадь  $k^{q}$ .
- 46. Вписать въ данный кругь трапецію, зная ся: 1) площадь и непараздельныя стороны; 2) высоту и площадь.
- 47. Вычислить стороны описуемой равнобочной транеціи, зная ел периметръ 4p и радіусь R описаннаго около нея круга.
- 48. Данъ равносторонній △ ABC. Провести чрезъ средину О стороны BC сѣкущую до встрѣчи съ стороною AB въ М, и съ продолженіемъ стороны AC въ N, такъ чтобы разность илощадей треуг-въ ОСN и ОМВ равнялась треуг-ку ABC.
- 49. Въ данный △ вписать прямую такъ, чтобы она разбила его на 2 части одинаковыхъ переметра и площади.
- 50. Въ четыреугольнив АВСД углы В п D прямые; известны: діагональ AC=a, периметрь 2p и площадь s. Опредёлить стороны: AB=x, BC=y, CD=x', DA=y'.
- 51. Провести въ  $\triangle$  сѣкущую касательно къ вписанному кругу, такъ чтобы она отсѣкала  $\triangle$  данной илощади.
- 52. Вычисанть радіусь нормандскаго окна (состоящаго изъ прамоугольшика, завершаемаго полукругомъ) по даннымъ: полной высотъ и площади.

- 53. Около даннаго прямоугольника описать равнобедренный 🛆 данной площади.
- 54. Данъ прямоугольнивъ ABCD, На продолжении стороны BC взята точка М и соединена съ А; прямая АМ встрѣчаетъ сторону CD съ точкѣ N. Найти точку М такъ, чтобы сумма  $ADN + MNC = k^2$ .
- 55. Даны стороны a, b и c треуг-ка, причемъ a>b>c. На сколько нужно уменьшить каждую сторону, чтобы стороны a-x, b-x и c-x образовали прямо-угольный тр-къ?
  - 56. Вписать въ вругъ прямоугольникъ, равновеликій данному ввадрату.
- 57. Въ вругѣ радіуса R дана точка P въ разстояніи OP = a отъ центра. Въ кавихъ разстояніяхъ (x п y) отъ центра должны быть проведены черезъ точку P перпендикулярныя между собою хорды AC и BD, чтобы четыреугольникъ ABCD имфлъ данную площадь  $m^{2}$ ?
- 58. Данъ равнобедренный  $\triangle$  ABC, котораго основаніе BC  $\Longrightarrow$  2b, а каждая изъравныхъ сторонъ равна c. Найти на BC двѣ точки D и E, а на сторонахъ AB и AC по точкѣ G и F, такъ чтобы пятіугольникъ DEFAG былъ равносторонній.
- 59. Данъ полукругъ АОВ и къ нему касательная АС въ концъ А діаметра АВ. Найти на полуокружности такую точку М, чтобы, опустивъ изъ нея перпендикуляръ МС на касательную и соединивъ М съ В, имѣтъ: МВ+2МС=1, гдъ 1 данная примая.
- 60. Дана окружность радіуса R и прямая въ разстояній d отъ центра. Построить квадрать, котораго одна сторона была бы хордою даннаго круга, а противоположная ей лежала бы на данной прямой.
- 61. Данъ полувругъ діаметра AB и къ нему касательная въ точкѣ B. Провести прямую AD, встрѣчающую окружность въ точкѣ C, а касательную въ D, подъ условіемъ, чтобы  $2 \cdot AC + AD = 4k^2$ .
- 62. Данъ кругъ и въ немъ два перпендикулярные діаметра. Найти на квадрантъ СВ такую точку М, что если опустимъ перпендикуляры МР и MQ на діаметры и будемъ вращать прямоугольникъ около CD, то чтобы произведенная имъ полная поверхность равнялась  $2\pi m^2$ .
- 63. Къ данной окружности въ точкъ А проведена касательная xy и изъ конечныхъ точекъ діаметра CD опущены на нее перпендикуляры CE и DF. Какое положеніе нужно дать діаметру CD, чтобы при обращеніи трапеціи CDFE около линіи xy получить усъченный конусъ, котораго полная поверхность: 1) пиъла бы данное отношеніе въ кругу OA; 2) равнялась бы данному кругу  $\pi m^2$ .
- 64. Данъ кругъ діаметра AB; проведены: хорда AC п ей симметричная хорда AD; затѣмъ точки C и D соединены прямою. Дать хордѣ AC такое положеніе, что-бы  $AC^2 + AD^2 + CD^2 = 4m^2$ .
- 65. Въ вругѣ діаметра АВ проведена хорда СD, перпецдивулярная въ діаметру. Помъстить эту хорду такъ, чтобы  $AC^2 + CD^2 = m^2$ .
- 66. Данъ конусъ; на какое количество x надо уменьшить его высоту H и увелячить радіусъ основанія R, чтобы конусъ, имѣющій высоту H x и радіусъ основанія R + x, быль равновеликъ данному.
  - 67. Около даннаго шара описать копусъ, имеющій данную полную поверхность.
- 68. На линін центровъ двухъ шаровъ найти такую точку, изъ которой на обонхъ шарахъ были бы видны равновеликія зоны,

- 69. Вписать въ данный шаръ такой конусъ, объемъ котораго находился бы въ данномъ отношени къ объему сегмента, лежащаго по другую сторону основания конуса.
- 70. Найти измѣренія прямоугольнаго параллелопипеда, зная сумму его 12 реберъ, сумму боковыхъ граней и сумму основаній.
- 71. Даны: поверхность и діагональ прямоугольнаго параллелопинеда. Найти его изм'єренія, зная, что они составляють непрерывную пропорцію: 1) арнеметическую; 2) геометрическую.
- 72. Высота h усѣченнаго конуса есть средняя пропорціональная между діаметрами основаній. Полагая, что h дана, вычислить радіусы основаній, нодъ условіємъ, чтобы полная поверхность усѣченнаго конуса равнялась  $\pi a^2$ .
- 73. Въ транеціи, одинъ бокъ (AB) которой перпендикуляренъ къ основаніямъ AD и BC, извѣстны: длина l навлоннаго бока, илощадь  $a^2$  транеціи и объемъ  $\frac{3}{4}\pi b^3$ , производимый фигурою ири обращеніи около CD. Найти бокъ AB. Указать также, что особенное даютъ частные случаи: l = a, l = 3a.
- 74. Чрезъ вершину А треугольника ABC проведена прямая, на которую опущены перпендикуляры BB' и CC' изъ вершинъ B и C. Дать этой прямой такое положеніе, чтобы BB'2 + CC'2  $= m^2$ .
- 75. Зная объемъ  $\frac{\pi a^3}{3}$  и полную поверхность  $\pi b^2$  конуса SAB, опредъдить радіусъ основанія и высоту.—При какомъ отношеніи между a и b треугольникъ SAB, получаемый въ съченіи конуса по оси, будетъ правильный.
- 76. Данъ конусъ, котораго радіусь R, аповема a. Вычислить радіусы основаній усѣченнаго конуса, той же высоты какъ и данный, зная, что сумма площадей основаній усѣченнаго конуса равна полной поверхности даннаго, и что разность между объемами усѣченнаго и даннаго конусовъ равна объему цилиндра той же высоты, имѣющаго основаніе, равное среднему сѣченію искомаго тѣла.
- 77. Данъ вонусъ, котораго объ полости продолжены неограниченно. Конусъ пересъченъ плоскостью, перпендикулярною къ оси. Провести другую плоскость, паралкельную первой, такъ, чтобы боковая поверхность полученнаго тъла находилась въ данномъ отношеніи съ суммою основаній.
- 78. Дана прямая AB = 2a. Опредёлить радіусь x вруга, проходящаго черезь точки A и B, такъ, чтобы четыреугольникъ ABCD, котораго вершинами служатъ точки A и B и вонцы C и D діаметра CD, перпендикукярнаго къ AB, им'єль: 1) данный периметрь 4p.; 2) данную разность (DB + DA) (CB + CA).
- 79. Два прямоугольника имѣютъ измѣренія: x, y и x', y'. Даны: сумма основаній, сумма площадей и площади прямоугольниковъ (xy') и (yx'). Найти измѣренія искомыхъ прямоугольниковъ.
- 80. Найти радіусы основаній устченнаго конуса, зная его высоту, боковую поверхность и разность радіусовъ основаній.
- 81. Два конуса равной высоты имѣють общее основаніе, и вершины ихъ расположены по обѣ его стороны. Провести въ обоихъ по круговому сѣченію, такъ чтобы полученный усѣченный конусъ имѣлъ данную аповему и данную полную поверхность.
- 82. Дана полуокружность и точка М на діаметрb AB; AM = a. Проводять изъ М перпендикулярь MP въ діаметру. Провести изъ точки А сbкущую такъ, чтобы отрbзокъ ея, заключающійся между MP и окружностью, имbдъ данную длину b.

- 83. Въ данной полуокружности провести черезъ конецъ А діаметра АВ хорду АС и изъ точки С хорду СD, параллельную діаметру, такъ, чтобы: 1) АС+СD=m; 2) АС $^2+$ СD $^2=m^2$ .
- 84. Дана четверть круга. Провести къ дугѣ ея касательную такъ, чтобы OM + ON = l. (О—центръ, М и N—точки встрѣчи касательной съ конечными радіусами квадранта).
- 85. Вписать въ данный шаръ такой усеченный конусъ, который имелъ бы данныя: аповему и полную поверхность.
- 86. Въ данномъ полукругѣ діаметра AB проводять хорду AC и перпендикуляръ CD на діаметръ. Опредѣлпть точку C такъ, чтобы AC + CD = l.
- 87. Къ окружности проведена васательная ТА и діаметръ ТЅ черезъ точку касанія. Опредёлить на окружности точку Р такъ, чтобы сумма ея разстояній отъ діаметра и отъ касательной равнялась данной линіи *l*.
- 88. Даны двѣ параглельныя прямыя X и Y и точка A между ними; помѣстить треуг. AMN, прямоугольный при M, имѣющій даниую площадь  $k^2$ , такъ, чтобы M находилась на X, а N на Y.
- 89. Дала окружность діаметра AB и касательныя AX, ВУ; провести касательную (встрічающую AX въ М. а ВУ въ N) такъ, чтобы, обернувъ трапецію AMNB около AB, образовать объемъ, равновеликій шару даннаго радіуса а.
- 90. Дана окружность діаметра AB и точка D на діаметрѣ въ разстояніп а отъ центра. Провести черезъ эту точку сѣкущую DMN такъ, чтобы хорда MN была видна изъ средины ОА подъ прямымъ угломъ.
- 91. На прямой XV даны три точки A, B, C; найти на этой прямой точку M такъ, чтобы сумма ввадратовъ разстояній MA, MB, MC имъла данную величину  $k^2$ .
- 92. На гипотенувъ ВС прямоуг.  $\triangle$  ABC, между точками В и С, найти такую точку, сумма квадратовъ разстоявій которой отъ трехъ вершинъ имъла бы данную величину  $k^2$ .
- 93. Около даннаго правильнаго треугольника ABC описант кругъ. Провести хорду MN нараллельно BC такъ, чтобы сумма ея отрёзковъ между окружностью и сторонами AB и AC имела данную длину m.
- 94. Дана окружность и къ ней касательная; на этой прямой построенъ внё круга правильный △, котораго высота равна діаметру круга. Провести параллель къ сказанной касательной такъ, чтобы сумма ея отрёзковъ въ кругѣ и въ треугольникъ имъла данную величину т.
- 95. Дана овружность и на діаметрѣ AB взята точка С въ разстояніи a отъ пентра. Провести прямую СМN (точки М п N на окружности) такъ, чтобы  $CM^2 CN^2 = k^2$ .
- 96. Дана окружность діаметра AB и хорда AC подъ угломъ въ 30° кл діаметру. Найти на окружности точку M такъ, чтобы, опустивъ изъ нея перпендикуляръ MN на AB, а изъ N перп. NP на AC, имътъ:  $MN^2 + NP^2 = k^2$ .
- 97. Данъ △ ABC; провести параддель къ сторонѣ BC такъ, чтобы отсѣченный △ и трапедія образовали, при обращеніи фигуры около BC, равные объемы.
- 98. Въ окружности радіуса R вписана хорда AB, стягивающая  $\frac{1}{3}$  окружности; найти на окружности такую точку M, чтобы MA  $\stackrel{\cdot}{+}$  MB = данной линіи m.

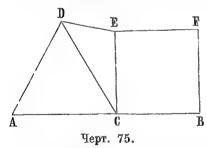
- 99. Двѣ окружности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Провести черезъ точку пересѣченія A сѣкущую MAN такъ, чтобы: 1) сумма квадратовъ обѣихъ хордъ имѣла данную величину  $4k^2$ ; 2) произведеніе  $AM \times AN$  имѣло данную величину  $k^2$ .
- 100. Данную транецію разд'єлить прямою, нарадзельною основаніямъ, на дв $\pm$  части, которыя относились бы между собою какъ m:n.
- 101. Въ данномъ полукругъ провести хорду CD, параллельную діаметру, такъ чтобы периметръ трапеціи ACDB былъ равенъ m.
- 102. Черезъ точку B, взятую на діаметрѣ AC круга ADC, провести перпендикуляръ BD къ діаметру такъ, чтобы AB + BD = l.
- 103. Вычислить стороны равнобочной трапеціи, зная: 1) высоту ея, площадь п объемъ, образуемый ею при обращеніи около одной изъ непараллельныхъ сторонъ; 2) зная периметръ 4p, площадь  $a^2$  и боковую поверхность конуса, образуемаго вращеніемъ трапеціи около прямой, соединяющей средины ея основаній, равную  $\pi b^2$ .
- 104, На продолженія AC стороны правильнаго  $\triangle$  ABC беруть точку P, соединяють ее съ точкую M, взятою на сторонъ AB и проводять параллель MN къ AC. Опредълять M такъ, чтобы PM  $\Longrightarrow$  MN.
- 105. Въ данный шаръ вписать такой цилиндръ, котораго объемъ равнялся бы сумме сегментовъ, лежащихъ на его основаніяхъ.
- 106. Даны длины 2l и 2l' двухъ параллельныхъ хордъ круга и разстояніе ихъ q; опредѣлять радіусъ круга.
- 107. Данъ кругъ О и двѣ внѣшнія точки А и В, причемъ ОА  $\equiv a$ , ОВ  $\equiv b$ , АВ  $\equiv d$ . Найти на окружности такую точку М, чтобы сумма квадратовъ разстояній МА и МВ равнялась  $m^2$ .
- 108. Въ шарå радіуса R проведенъ малый кругъ радіуса r. Опредåлить радіусъ другаго, ему параллельнаго, круга такъ, чтобы объемъ заключающагося между ними слоя находился въ данномъ отношеніи k съ конусомъ, вершина котораго находится въ центрå перваго круга, а основаніе совпадаетъ со вторымъ.
- 109. Черезъ точку пересечения двухъ круговъ провести секущую такъ, чтобы часть ея внутри обоихъ круговъ имела данную данну а.
- 110. Данъ прямоугольный при А треугольникъ ABC. Провести черезъ точку А прямую xy вн $\dot{\mathbf{E}}$   $\triangle$ -ка такъ, чтобы, опустивъ перпендикуляры BB' и CC' на xy, им $\dot{\mathbf{E}}$ т сумму треугольниковъ ABB' и ACC' равною данной площади  $k^2$ . Частный случай:  $k^2 = \text{пл. ABC}$ .
- 111. Данъ полукругъ радіуса R. Провести хорду CD, параллельную діаметру AB такъ, что если обернуть фигуру около радіуса ОЕ, перпендикулярнаго къ AB, то чтобы объемъ, описанный площадью, содержащеюся между линіями ОВ, ОР (Р—пересъченіе CD съ ОЕ) PD и дугою BD, относился къ объему, описанному трапеціей ОРОВ, какъ m:1.
- 112. Изъ средним основанія прямоугольника, какъ изъ центра, описана дуга AB круга, которой другое основаніе AB служить хордою; полученную т. о. фигуру обращають около перваго основанія. Зпая, что высота прямоугольника=h, что полная поверхность полученнаго тѣла  $= 2\pi a^2$ , вычислить основаніе прямоугольника.
- 113. Зная полную поверхность ( $\pi a^2$ ) конуса, касательнаго къ данному шару такъ, что центръ основанія конуса совпадаеть съ центромъ шара, вычислить радіусь основанія п высоту конуса.

- 114. Данъ шаръ радіуса R. Опредѣлнть на діаметрѣ AB такую точку C, что если провести черезъ нее илоскость FCE перпендикулярно къ діаметру, то: 1) чтобы поверхность сегмента высоты AC, сложенная съ боковою поверхностью конуса OFE, равнялась бы площади  $\pi a^2$  даннаго круга; 2) чтобы отношеніе объема того же сегмента къ сектору OFAE равнялось данному числу m; 3) чтобы отношеніе конуса FBE къ тому же сегменту равнялось m.
- 115. Вычислить радіусы основацій усѣченнаго конуса, описаннаго около шара радіуса R, зная, что отношеніе полной поверхности этого конуса къ поверхности шара равно m.
- 116. Вычислить радіусы основаній усѣченнаго конуса, зная его полную поверхность, длину образующей и то еще, что эта прямая съ нижнимъ основаніемъ составляеть уголь въ  $60^{\circ}$ .
- 117. Пересъчь шаръ двумя парадлельными плоскостями, разстояніе между которыми дано, такъ, чтобы сумма боковыхъ поверхностей двухъ конусовъ, касательныхъ къ шару по этимъ съченіямъ, имъла данную величину.
- 118. Въ полукругѣ радіуса R дать радіусу OC такое положеніе, чтобы сумма поверхностей, описанныхъ прямою OC и дугою CB при обрашеніи около діаметра равнялась  $\pi m^2$ .
- 119. Цилиндръ и конусъ имъютъ одинаковую высоту, равную данной линіи h. Каковы должны быть радіусы основаній, для того чтобы оба тѣла имѣли равныя полныя поверхности и равные объемы.
- 120. На прямой AB = a найти такую точку C, что если на AC описать полуокружность, черезъ точку B провести въ ней касательную (точка касанія—D) до пересъченія въ точку E съ касательною, проведенною въ A и обернуть фигуру около AB, то чтобы поверхность, описанная дугою AB, находилась къ поверхности, описанной прямою BE, въ данвомъ отношеніи m.
- 121. Въ данный  $\triangle$  вписать такой прямоугольникъ, чтобы при обращеніп осоло общей стороны получился цилиндръ, полная поверхность котораго равнялась бы поверхности шара радіуса R.
- 122. На сторовѣ ВС равносторонняго  $\triangle$  АВС найти точку D такъ, чтобы, проведя DF и DE соотвѣтственно параллельно АС и AD, объемъ, образуемый параллелограммомъ AFBE при обращеніи около ВС, составляль  $\frac{m}{n}$  долей объема, образуемаго самимъ треугольникомъ.
- 123. Данъ вругъ діаметра AD и въ нему васательная AC. Провести хорду DE перпендикулярно въ васательной AC, татъ чтобы  $\triangle$  AED, при обращенія около AC, образоваль данный объемъ.
- 124. Раздѣлить діаметръ даннаго полукруга на такія двѣ части, что если на каждой изъ нихъ описать по полукругу, то чтобы площадь, содержащаяся между 3 полуокружностями, равнялась данному кругу  $\pi m^2$ .
- 125. Данъ кругъ и точка, находящаяся въ разстояній a отъ центра. Провести черезъ эту точку съкущую такъ, чтобы: 1) ея хорда имъла данную длину b; 2) сумма квадратовъ отръвковъ съкущей имъла данную величину  $k^2$ .
- 126. Дана хорда AB = 2a въ кругѣ радіуса R; найти на окружности такую точку M, чтобы: 1)  $MA^2 + MB^2 = k^2$ ; 2) AM + BM = 2h; 3)  $AM \times BM = k^2$ .

- 127. Около даннаго шара описать: 1) усъченный конусъ, объемъ котораго былъ бы  $=\frac{4}{3}$   $\pi R^3$ . m, гдъ R радіусъ шара, m данное число; 2) конусъ, полная поверхность котораго равиялась бы данному кругу  $\pi m^2$ .
- 128. Вычислить радіусы уснованій усѣченнаго конуса, зная его объемъ, высоту и сумму радіусовъ основаній.
- 129. Найти высоту сферическаго сегмента, зная радіусъ R шара и величину  $\pi a^2$  полной поверхности сегмента.
- 130. Данъ шаръ О, около котораго описана цилиндрическая поверхность, касающаяся шара по большому кругу. Опредълить на оси цилиндра, въ равномъ разстояніи отъ центра, такія двѣ точки А и В, что если принять ихъ за вершины двухъ конусовъ, касательныхъ къ шару и продолженныхъ до встрѣчи съ цилиндромъ, то чтобы полная поверхность составленнаго тѣла имѣла данную величину.
- 131. Данъ кругъ радіуса R и къ нему 3 касательныя, изъ коихъ двё перпендикулярны къ третьей; провести четвертую касательную такъ, чтобы при обращеніи фигуры около третьей касательной, усёченный конусъ, описанный трапеціей, имёлъ данное отношеніе т къ шару, котораго радіусъ равнялся бы также R.
- 132. Данъ шаръ съ вписаннымъ конусомъ; провести плоскость параллельно основанію конуса такъ, чтобы разность съченій, образуемыхъ ею въ обоихъ тълахъ, равнялась данной площади.
- 133. Въ полукругъ діаметра AB вписываютъ прямоугольникъ DEFG и на сторовѣ его DE, параллельной AB, строятъ равнобедренный △ DEH съ вершиною Н на окружности. Опредѣлить прямоугольникъ такъ, чтобы при обращеніи фигуры около AB, объемы, описанные прямоугольникомъ и треугольникомъ, были равны.
- 134. Даны: радіуст основанія r и высота h конуса. Въ какомъ разстояніи x отъ вершивы нужно провести плоскость парадлельную основанію, чтобы объемъ усѣченнаго конуса быль вдвое больше шара діаметра x.
- 135. Данъ полукругъ діаметра AB и въ точкѣ A касательная AC, равная радіусу круга; проводять прямую CD, которая пересѣкала бы въ точкѣ D діаметръ AB или его прододженіе, затѣмъ обращаютъ фигуру около AB, причемъ полукругъ и △ ACD производятъ шаръ и конусъ. Въ какомъ разстояніи отъ основанія конуса нужно провести ему параллельную плоскость, для того чтобы сумма сѣченій въ обоихъ тѣдахъ была равновелика данному кругу.
- 136. Построены два устиченные вонуса 1-го и 2-го рода, съ общими основаніями; даны радіусы основаній и общая высота. Въ какомъ разстояніи отъ большаго основанія должно провести ему параллельную плоскость, чтобы разность площадей станай, образуемых этою плоскостью въ обоихъ транялась данному кругу.
- 137. Данъ полукругъ AFB, касательныя въ точкахъ A и B діаметра AB и точка E на этомъ діаметръ. Провести третью касательную, которая пересъкала бы первыя двъ въ точкахъ С и D такъ, чтобы объемъ, произведенный треугольникомъ СЕD при обращеніи фигуры около AB, былъ равновеликъ данному объему.
- 138. Два конуса съ равными высотами и расположенными по одной прямой, поивщены такъ, что вершина каждаго находится въ центрв основанія другаго. Пересвиь фигуру плоскостью, парадлельною основаніямъ такъ, чтобы разность свичній равнялась данному кругу.
- 139. Череза двё противоположныя вершины квадрата проведены 2 парадлельныя, а изъ двухъ другихъ вершинъ опущены перпендикуляры на эти прямыя. Четыре по-

лученныя прямыя образують квадрать. Опредёлить направленіе первых двухь паралленей подъ условіємь, чтобы отношеніе площади втораго квадрата къ площади перваго равнялось данному числу m. (За неизвёстное принять длину отрёзка, образуемаго одною изъ четырехъ прямыхъ на одной изъ сторонъ квадрата). Разсмотрёть частный случай:  $m=\frac{1}{5}$ .

- 140. Данъ прямоугольный при А треугольникъ ABC. Провести внутри угла А прямую DE, которая раздёлялась бы пополамъ высотою AH, а по длинё равнялась бы суммё перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ ея концовъ на гипотенузу. За неизвёстныя принять эти перпендикуляры.
- 141. Даны двѣ точки: L на сторонѣ ВС треугольника AВС, другая D—на ея продолженіи. Провести черезъ точку D сѣкущую, которая, встрѣчая АС и АВ въточкахъ Е и F, давала бы ∧ EFL данной площади.
- 142. Вычислить стороны вписанной въ данный кругъ трапеціи, зная ея высоту и сумму квадратовъ четырехъ ея сторонъ.
- 143. Тъло составлено изъ цилиндра и двухъ конусовъ, построенныхъ на основаніяхъ цилиндра; крпвыя поверхности этихъ трехъ тълъ касательны къ одному и тому же шару даннаго радіуса, а разстояніе между вершинами конусовъ равно данной прямой. Каковы должны быть разстоянія этихъ вершинъ отъ центра шара, чтобы объемъ всего тъла былъ равенъ данному объему.
- 144. Два данные шара пересвчены плоскостью, параллельною линіи центровъ, и на обоихъ свченіяхъ, какъ на основаніяхъ, построены два цилиндра, общая высота ксторыхъ разстоянію линіи центровъ отъ плоскости. Каково д. б. это разстояніе, чтобы разность полныхъ поверхностей цилиндровъ равиялась данному кругу.
  - 145. Черезъ двѣ данныя точки провести окружность, касательную къ данной.
- 146. Даны три круга, имѣющіе попарно внѣшнее касапіе. Построить кругь, къ
- 147. Определить описуемый четыреугольникь, зная радіусь r вписаннаго круга и длины четырехь сторонь a, b, c, d.



148. Дана неограниченная прямая ХУ п на ней двѣ точки А и В. Опредѣлить на той же прямой точку С такъ, что если на АС построимъ правильный △ ADC, и на СВ квадратъ СЕГВ и проведемъ прямую DE, то чтобъ пятіугольникъ ADEГВ имѣлъ данную площадь m².

- 149. Даны двѣ концентрическія окружности. Прямоугольникъ, подобный данному, пмѣетъ двѣ вершины на одной окружности и двѣ па другой. Вычислить измѣренія прямоугольника.
- 150. На касательной линін въ шару О беруть двѣ точки S и S', такъ чтобы OS OS' = R, гдѣ R радіусь даннаго шара. Точки эти служать вершинами двухъ описанныхъ около шара конусовъ. Опредѣлить положеніе точекъ S и S' подъ условіемъ, чтобы объемъ, содержащійся между обоими конусами и шаромъ, пмѣлъ данную величину  $\left(\frac{1}{3} \pi R^3 . l.\right)$
- 151. Дана усѣченная прямая треугольная призма. Провести чрезъ одно изъ бовыхъ реберъ плоскость, которая раздѣляла бы призму на двѣ части въ отношеніи p:q.

- 152. На продолженіи діаметра круга радіуса R беруть по об'є стороны окружности дв'є точки A и B, разстояніе которых равно данной линіи d, и проводять касательныя AA' и BB'. Каковы должны быть разстоянія AO и BO, чтобы дуга A'B', при обращеніи фигуры около AB, образовала поясь данной поверхности  $\pi m^2$ .
- 153. На линіи центровъ двухъ круговъ найти такую точку, чтобы сумма (или разность) касательныхъ, проведенныхъ изъ нея къ даннымъ кругамъ равнялась данной линіи *l*.
- 154. Данъ шаръ ОА; найти другой шаръ О'А, касающійся извиутри къ нервому такъ, что если провести къ нему касат. плось. ВС параллельно касательной плоськости въ А, и по кругу съченія ея съ даннымъ шаромъ описать около послідняго конусь, то чтобъ объемъ, содержащійся между боковою поверхностью конуса и боковою поверхностью зоны ВАС, равнялся тразъ взятому объему искомаго шара О'А.
- 155. Найти радіусы основаній устиченнаго конуса, зная его высоту h, боковую поверхность  $\pi a^2$  и объемъ  $\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3$ . Указать число решеній, соответствующее различнымъ значеніямъ отношенія a:h.
- 156. Найти радіусы двукъ извиє касающихся круговъ, зная илощадь ab трапеціи, образуемой общею виєшнею касательною, радіусами, проведенными въ точки 
  касанія и линіей центровъ, и поверхность  $\pi a^2$ , описываемую контуромъ этой трапеціи 
  при обращеніи около линіи центровъ.
- 157. Пусть будеть О центрь вруга радіуса R и AT васательная въ точев A. Взять на этой прямой двё точки B и B' по одну сторону оть A, такъ чтобы: 1) произведеніе  $AB \times AB'$  равнялось  $2R^2$ ; 2) отношеніе площади  $\triangle$  BOB' въ площади  $\triangle$  ACC' (C и C' суть точки касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ B и B') равнялось бы m. Вычислить OB и OB'.
- 158. На касательной TT' къ кругу радіуса r беруть двѣ точки A и B такъ, чтобы разстояніе AB равнялось 2r; затѣмъ въ плоскости круга, по ту сторону относительно TT', гдѣ лежитъ кругъ, беруть точку C, въ разстояніи h отъ TT'. Проводять параллельно касательной TT' прямую, которая пересѣкаетъ кругъ въ точкахъ M и N, а прямыя CA и CB въ точкахъ P и Q.
- $1^{0}$ . Изследовать изменение суммы  $\overline{\text{MN}} + \overline{\text{PQ}}$ , когда разстояние секущей MN отъ касательной возрастаеть отъ O до 2r, и определить, сколько разъ эта сумма проходить чрезъ данную величину  $4k^{2}$ .
- $2^0$ . Опредѣлить разстояніе сѣкущей отъ касательной такъ, чтобы сумма  $\overline{MN} + \overline{PQ}$  равнялась  $4k^2$ ; изслѣдовать задачу и указать согласіе результатовъ этого изслѣдованія съ результатами прежняго изслѣдованія.
- 159. Дана плоскость P, маръ радіуса r касательный къ ней, и конусъ, котораго основаніе есть кругъ радіуса 2r, лежащій въ пл. P, а вершина находится въ разстояніи h отъ плоскости, по одну сторону съ шаромъ. Разсікають об'є поверхности плоскостью, параллельною P. Изслідовать изміненіе суммы площадей полученныхъ січеній, когда разстояніе сівущей плоскости отъ пл. P изміняется отъ O до 2r.
- 160. Опредълить радіусы двукъ шаровъ, которые, пересъкаясь, образують двояко—выпуклую чечевицу, зная толщину a чечевицы, ея объемъ  $\frac{1}{6}$   $\pi b^3$  и радіусъ R общаго круга пересъкающихся шаровъ.

Рашить тоть же вопрось въ предположени выпукло-вогнутой чечевицы.

#### ГЛАВА XLI

# Maxima и minima въ задачахъ.

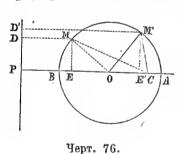
Maxima и minima простъйшихъ цълыхъ функцій. — Махima и minima квадратной дроби. — Измъненія этой функціи. — Махima и minima функцій нъсколькихъ перемьнихъ. — Задачи.

# I. Maxima и minima простийшихъ цилыхъ функцій.

646. Прямой способъ.—При опредёленіи максимальнаго или минимальнаго значенія функцій этимъ способомъ, составляемъ выраженіе функцій и изслёдуемъ ея измёненіе, измёняя независимое перемённое въ предёлахъ, указываемыхъ условіями вопроса. Такимъ образомъ мы естественнымъ путемъ находимъ тахітит или тіпітит функцій вмёстё съ соотвётствующимъ значеніемъ независимаго перемённаго. Въ этомъ и заключается натуральный, прямой способъ опредёленія тах. или тіп. функцій.

Этимъ путемъ мы нашли тахітит и тіпітит квадратнаго тринома въ 597. Здёсь мы приводимъ примёры въ поясненіе этого метода.

**647**. Примъръ I. — Дана окружность діаметра AB, на которомъ взяты точки: С въ разстояніи отъ A, равномъ трети радіуса, и P въ разстояніи  $OP = \frac{5}{3}$  радіуса отъ центра. Найти на окружности такую точку M, чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ точки С и отъ перпендикуляра, проведеннаю къ AB въ точкъ P, была тахіта или тіпіта.



За неизвъстное примемъ разстояніе центра круга отъ проэкціи Е точки М на діаметръ АВ, принимая это неизвъстное положительнымъ, когда точка Е лежитъ влѣво отъ 0, и отрицательнымъ, когда эта точка вправо отъ 0. Такимъ образомъ для точки М изъ тупоугольнаго  $\triangle$  МОС найдемъ:  $MC^2 = MO^2 + OC^2 + 2OC \times OE = R^2 + \frac{4}{9} R^2 + \frac{4}{3} R.x;$ 

$$\mathbf{MD}^2 = \left(\frac{5}{3} \mathbf{R} - x\right)^2 = \frac{25}{9} \mathbf{R}^2 - \frac{10}{3} \mathbf{R}x + x^2;$$

слъд.  $MC^2 + MD^2 = R^2 + \frac{29}{9}R^2 - 2Rx + x^2 = (x - R)^2 + \frac{29}{9}R^2$ . Легко видъть, что это выражение сохраняеть видъ при всякомъ положении точки М на окружности, благодаря условию относительно знака количества x. Итакъ, изслъдованию подлежить выражение

$$y = (x - R)^2 + \frac{29}{9} R^2$$

представляющее квадратный триномъ, въ которомъ x нужно измѣнять отъ — R да +R. Изъ этого выраженія видно, что по мѣрѣ уменьшенія абсолютной велечины бинома x - R, и y будеть идти уменьшаясь, слѣд. достигаеть minimum'a при x — R; так. обр. имѣемъ таблицу:

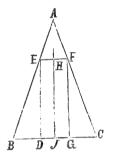
След. y иметь  $minimum \frac{29}{9} R^2$  при x = +R. Такимъ образомъ, при движеніи точки отъ B къ A по верхней полуокружности, функція y, начиная съ своего минимальнаго значенія  $\frac{29}{9} R^2$ , увеличивается до  $maximum^2a \frac{65}{9} R^2$ , котораго она достигаетъ, когда точка приходитъ въ A; затёмъ, при движенія точки по нижней полуокружности, функція уменьшается до  $\frac{29}{9} R^2$ .

**648.** Примъръ II. — Въ прямой кругый конусъ вписанъ цилиндръ; найти, при какихъ размпрахъ полная поверхность его будетъ тахіта или minima?

Пусть будеть r—радіуєь основанія вонуса, h— его высота. Назовемь радіуєь основанія ID цилиндра буквою x, высоту его IH буквою y. Изъ подобія  $\triangle$ -ковъ АЕН и ABI находимъ связь между x и y, выражаемую пропорціей:

 $ext{EH}: ext{BI} = ext{AH}: ext{AI}, \quad ext{или} \quad x: r = (h-y): h,$  откуда  $y = \frac{h(r-x)}{r}$ 

Полная поверхность S цилиндра выражается формулою:  $2\pi.DI^2+2\pi.DI.IH$ , или  $2\pi(x^2+xy)$ , или, замъняя y его величиною:



Черт. 77.

$$S = \frac{2\pi}{r} [(r-h)x^2 + hrx] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Въ данномъ вопросъ радіусъ x основанія цилиндра можетъ измѣняться только отъ 0 до r. Приноминая § 597, замѣчаемъ, что смыслъ измѣненій кгадратнаго тринома зависить отъ знака коэффиціента при  $x^2$ ; слѣд. надо различать 3 случая: r > h, r = h, r < h.

I. r>h (конусъ сплюснутый).—Въ этомъ случав, представивъ триномъ  $(r-h)x^2+hrx$  въ видв  $(r-h)\left[\left(x+\frac{hr}{2(r-h)}\right)^2-\frac{h^2r^2}{4(r-h)^2}\right]$ , имвемъ следую щую таблицу измъненій:

Завлючаемъ, что когда x возрастаетъ отъ —  $\infty$  до  $\frac{-hr}{2(r-h)}$ , функція S уменьшается, а затъмъ увеличивается, когда x возрастаетъ отъ  $\frac{-hr}{2(r-h)}$ , до

 $+\infty$ . Но какъ количество  $\frac{-hr}{2(r-h)}$  отрицательно, то изъ таблицы видимъ, что измѣненіямъ x въ области отъ 0 до r отвѣчаетъ возрастаніе функціи S. Слѣд. когда r>h, полная поверхность цилиндра увеличивается по мѣрѣ увеличенія радіуса основанія цилиндра. При x=0, и S=0; при x=r,  $S=2\pi r^2$ ; такъ-что S увеличивается отъ 0 до  $2\pi r^2$ ; и въ самомъ дѣлѣ, при x=0, цилиндръ обращается въ прямую AI; при x=r, боковая поверхность обращается въ 0, полная же поверхность приводится къ суммѣ двухъ круговъ радіуса BI=r.

II. r = h. Триномъ приводится въ hrx, и  $S = 2\pi rx$ , откуда непосредственно видно, что при возрастанія x отъ 0 до r, S увеличивается отъ 0 до  $2\pi r^2$ .

Въ обоихъ случаяхъ функція имѣетъ: абсолютный minimum, равный 0, и абсолютный maximum =  $2\pi r^2$ .

III. r < h (конусъ вытянутый). — Въ этомъ случат множитель r-h отрицателенъ, и таблица измъненій функція S такова:

Такимъ образомъ функція S сначала увеличивается до  $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$ , а потомъ уменьшается; слёд. имѣетъ maximum при  $x=\frac{hr}{2(h-r)}$ . Хотя это количество положительно, но оно можетъ быть или >r, или < r; между тѣмъ какъ въ данномъ вопросѣ x измѣняется только отъ 0 до r. Посмотримъ, при какой зависимости между r и h, это значеніе x будетъ >r. Положивъ

$$\frac{hr}{2(h-r)} \ge r, \quad \text{and} \quad \frac{h}{2(h-r)} \ge 1,$$

и умноживь обѣ части на h-r (большее 0), найдемъ:  $h\geqslant 2h-2r$ , или  $2r\geq h$ , или  $r\geq \frac{h}{2}$ . Слъд. когда r равно, или превышаетъ половину высоты конуса, то x, измѣняясь отъ 0 до r, всегда остается меньше и  $\frac{hr}{2(h-r)}$ , или, въ крайнемъ случаѣ, равно этому количеству; слъд. S идетъ, постоянно увеличиваясь, имѣя так. обр. опять абсолютный шахішиш.

Пусть тенерь  $\frac{hr}{2(h-r)} < r$ , откуда  $r < \frac{h}{2}$ . Въ этомъ случав, увеличиваясь отъ 0 до r, перемвнное x проходить чрезъ значеніе  $\frac{hr}{2(h-r)}$ ; а слъд. S, начиная отъ 0, увеличивается, достигаетъ maximum'a  $= \frac{\pi h^2 r}{2(h-h)^2}$  когда x достигаетъ значенія  $\frac{hr}{2(h-r)}$ ; а затъмъ уменьшается до  $2\pi r^2$ , при x=r.

Такимъ образомъ, въ этомъ случав функція имветь относительный шахі $mum = \frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$ 

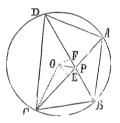
Результаты этого изследованія можно резюмировать въ виде следующей таблицы.

T. е. когда  $r>rac{h}{2}$ , полная поверхность S цилиндра принимаетъ одинъ разъ каждое значеніе, содержащееся между 0 и  $2\pi r^2$ , не дѣлаясь больше  $2\pi r^2$ . Ho при  $r<rac{h}{2}$ , S принимаеть одинь разъ всякое значеніе между 0 и  $2\pi r^2$ ; дважды всякую величину, содержащуюся между  $2\pi r^2$  и  $\frac{\pi r h^2}{2(h-r)}$ , и не дълается больше  $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$ .

649. ПРИМЪРЪ III. — Черезъ данную точку Р внутри окружности О провести двъ взаимно-перпендикулярныя хорды AC и BD такъ, чтобы площадь четыреугольника ABCD была maxima или minima.

Пусть 0P = a и пусть 0F = x—перемънное разстояніе хорды BD отъ центра.

Площадь  $\triangle$  DAB  $=\frac{1}{2}$  DB  $\times$  AP,  $\triangle$  BCD  $=\frac{1}{2}$  DB  $\times$ СР; складывая, найдемъ, что площадь у четыреугольника ABCD равна  $\frac{1}{2}$  DB imes AC, или, если перпендикуляръ изъ центра на хорду АС встръчаеть ее въ точкъ Е, можемъ написать:  $y = 2DF \times CE$ ; но  $DF = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $CE = \sqrt{R^2 - 0E^2} = \sqrt{R^2 - (a^2 - x^2)}$ ;  $y = 2\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 - a^2 + x^2)}$ . слън.



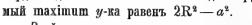
Но y-величина положительная, а потому ея maximum или minimum будутъ имъть мъсто при тъхъ же обстоятельствахъ, какъ и maximum или miniшит квадрата функцік у:

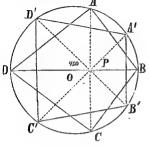
$$y^2 = -4x^4 + 4a^2x^2 + 4R^2(R^2 - a^2).$$

Вопросъ приведенъ въ изследованию изменений биквадратного тринома, которому въ этихъ цёляхъ даемъ видъ:

$$y^2 = -4[(x^2 - \frac{a^2}{2})^2 - (R^2 - \frac{a^2}{2})^2]$$

Отсюда видно, что вогда x увеличивается отъ нуля до  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ , количество  $y^2$  идеть возрастан; когда же x продолжаеть увеличиваться отъ  $rac{a\sqrt{2}}{2}$  до  $a,y^2$  уменьшается; слёд. количество  $y^2$ , а слёд. и y имбеть maximum, когда объ хорды одинаково наклонены въ діаметру 0A; са-





Черг. 79.

Затёмъ, такъ какъ площадь уменьшается когда x возрастаетъ отъ  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  до a, т. е. до того момента, когда хорда BD становится перпендикулярна къ діаметру OP; то ясно, что если эта хорда будетъ продолжать вращаться около точки P, площадь последовательно пройдетъ черезъ всё предшествовавшія состоянія, след достигнетъ minimum'a, когда одна изъ хордъ совпадетъ съ діамет-

ромъ 0Р; самый minimum  $= 2 R \sqrt{R^2 - a^2}$ .

Резюме: когда прямой уголъ совершаеть полный обороть около точки Р, площадь четыреугольника проходить дважды чрезъ тахітит, равный А'В'С'D' и дважды чрезъ тіпітит, равный АВСD.

650. Непрямой способъ.—Сущность этого метода можно резюмировать такъ: пусть будеть y нѣкоторая функція перемѣннаго x, тахішит или тіпітит которой мы желаемь найти. Съ этою цѣлью предложимь себѣ найти, какъ нужно взять x, чтобы функція имѣла данную величину m, которую на время оставляемъ произвольною; рѣшая эту вспомогательную задачу, мы получимъ ур-ніе въ x; и если это ур. будетъ такое, которое мы можемъ рѣшить (напр. квадратное, биквадратное), то опредѣляя условія возможности вопроса, мы и найдемъ предѣлы неопредѣленнаго количества m: эти предѣлы вообще и будутъ—тахішит или тіпітит m, т. е. функціи.

Такимъ образомъ здёсь maxima и minima опредёляются не прямо, а косвенно, какъ результаты изслёдованія условій возможности вопроса. Примёры этого рода мы имёли въ главё XL. Вотъ еще примёры примёненія косвеннаго метода.

**651.** Вопросъ. — Найти тахітит и тіпітит квадратнаго тринома  $ax^2 + bx + c$ .

Положивъ  $ax^2 + bx + c = m$ , гдъ m произвольное количество, ръщаемъ это ур. относительно x; найдемъ

Мы ищемъ дъйствительныя значенія перемъннаго x, при которыхъ триномъ получаетъ данное значеніе m; но чтобы x было дъйствительно, необходимо, чтобы подрадикальное количество не было отрицательно; сл. триномъ можетъ получать только такія дъйствительныя значенія m, которыя удовлетворяють неравенству

 $b^2-4ac+4am\geqslant 0$ , или  $4am\geqslant 4ac-b^2$ .

Для опредъленія отсюда предъла для m, придется объ части неравенства дълить на  $4\alpha$ , причемъ отъ знака  $\alpha$  будетъ зависъть или сохраненіе знака неравенства, или перемъна его на обратный. Отсюда два случая:

a>0. Въ этомъ случаћ дѣля на 4a, мы не измѣнимъ смысла неравенства, и получимъ:

$$m = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

т. е. m не можеть быть меньше  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ , след. minimum количества m равень  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ . Подставляя это значеніе m въ формулу (1), находимъ соотвётствующее значеніе независимаго перемённаго:  $x=-\frac{b}{2a}$ 

II. a < 0. Въ этомъ случат дёля на 4a, изивнямъ знакъ неравенства, и получичъ:

$$m < \frac{4ac - b^2}{4a},$$

т. е. m должно быть меньше и, въ крайнемъ случав, равно  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ; слъд.  $\frac{4ac-b^2}{4a}$  есть maximum тринома. Соотвътствующее значеніе x выражается опять формулою  $x=-\frac{b}{2a}$ . Итакъ

При a>0 триномъ имъетъ тіпітит, при a<0 онъ импетъ тахітит; тахітит и тіпітит выражаются формулою  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ; а соотвътствующія значенія независимаю перемъннаю формулою:  $x=-\frac{b}{2a}$ .

Найденное значеніе  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ , какъ видно, есть тахітит или тіпітит въ смысль абсолютномъ; но пока не видно, чтобы это были тахітит или тіпітит относительныя. Нужно еще доказать это; т. е. доказать, что напр. пайденное минимальное значеніе тринома дъйствительно меньше двухъ смежныхъ съ нимъ значеній функціи. Для этого мы должны вычислить два значенія тринома, которыя онъ имъетъ при двухъ значеніяхъ x: одномъ, немного меньшемъ  $-\frac{b}{2a}$ , другомъ, немного большемъ  $-\frac{b}{2a}$ . Называя буквою h абсолютную величину нъкотораго весьма малаго количества, вычислимъ величины тринома при  $x=-\frac{b}{2a}-h$ , и при  $x=-\frac{b}{2a}+h$ . Приведя триномъ къ виду

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}],$$

подставляемъ сюда сначала  $-\frac{b}{2a}-h$ , потомъ  $-\frac{b}{2a}+h$  вмѣсто x; въ обоихъ случаяхъ находимъ, что триномъ беретъ видъ

$$P = \frac{4ac - b^2}{4a} + ah^2$$
.

Замъчая, что: 1) при a>0,  $ah^2$  — величина существенно ноложительная, находимъ, что  $P>\frac{4ac-b^2}{4a}$ , т. е. что дробь  $\frac{4ac-b^2}{4a}$  меньше двухъ сосъд-

нихъ съ нею значеній тринома: дробь эта, слёд, дёйствительно представляеть относительный минимумъ функціи; 2) при a<0,  $ah^2$  есть количество существенно—отрицательное, а потому въ этомъ случать  $P<\frac{4ac-b^2}{4a}$ , и слёд. дробь  $\frac{4ac-b^2}{4a}$  больше двухъ слежныхъ съ нею значеній тринома, т. е. представляеть относительный максимумъ функціи.

Результаты эти вполнъ согласны съ выводами § 597.

**652**. Примъръ I. — Найти тахітит или тіпітит тринома  $2x^2-5x+7$ . Положивъ  $2x^2-5x+7=m$  и рёшивъ относительно x уравненіе  $2x^2-5x+7-m=0$ , питемъ

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8(7 - m)}}{4}$$
.

Для дъйствительности x необходимо, чтобы было 25-8(7-m) > 0, или -31+8m > 0, откуда  $m > \frac{31}{8}$ .

Заключаемъ, что m не дояжно быть меньше  $\frac{31}{8}$ , сл. min.  $(m)=\frac{31}{8}$ , а соответствующее значение  $x=\frac{5}{4}$ .

Для провърки беремъ  $x=\frac{5}{4}\pm h$ , гдъ h безконечно—мало, и при этомъ значенія x находимъ величину тринома, именно:  $2(\frac{5}{4}\pm h)^2-5(\frac{5}{4}\pm h)+7$  или, по упрощеніи,  $\frac{31}{8}+2h^2$ . Итакъ, при двухъ значеніяхъ x, смежныхъ съ  $\frac{5}{4}$ , триномъ получаетъ величины, большія  $\frac{31}{8}$ , пбо  $2h^2$  — положительно; сл.  $\frac{31}{8}$  есть дъйствительно minimum тринома.

653. Прим връ II. — Найти тахітит и тіпітит функціи  $cx^2 - b(a - x)^2$ . Приравиявь это выраженіе т, расположивь по степенямь x и собравь всё члены вь первую часть, имѣемъ ур-піе

$$(c-b)x^{2} + 2abx - (a^{2}b + m) = 0,$$

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{a^{2}b^{2} + (c-b)(a^{2}b + m)}}{c-b}.$$

откуда

Для дъйствительности x необходимо, чтобы m удовлетворяло неравенству  $a^2b^2+(c-b)(a^2b+m) \ge 0$ , или  $(c-b)m+a^2bc \ge 0$ . Ръшая это неравенство, различаемъ два случая:

1) Если c-b>0, то  $m>\frac{a^2bc}{b-c}$ , откуда minimum  $(m)=\frac{a^2bc}{b-c}$ , а соотвётствующее значение x есть  $x=\frac{ab}{b-c}$ .

2) Если c-b< o, то  $m < \frac{a^abc}{b-c}$ , отвуда maximum  $(m) = \frac{a^abc}{b-c}$ ,  $a = \frac{ab}{b-c}$ 

Для повърки подставляемъ въ данное выраженіе вмѣсто x два значенія смежныя съ  $\frac{ab}{b-c}$ , именно  $\frac{ab}{b-c}\pm h$ ; находимъ:  $c\left(\frac{ab}{b-c}\pm h\right)^2-b\left(a-\frac{ab}{b-c}\mp h\right)^2$ , или, по упрощеніи,  $\frac{a^2bc}{b-c}+(c-b)h^2$ . При c-b>0, членъ  $(c-b)h^2$  существенно положителенъ; а это значитъ, что при x смежныхъ съ  $\frac{ab}{b-c}$  триномъ больше нежели  $\frac{a^2bc}{b-c}$ : посмѣднее выраженіе есть, слѣд., тіпітит тринома. При c-b< o, членъ  $(c-b)h^2$  отрицателенъ; это значитъ, что величены тринома при x смежныхъ съ  $\frac{ab}{b-c}$  меньше  $\frac{a^2bc}{b-c}$ ; слѣд. эта дробь есть тахітит тринома.

654. Прпывръ III. — Данъ кругь радіуса В, вписанный въ прямомъ умп. Провести къ этому кругу касательную такъ, чтобы площадь отспкаемаго ею въ углъ треугольника А'ОВ была тіпіта.

Пусть 0A'=x, 0B=y. Площадь  $\Delta A'0B=\frac{1}{2}xy$ ; чтобы представить ее въ

функцій одного перемённаго, выразимъ, что прямая A'В касательна къ кругу C; имѣемъ A'В BF + FA' BE + A'D = y - R + x - R = x + y - 2R; съ другой стороны, такъ какъ A'B² = x² + y², связь между x и y будеть: (x + y - 2R)² = x² + y². Итакъ, ур-нія за-удачи суть (называя площадь  $\Delta$  A'OB чрезъ m²):

$$xy = 2m^2$$
,  $2R(x+y) = xy + 2R^2$ .

Подставляя во второе ур-ніе вмѣсто xy его величину  $2m^2$ , имѣемъ:

$$xy = 2m^2$$
  $x + y = \frac{m^2 + R^2}{R}$ ;

такимъ образомъ видна, что неизвъстныя x и y суть корни ур-нія

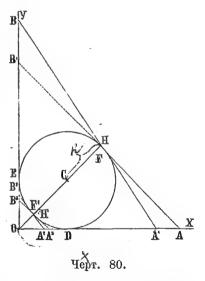
$$X^2 - \frac{m^2 + R^2}{R} \cdot X + 2m^2 = 0$$

откуда X = 
$$\left\{\frac{x}{y}\right\}$$
 =  $\frac{m^2 + R^2}{2R}$   $\pm \sqrt{\frac{m^2 - R^2}{2R}}$   $\pm \frac{m^2 + R^2 \pm \sqrt{m^4 - 6R^2m^2 + R^4}}{2R}$ .

Для дъйствительности х и у необходимо, чтобы было

$$m^4 - 6R^2m^2 + R^4 \ge 0$$
, shu  $[m^2 - R^2(3 + \sqrt{8})][m^2 - R^2(3 - \sqrt{8})] \ge 0$ .

Это неравенство будеть удовлетворено, если количеству  $m^2$  дадимъ значенія, лежащія внъ корней тринома, т. е.: 1) значенія, содержащіяся между 0 и



 $R^2(3-2\sqrt{2})$ ; 2) значенія, большія  $R^2(3+2\sqrt{2})$ . Махімим значеній перваго ряда есть  $R^2(3-2\sqrt{2})$ ; minimum вначеній втораго ряда равень  $R^2(3+2\sqrt{2})$ .

Что касается minimum'a, то значенія x и y, ему соотв'єтствующія, суть:  $x = y = \frac{m^2 + R^2}{3R} = R(2 + \sqrt{2})$ . Равенство x и y показываеть, что  $\Delta$  минимальной площади есть равнобедренный прямоугольный  $\Delta$  AOB', котораго гипотенуза есть касательная АВ' въ конечной точкъ діаметра - биссектора ОСН даннаго угда.

Что касается maximum'a  $R^2(3-2\sqrt{2})$ , то онъ не можетъ соотвътствовать треугольникамъ, образуемымъ касательными, проводимыми къ дугъ ЕНО, ибо илощади этихъ треугольниковъ изивняются отъ  $+\infty$  до  $+\infty$ , савд. не имв. ють maximum'a; сь другой стороны, и самая величина maximum'a  ${
m R}^2(3-2\sqrt{2})$ меньше R2. Онъ соотвётствуеть треугольникамъ, образуемымъ касательными къ дугъ DН'Е. Въ самомъ деле площади этихъ треугольниковъ изменяются отъ 0 до 0 и след. имеють maximum. Обозначивь:  $0A_2 = x$ ,  $0B_2 = y$ , имеемь:  $A_{2}B_{2} = EB_{2} + DA_{2} = R - x + R - y = 2R - x - y$ , я ур-нія этой новой вадачи будуть:

$$xy = 2m^2$$
,  $x^2 + y^2 = (2R - x - y)^2$ ;

они не отличаются отъ ур-ній предыдущей задачи, и изслёдуя подрадикальный триномъ, мы должны были, на ряду съ minimum'омъ первой серіи  $\Delta$ -ковъ, найти и тахітит второй серін.

655. ПРИМБРЪ IV. — Изъ всъхъ прямоугольных в треугольниковъ одинаковой высоты h (опущенной на гипотенузу) у какого периметръ импетъ наименьшию величини?

Пусть будуть: x и y — катеты, z — гипотенува и 2p — периметръ треугольника; ур-нія задачи суть:

$$x+y+z=2p$$
,  $xy=hz$ ,  $x^2+y^2=z^2$ .

Изъ перваго: x+y=2p-z, или  $(x+y)^2=(2p-z)^2$ ; затъмъ придавая къ третьему удвоенное второе, имъемъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 2hz$$
, with  $(x+y)^2 = z^2 + 2hz$ ;

приравнивая оба выраженія  $(x+y)^2$ , питемъ ур-ніе въ z

$$(2p-z)^2 = z^2 + 2hz,$$

изъ котораго

$$z = \frac{2p^2}{h + 2p}$$

Слъд. 
$$x+y=2p-\frac{2p^2}{h+2p}=\frac{2ph+2p^2}{h+2p}=2p\cdot\frac{h+2}{h}\frac{1}{2p}$$
 ;  $xy=hz=\frac{2p^2h}{h+2p}$  :

Итакъ, 
$$x$$
 и  $y$  суть корни квадратнаго ур-нія 
$${\tt X^2-2p}\cdot\frac{h+p}{h+2p}\cdot{\tt X}\quad\frac{2hp^2}{h+2p}=0.$$

Изъ него

$$X = {x \brace y} = p \cdot \frac{h+p}{h+c} \cdot \sqrt{p^2 \cdot (\frac{h+p}{h+2p})^2 - \frac{2hp^2}{h+2p}},$$

а какъ подрадикальное выражение приводится къ  $\frac{p^2}{(h-2p)^2}$   $(p^2-h^2-2hp)$ , то

$$X = \frac{p}{h + 2p} (h + p \pm \sqrt{p^2 - h^2 - 2ph}).$$

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы p удовлетворяло неравенству  $p^2-2ph-h^2\geq 0$ , или

$$[p-h(1+\sqrt{2})]$$
.  $[p-h(1-\sqrt{2})] \ge 0$ .

Отсюда извъстнымъ образомъ закиючаемъ, что неравенство удовлетворяется двумя серіями значеній p, а именно: 1) всѣми  $p < h(1-\sqrt{2});$  2) всѣми  $p > h(1+\sqrt{2});$  слѣд.  $h(1-\sqrt{2})$  есть maximum p, а  $h(1+\sqrt{2})$ — minimum p.

Что касается minimum'a, равнаго  $h(1+\sqrt{2})$ , то отвъчающія ему значенія x и y суть:

$$x = y = \frac{h(1 + \sqrt{2}) \cdot h(2 + \sqrt{2})}{h(3 + 2\sqrt{2})} = h \cdot \frac{4 + 3\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = h\sqrt{2}.$$

Сявд, из всьхъ прямоугольных треугольниковъ одинаковой высоты, равнобедренный имъетъ наименьшій периметръ.

Что касается найденнаго maximum'a, то, будучи отрицательнымъ, онъ не можетъ относиться къ данному геометрическому вопросу. Но замъчая, что при  $p = h(1-\sqrt{2})$ , количества x и y отрицательны, а z положительно, мы, перемънивъ въ ур-хъ вопроса знаки количества x, y и p, найдемъ уравненія:

$$x + y + z = 2p$$
,  $xy = hz$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ .

Этимъ ур-мъ отвъчаетъ вопросъ: Изъ всъхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты h у какого избытокъ суммы катетовъ надъ гипотенузою будетъ наименьшій? Рѣшивъ этотъ вопросъ, найдемъ, что искомый треугольникъ есть равнобедренный, и что minimum половины избытка дается абсолютною величиною отрицательнаго maximum'a предыдущей задачи.

IIримъчаніе. — Если бы требовалось изъ всёхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра найти такой, котораго высота, опущенная на гипотенуву, была бы наибольшая; тогда p была бы величина данная и нужно бы было найти h, удовлетворяющія неравенству

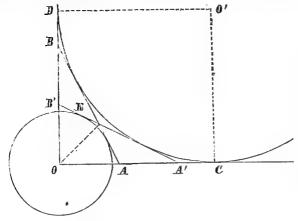
$$h^2 + 2ph - p^2 < 0, \text{ man } [h - p(\sqrt{2} - 1)][h + p(1 + \sqrt{2})] < 0.$$

Отсюда нашли бы, что maximum  $(h) = p(\sqrt{2}-1)$ ; соотвётствующія значенія x и y равны между собою, и общая величина ихъ есть

$$x=y=p$$
.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-1}}=p(2-\sqrt{2})$ .

Эти результаты легко найти геометрически. Извъстно, что для построенія прямоугольнаго треугольника по даннымъ: первметру и высотъ на гипотенузу, откладывають на сторонахъ прямаго угла OC = OD = p; возставляють въ точкахъ С и D перпендикуляры, которыхъ пересъченіе опредъляеть центръ 0' круга, внъ-вписаннаго въ искомомъ  $\Delta$  AOB; изъ точки 0 какъ изъ центра радіусомъ ОК, равнымъ высотъ, описывають другой кругъ. Гипотенуза AB должна быть касательною къ обоимъ кругамъ 0 и 0'. Слъд. вообще задача имъетъ два

ръшенія одинавовыя, ибо тр-ки ОАВ и ОА'В' равны, такъ какъ ОА = 0В' и 0А' = 0В.

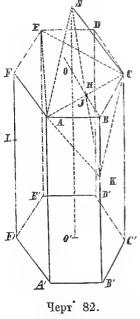


Черг. 81.

Задача возможна, когда объ окружности лежатъ одна внъ другой; для того, чтобы они были касательны, необходимо чтобы 00' = h + p, а какъ  $00' = p\sqrt{2}$ , то  $h + p = p\sqrt{2}$ , или  $h = p(\sqrt{2} - 1)$ . Если h будетъ имъть большую величину, окружности пересъкутся, и задача станетъ невозможна.

656. Примъръ V. — Задача о пчелиных ячей-

 $\kappa ax$ . На продолженіи оси 00' правильной шестіугольной призмы возьмемъ точку S; черезъ эту точку и чрезъ каждую изъ сторонъ правильнаго  $\Delta ACE$ , получен-



наго соединеніемъ чрезъ одну вершинъ верхняго основанія призиы, проведемъ три плоскости, по которымъ отръжемъ отъ призмы три тетраздра ВАСК, DCEH и FEAL и замѣнимъ ихъ однимъ тетраэдромъ SACE, поставленнымъ надъ призмой. Новый многогранникъ будетъ ограниченъ сверху тремя ромбами SAKC, SCEH, SEAL; объемъ его всегда равенъ объему взятой призмы, гдъ бы ни взять точку S на оси, ибо пирамида SACE составлена изъ трехъ пирамидъ SOAC, SOCE и SOEA, соотвътственно равныхъ тремъ отрёзаннымъ пирамидамъ; тавъ пирамида SOAC = пир. КАВС, ибо они имъютъ равныя основанія ( $\Delta OAC = \Delta ABC$ , какъ половины ромба ABCO) и равныя высоты SO и КВ (по равенству прямоуг. треугольниковъ SOI и KBI). Имъя равные объемы, многогранники имбють, однако, различныя поверхности, и задача состоить въ опредълении точки S такъ, чтобы поверхность новаго десятигранника импла наименьшую величину.

Пусть AB = a, BB' = 00' = b, BK = S0 = x; въ такомъ случаћ:  $AC = a\sqrt{3}$ ;  $SI = \sqrt{S0^2 + 01^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + a^2}$ ; слъд.  $SK = \sqrt{4x^2 + a^2}$ ; площадь ромба SAKC, равная полупровзведенію діагоналей AC и SK, выразится формулою  $\frac{1}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2}$ ; площадь трапеціи СКВ'С' — формулою  $\frac{1}{2}a(2b-x)$ . Слъд. поверхность многогранника, не считая основанія, выражается формулою  $\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 3a(2b-x)$ , или  $3a\left[\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b-x\right]$ . Постоянный

множитель 3a не вліяеть на условія  $\max$ . и  $\min$ ., потому вопрось приводится къ опредъленію  $\min$   $\min$   $\max$  a скобочнаго выраженія. Положивъ

$$\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x=m$$

и освободивъ это ур-ніе отъ радикала, найдемъ

$$8x^{2} - 8(m-2b)x + 3a^{2} - 4(m-2b)^{2} = 0,$$

$$x = \frac{2(m-2b) \pm \sqrt{6[2(m-2b)^{2} - a^{2}]}}{4}.$$

откуда

Чтобы x было дъйствительно, необходимо, чтобы было

$$2(m-2b)^2-a^2{\lessgtr}0$$
, him  $(m-2b)^2{\lessgtr}rac{a^2}{2}$ , him  $m-2b{\lessgtr}rac{a}{\sqrt{2}}$ .

Отсюда  $\min.(m) = 2b + \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Помноживъ на 3a, найдемъ, что искомая минимальная поверхность =

$$6ab + \frac{3a^2}{\sqrt{2}}$$
,

а соотвътствующая величина  $x=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$  .

Формула для x показываеть; что разность двухъ смежныхъ боковыхъ реберъ должна быть — четверти діагонали квадрата, построеннаго на сторонъ шесті-угольника, служащаго основаніемъ призмы.

Поверхность призмы, не считая основанія, была бы  $6ab+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ ; слёд. поверхность многогранника минимальной поверхности меньше на  $\frac{3}{2}$   $a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$  поверхности шестіугольной призмы, имѣющей то же основаніе и тотъ же объемъ. Легко видѣть, что для треугольника КВІ имѣетъ мѣсто пропорція

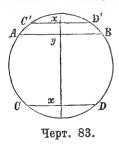
BK: BI: IK = 1: 
$$\sqrt{2}$$
:  $\sqrt{3}$ .

откуда (при помощи тригонометріи) найдемъ, что уголъ ВІК = 35°15′52″.

Примъчаніе. — Пчелы строять ячейки своихъ сотовъ именно въ формъ такихъ десятигранниковъ съ минимальною поверхностью; шестіугольникъ образуетъ входъ въ ячейку; медъ кладется на дно; пчелы строятъ сначала ромбы, затъмъ боковыя транеція. Если вообразить себъ плоскость, заполненную шестіугольниками и построить на каждомъ изъ нихъ ячейку, то вершины ячеекъ будутъ находиться всъ въ одной плоскости, параллельной первой. Затъмъ, если къ такой фигуръ приложить другую выпуклостями во впадины первой, получимъ совокупность ячеекъ, называемую сотомъ. Улей наполняется сотами, помъщенными другъ надъ другомъ такъ, чтобы двъ пчелы могли вмъстъ пройти между двумя последовательными сотами.

Итакъ: наклоненіе ромбовъ, образующихъ дно, таково, что ячейки при данномъ объемѣ имѣетъ минимальную поверхность; правильный треугольникъ, квадратъ и прав. шестіугольникъ суть единственные правильные многоугольники, которыми можно заполнить плоскость безъ просвѣтовъ, и изъ нихъ шестіугольникъ, при той же площади, имѣетъ наименьшій контуръ. Такимъ образомъ является двоякая экономія на воскъ. Геометрическое строеніе пчелиныхъ ячеекъ, замѣченное еще Паппусомъ, геометромъ IV вѣка до Р. Х., было изучаемо сначала Филиппомъ Маральди (1712 г.), затѣмъ Реомюромъ, который и предложилъ вопросъ о минимумѣ Самуилу Кенигу и Маклорену. Послѣдній впервые далъ точное теоретическое рѣшеніе вопроса. Для угла ромба Кенигъ нашолъ 109°26′ вмѣсто 109°28′16″.

657. Прпывръ VI.—Зная сумму 2а двухъ параллельныхъ хордъ круга радіуса R, опредълить ихъ положеніе такъ, чтобы разстояніе этихъ хордъ имъло наибольшую или наименьшую величину.



Пусть длины параллельных в полухордъ будуть x и y; прямо имѣемъ, назвавъ разстояніе между ними буквою m:

$$\sqrt{\mathbf{R}^2 - x^2} \pm \sqrt{\mathbf{R}^2 - y^2} = m,$$

гдѣ знакъ (+) относится къ случаю, когда хорды расположены по обѣ, а (--) — по одну сторону центра. Затѣмъ, по условію:

x+y=a.

Возвышая объ части перваго ур. въ квадратъ, имъемъ:

$$2R^{2} - (x^{2} + y^{2}) \pm 2\sqrt{(R^{2} - x^{2})(R^{2} - y^{2})} = m^{2},$$

$$(m^{2} - 2R^{2} + x^{2} + y^{2})^{2} = 4(R^{2} - x^{2})(R^{2} - y^{2}).$$

nan,

Раскрывая и дълая приведеніе, имбемъ:

$$m^4 + (x^2 + y^2)^2 - 4m^2R^2 + 2m^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$$

Изъ втораго ур-нія находимъ:  $x^2 + y^2 = a^2 - 2xy$ ; слъд.

$$m^4 + (a^2 - 2xy)^2 - 4m^2R^2 + 2m^2(a^2 - 2xy) = 4x^2y^2$$

откуда

$$xy = \frac{(m^2 - a^2)^2 - 4m^2R^2}{4(a^2 + m^2)}.$$

По произведенію и суммъ x и y можемъ выразить эти количества какъ корни квадратнаго ур-нія

$$u^2 - au + \frac{(m^2 + a^2)^2 - 4m^2R^2}{4(a^2 + m^2)} = 0.$$

Условіе действительности корней таково:

$$a^2(a^2+m^2)-(m^2+a^2)^2+4m^2\mathrm{R}^2{\ensuremath{\geqslant}} 0$$
, when  $m^2(-m^2-a^2+4\mathrm{R}^2){\ensuremath{\geqslant}} 0$ .

Такъ какъ по свойству геометрическаго вопроса  $a^2{<}4\mathrm{R}^2$ , то предыдущее перавенство можно написать такъ:

$$(\sqrt{4R^2-a^2}-m)(\sqrt{4R^2-a^2}+m)\geqslant 0$$
 . . . (1)

Когда m>0, изъ неравенства (1) находимъ:  $m\leq \sqrt{4R^2-a^2}$ , сл. тахітит (m)  $=\sqrt{4R^2-a^2}$ , а соотвътствующія значенія x и y суть  $x=y=\frac{a}{2}$ . Очевидно, этотъ тахітит принадлежитъ функцій  $\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{R^2-y^2}$ , ибо другая функція при x=y=a обращается въ 0.

Когда m < 0, неравенство (1) даетъ:  $m \geqslant -\sqrt{4R^2-a^2}$ , откуда minimum (m)  $= -\sqrt{4R^2-a^2}$ . Этотъ minimum принадлежитъ функціи:  $-\sqrt{R^2-x^2}$  —  $\sqrt{R^2-y^2}$ . Опредъленіе minim. или max. этой функціи привело бы къ прежнему ур-нію въ u, послё возвышенія въ квадратъ.

Для провърки найденнаго miximum'a  $= \sqrt{4R^2 - a^2}$ , которому соотвътствуютъ  $x = y = \frac{a}{2}$ , даемъ количеству  $\frac{a}{2}$  безконечно малое приращеніе  $\delta$ , т. е. полагаемъ  $x = \frac{a}{2} + \delta$ ; въ такомъ случав изъ соотношенія x + y = a, находимъ:  $y = \frac{a}{2} - \delta$ ; вопросъ приводится къ провъркъ неравенства

$$\sqrt{R - \left(\frac{a}{2} + \delta\right)^2} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2} - \delta\right)^2} < \sqrt{4R^2 - a^2}$$

Такъ какъ объ части этого неравенства положительны, то возвысивъ въ квадратъ, замъняемъ тождественнымъ ему неравенствомъ

$$4\sqrt{\left[\mathrm{R}^2-\left(\frac{a}{2}+\delta\right)^2\right]\!\left[\mathrm{R}^2-\left(\frac{a}{2}-\delta\right)^2\right]}<4\mathrm{R}^2-a^2+4\delta^2\,;$$

замѣчая, что  $4R^2-a^2$  положительно, можемъ еще разъ возвысить въ квадратъ, не измѣняя смысла неравенства; и по упрощеніи находимъ: —  $32R^2\delta^2<\frac{1}{4}$   $32R^2\delta^2$ , что вѣрно.

658. Третій способъ.— Этотъ способъ основанъ на самомъ опредъленіи махімим'а и мілімим'а функціи. Пусть данная функція есть квадратный триномъ  $ax^2 + bx + c$ , и пусть она при x = x' достигаетъ махімим'а; въ такомъ случав, каковъ бы ни былъ знакъ произвольно-малаго количества h, должно им'єть м'єсто неравенство

$$a(x'+h)^2+b(x'+h)+c-(ax'^2+bx'+c)<0,$$
  
 $h(2ax'+b)+ah^2<0;$ 

или

такъ какъ h произвольно-моло, то первая часть неравенства инѣетъ знакъ нерваго члена; поэтому она будетъ мѣнять знакъ съ перемѣною знака h, и слѣд. не будетъ постоянно отрицательною, пока первый членъ будетъ отличенъ онъ нуля; другими словами, неравенство можетъ существовать при измѣненіи знака h только тогда, когда первый членъ будетъ тожественно =0, т. е. когда 2ax'+b=0, или  $x'=-\frac{b}{2a}$ . Но при этомъ значеніи x' неравенство приводится къ  $ah^2<0$ , и потому, чтобы оно было возможно, необходимо, чтобы было a<0.

Итакъ, при a<0 триномъ имѣетъ maximum, когда  $x'=-\frac{b}{2a}$ . Самый же maximum  $=\frac{4ac-b^2}{4a}$ .

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что триномъ имѣетъ минимумъ при  $x'=-\frac{b}{2a}$ , если a>0. Самый minimum выражается тою же формулою.

Этотъ способъ, принадлежащій къ числу натуральныхъ, важенъ для насъ въ томъ отношеніи, что даетъ возможность элементарнаго опредѣленія шах. и min. въ такихъ случаяхъ, въ какихъ вышензложенные элементарные методы не примѣнимы. Найдемъ помощію этого способа

659. Махіта и тіпіта нубичной функціи  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ . — Пусть x и будеть то значеніе перемѣннаго, при которомъ функція ниѣеть тахітит или тіпітит; въ такомъ случаѣ, назвавши буквою h произвольно малое приращеніе перемѣннаго x, будемъ имѣть

 $a(x+h)^3+b(x+h)^2+c(x+h)+d-(ax^3+bx^2+cx+d) \lesssim 0$ , гдъ верхній знавъ неравенства относится въ случаю тахітита, нижній— въ случаю тіпітвта; но упрощенія, найдемъ

$$(3ax^2 + 2bx + c)h + (3ax + b)h^2 + ah^3 \leq 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1).$$

Пока первый членъ, при h весьма маломъ, не равенъ нулю, первая часть будетъ мѣнять знакъ вмѣстѣ съ h, и слѣд. не будетъ постоянно отрицательною, гли постоянно положительною, какъ требуетъ неравенство; ктакъ, значенія x, дающія махімим или міпімим функців, должны удовлетворять уравненію

Первое условіе чтобы функція пибла тах. или тіп., состоять въ томъ, чтобы корни ур-нія (2) были дъйствительны, т. е. чтобы  $b^2-3ac\geq 0$ ; но равенство  $b^2-3ac\equiv 0$  необходимо исключить, ибо при немъ не м. б. ни тах., ни тіп. Въ самомъ дѣлѣ, если  $b^2-3ac\equiv 0$ , корни ур-нія (2) дѣйствительные и равные и общая величина ихъ  $x=-\frac{b}{3a}$ , откуда  $3ax+b\equiv 0$ , т. е. второй членъ нер. (1) обращается въ ноль, и первая часть этого неравенства обращается въ  $ah^3$ ; поэтому разность между максимальнымъ (или минимальнымъ) значеніемъ функцій, если таковое существуєть, и смежными ен значеніями, выражается количествомъ  $ah^3$ , мѣняющимъ знакъ выѣстѣ съ h. Итакъ, первое условіе, необходимое для того, чтобы функція имѣла тах. или тіп., есть  $b^2-3ac>0$ .

Пусть это условіе удовлетворнется; въ такомъ случат корни ур-нія (2) будуть дъйствительные и неравные, и сл. будуть отличны отъ —  $\frac{b}{3a}$ , т. е. необходимо будеть:

$$3ax'+b \leq 0$$
,  $3ax''+b \leq 0$ .

Пусть x' < x''; тогда

$$x' < -\frac{b}{3a} < x'' \cdot \dots \cdot (3)$$

ибо —  $\frac{b}{3a}$  ссть полусумма корней.

Затемь различаемь два случая.

Первый случай: a>0. Неравенства (3) въ этомъ случав можно представить въ видъ:

$$3ax' < --b < 3ax''$$

откуда

$$3ax' + b < 0$$
 If  $3ax'' + b > 0$ ;

слъд, каковъ бы ни быль знакъ весьма малаго количества h, будетъ

$$(3ax'+b)h^2+ah^3<0$$
 II  $(3ax''+b)h^2+ah^3>0$ .

Первое неравенство показываеть, что приращенія функціи при значеніяхъ x, смежнымъ съ x', отрицательны, а при значеніяхъ x, смежныхъ съ x'', положительны, след.: при  $x\!=\!x'$  функція имеєть maximum, а при  $x\!=\!x''$  она имъетъ тіпітит.

Второй случай: a < 0. — Неравенства (3) въ этомъ случав, по умножения на положит, количество — 3a, нають:

$$3ax' + b > 0$$
 If  $3ax'' + b < 0$ ;

сивд. каковъ бы ни быль знакъ h, имвемъ два неравенства:

$$(3ax'+b)h^2+ah^3>0$$
 is  $(3ax''+b)h^2+ah^3<0$ ,

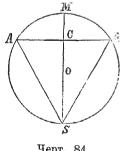
изъ которыхъ выводимъ заключение, обратное предыдущему.

Отсюда правило: чтобы найти тахіта или тіпіта кубичной функцій  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ , приравниваемъ нулю полиномъ  $3ax^2 + 2bx + c$ , составляемый умноженіемь каждаго члена функцій на показателя буквы х въ этомь члень, и уменьшениемь этого показателя на 1\*); так. обр. получаемь уравнение

$$3ax^2+2bx+c=0$$
 · · · · · · · · (1)

Eсли  $b^2 - 3ac \leq 0$ , функція не импеть ни тах., ни тіпітит'а; если же  $b^2 - 3ac > 0$ , меньшему корню ур-нія (1) соотвынствуеть тахітит, а большему тіпітит, коїда a>0; напротивь, меньшему корню соотвътствуєть minimum, a большеmy - maximum, когда a < 0.

660. ПРИМВРЪ. — Найти тахітит и тіпітит разности объемовъ: конуса, вписаннаго въ данный шаръ и сферическаго сегмента, импющаго тоже основаніе.



Черт. 84.

Вопросъ можно понимать двояко, а именно: высота конуса можетъ совпадать или не совпадать съ высотою сегмента. Въ первомъ предположенія, означивъ MC буквою x, имвемъ:

объемъ конуса 
$$SAB = \frac{1}{3} \pi x (2R - x)^2;$$
объемъ сегмента  $ABS = \frac{1}{3} \pi (2R - x)^2 (3R - SC)$ 

$$= \frac{1}{3} \pi (2R - x)^2 (R + x).$$

<sup>\*)</sup> Изъ этого слъдуетъ, что нослъднимъ членомъ новаго полинома будетъ с, ибо последній члент данной функцін, который можно написать въ виде  $dx^0$ , дасть, следуя этому закону, 0.  $dx^{-1}$ , или 0.

Разность между первымъ и вторымъ объемомъ выражается формулою:  $-\frac{1}{3}\pi R(2R-x)^2$ . Такъ какъ множитель  $-\frac{1}{3}\pi R$  — постояненъ, то измѣненія выраженія зависять отъ  $(2R-x)^2$ ; но это выраженіе есть квадрать, слѣд. оно имѣетъ minimum равный нулю, что имѣетъ мѣсто при x=2R; а слѣд. выраженіе  $-\frac{1}{3}\pi(2R-x)R$  имѣетъ maximum при x=2R, а какъ при этомъ x не можетъ, возрастая, превзойти 2R, то полученный maximum есть абсолютный.

Во второмъ предположении:

объемъ сегмента AMB = 
$$\frac{1}{3} \pi x^3 (3R - x)$$
,

сятьд. разность между конусомъ и сегментомъ равна  $\frac{1}{3} \pi x (2 {\rm R} - x)^3 - \frac{1}{3} \pi x^2 (3 {\rm R} - x)$ 

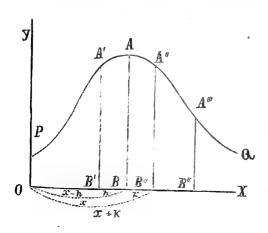
или 
$$\frac{1}{3} \pi [2x^3 - 7Rx^2 + 4R^2x].$$

Измѣненія зависять отъ перемѣннаго множителя  $2x^3 - 7Rx^2 + 4R^2x$ , представляющаго кубичную функцію; значенія x, дающія этой функція maximum и minimum, по правилу, суть корни квадратнаго уравненія

$$3.2x^2 - 2.7Rx + 4R^2 = 0$$
, where  $6x^2 - 14Rx + 4R^2 = 0$ .

Эти корни суть:  $x' = \frac{R}{3}$ , x'' = 2R; а какъ коэффиціентъ при  $x^2$  положителенъ, по меньшему корню соотвътствуетъ maximum разности объемовъ  $\frac{17\pi R^3}{81}$ , а большему ея minimum —  $\frac{4}{3}$   $\pi R^3$ , причемъ этотъ minimum — абсолютный.

661. Принципъ Фермата. — Знаменитый французскій математикъ Ферматъ, въ одномъ изъ своихъ писемъ къ Паскалю и Робервалю, отъ 23 августа 1636 г.



Черт. 85.

заявляеть, что изъ всёхъ своихъ открытій наибольшее значеніе онъ придаеть методу опредёленія максимальныхъ и минимальныхъ значеній во всевозможныхъ задачахъ, основанному на принципъ, который онъ считаетъ фундаментальнымъ. Этотъ принципъ легко понять, разсматривая функцію какъ ординату кривой.

Пусть ордината AB представляетъ максимальное состояніе разсматриваемой функціи, а обсцисса OB — x соотвътствующее значеніе перемъннаго. Принципъ Фермата

состонть въ томъ, что всегда существують такія два значенія независимаго перемѣннаго—одно x-h, немного меньшее x, другое x+h, немного большее x, которымъ соотвѣтствують два значенія функціи: f(x-h) и f(x+h) (или двѣ

ординаты A'B' и A''B'') равныя между собою. Въ самомъ дёлё, функція, возрастая, и приближаясь къ своему maximum'у AB, пройдетъ чрезъ свое значеніе f(x-h), безконечно-близкое къ этому maximum'у AB; затёмъ, достигнувъ maximum'а, она начнетъ убывать и, прежде чёмъ дойдетъ до нёкотораго состоянія A'''B''', меньшаго AB, должна, но свойству непрерывности, пройти всё промежуточныя состоянія, слёд., между прочимъ, пройдетъ и чрезъ состояніе A''B''' или f(x+h), равное A'B'' или f(x-h) и безконечно-близкое къ AB.

Такое же равенство имъло-бы мъсто и тогда, если бы АВ изображала тіпітит функція.

Отсюда непосредственно вытекаетъ и самый методъ. Приравниваемъ два значенія функій, одно, соотв'єтствующее x-h, другое x+k, гдx есть значеніе перемъннаго, дающее тахітит или тіпітит функцій, а h и k безконечно-малыя: такимъ образомъ получаемъ уравненіе f(x-h)=f(x+k). Очевидно, что если вначенія перемъннаго x-h и x+k, дающія равныя значенія функціи, сближать между собою, т. е. приближать h и k къ нулю, то оба значенія функціи будуть приближаться въ maximum'у (или min), и въ предълъ, т. е. при h=k=0, сольются съ maximum'omъ (или min.), а оба значенія перемъннаго сольются съ тъмъ значеніемъ, которое соотвътствуетъ maximum'y (или min.). Такимъ образомъ, въ предълъ получится ур-ніе въ x:  $\varphi(x) = 0$ , поторому будеть удовдетворять значение перемъннаго x, дающее или maximum или minimum. Ръшивъ это ур-ніе, найдемъ, вообще говоря, нъсколько значеній для x, напр.  $x=a,\ b,\ c,\ \ldots$  Ничто не указываеть, чтобы всё эти рёшенія давали тахітит или тіпітит функція; слёд. для каждаго нужна повёрка. Впрочемъ. если ур-ніе  $\varphi(x) = 0$  ниветь только одно рёшеніе, и по свойству вопроса можно à priori заплючить, что f(x) имъетъ max. или min., повърка будетъ не необходима.

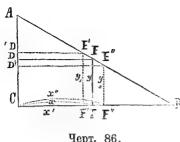
На практикѣ поступаемъ такъ. Выразивъ всѣ неизвѣстныя черезъ одно x и положивъ  $x-h=x',\ x+k=x'',$  въ ур-ніи f(x')=f(x'') дѣлаемъ упрощенія, удаляя общія части и сокращая на x'-x'', въ оставшихся членахъ дѣлаемъ x'-x'' равнымъ нулю, послѣ чего и получаемъ ур-ніе  $\phi(x)=0$ .

Методъ Фермата есть болъе общій изъ числа элементарныхъ методовъ опредъленія максим. и миним. значеній функціп. Въ историческомъ отношеніи онъ важенъ тъмъ, что послужилъ зародышемъ, изъ котораго поздиве развилось дифференціальное исчисленіе.

662. Примъръ I. — Изг какой точки инпотенузы даннаю прямоуюльнаю треугольника нужно опустить перпендикуляры на катеты, чтобы прямоугольникь, образуемый ими со сторонами прямаго угла, импль наибольшую площадь.

Взявъ точку Е на гипотенувъ и опустивъ изъ нея перпендикуляры ЕD и ЕF на катеты, образуемъ прямоугольникъ EDCF; когда точка Е совпадаетъ съ А, прямоугольникъ превращается въ прямую АС, а его площадь въ нуль; если затъмъ двигатъ точку Е отъ А къ В, то площадь прямоугольника сначала будетъ увеличиваться, а потомъ начинаетъ уменьшаться, и когда точка Е совпадаетъ съ В, площадь снова обращается въ ноль. Такимъ образомъ, измъняясь отъ нуля до нуля, она необходемо проходитъ чрезъ шахітить.

Пусть въ положени EDCF прямоугольникъ зижемъ наибольшую илощадь



Черт. 86.

ху. По принципу Фермата, всегда существуютъ такіе два безконечно близкіе въ DEFC примоугольника D'E'F'С и D"E"E"С, которых в плошали равны, т. е.

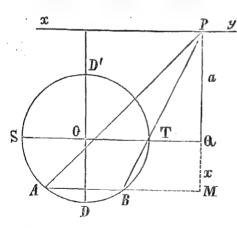
Чтобы y выразить черезъ x, зам'вчаем'ь, что для всякаго положенія прямоугольника между его измърсніями существуетъ соотношеніе (напр. изъ подобія △-въ ВЕГ и ВАС),

выражающееся пропорціей y:(a-x)=b:a, откуда  $y=\frac{b}{a}(a-x)$ . Въ силу этого соотношенія можно исключить перемённое у и представить (1) въ формё

$$\frac{b}{a}x'(a-x') = \frac{b}{a}x''(a-x''),$$

откуда:  $ax'-x'^2=ax''-x''^2$ , или a(x'-x'')=(x'+x'')(x'-x''). Сокративъ на x'-x'', имъемъ: a=x'+x''. Положивъ x'=x''=x, получимъ ур-ніе 2x=a, котораго корень  $x=rac{a}{2}$  даетъ некомый maximum. Отсюда, изъ вышеприведенной пропорціи, найдемъ:  $y = \frac{b}{2}$ . Эти результаты показываютъ, что тахітит площади прямоугольника даеть точка, лежащая въ срединь гипотенузы. Самый же maximum площади  $=\frac{ab}{4}$  (половина площади  $\triangle$ -ка).

663. Примъръ II. — Данг кругг и прямая ху. Изг вспхг треугольниковъ, имплощихъ вершину въ точкъ Р, данной на этой прямой, а основаніемь хорду АВ, паравлельную этой прямой, найти тоть, площадь котораго импеть наибольшую величину.



Черт. 87.

Различаемъ два случая, смотря по тому, пересъкаеть данная прямая ху кругъ 0 или нътъ.

І. Пусть прямая жу не пересъкаетъ кругъ О. Задача имбетъ тахіmum, потому-что если переміщать хорду АВ параллельно ху, отъ D' въ D, она будетъ измѣняться отъ нуля до нуля, а след. такимъ же образомъ будеть измъняться и илощадь треугольника: последния имееть, по этому, тахітит. Затёмь, замёчаемь. что если перемъщать хорду отъ D' къ ST, илощадь треуг-ка будетъ увеличиваться, ибо увеличивается высо-

та и основание его. Въ другомъ полукругъ, по мъръ удаления хорды отъ центра, она уменьшается, высота же увеличивается, по этому здёсь и следуеть искать maximum.

Пусть хорда AB = 2y, разстояніе ея ОС отъ центра равно x, радіусь круга = R, перпендикуляръ PQ = a. Пусть площадь максимальная соотвътствуетъ OC = x, эта площадь  $= (a + x)\sqrt{R - x^2}$ .

По принципу Фермата имћемъ

$$(a+x')\sqrt{{}^{2}\mathbf{R}-x'{}^{2}}=(a+x'')\sqrt{\mathbf{R}^{2}-x''{}^{2}}.$$

Возвышая въ квадратъ, тотчасъ же освободили бы ур. отъ радикаловъ, но для опредъленія x получили бы кубичное ур-ніе. Слъдующій пріємъ позволяєть привести вопросъ къ ръшенію квадратнаго ур-нія. Даемъ уравненію видъ

$$a(\sqrt{R^2-x'^2}-\sqrt{R^2-x''^2})=x''\sqrt{R^2-x''^2}-x'\sqrt{R^2-x'^2}.$$

Умножая и дъля первую часть на сумму радикаловъ этой части, а вторую на сумму членовъ этой части, имъемъ:

$$a \cdot \frac{x''^2 - x'^2}{\sqrt{\mathbb{R}^2 - x''^2} + \sqrt{\mathbb{R}^2 - x''^2}} = \frac{\mathbb{R}^2(x''^2 - x'^2) - (x''^4 - x'^4)}{x''\sqrt{\mathbb{R}^2 - x''^2} + x'\sqrt{\mathbb{R}^2 - x'^2}}.$$

Раздъливъ объ части на  $x''^2-x'^2$  и положивъ затъмъ x'=x''=x, по-

$$rac{a}{2\sqrt{{
m R}^2-x^2}}\!=\!rac{{
m R}^2-2x^2}{2x\!\sqrt{{
m R}^2-x^2}}, \quad {
m alm} \quad 2x^2+ax-{
m R}^2\!=\!0, \ x=\!rac{-a-\sqrt{a^2+8{
m R}^2}}{4}.$$

откуда

Отряцательный корень отбрасываемъ, ибо въ верхнемъ полукругъ, съ пониженіемъ хорды идетъ постепенное увеличеніе площади  $\triangle$ -ка. Итакъ, x соотвъствующій максимальной площади, равенъ

$$-a+\sqrt{a^2+8R^2}$$

Корень этотъ дъйствительно меньше R, ибо подстановка 0 и R вмъсто x въ триномъ  $2x^2+ax-R^2$  даетъ результаты противоположнаго знака: —  $R^2$  и  $R^2+aR$ .

Въ частномъ случать, когда прямая xy касается къ кругу, a=R, и  $x=\frac{1}{2}$  R. — Когда точка Р совпадаетъ съ D' (точкою касанія), треугольникъ D'AB - равнобедренный в вписанный; площадь его  $=\frac{3}{2}$  R $^3\sqrt{3}$ . Итакъ: изъ всихъ равнобедренныхъ вписанныхъ треугольниковъ правильный импетъ наибольшую площадъ.

II. Если прямая xy пересвиаеть кругь, то для каждой части круга получается шахішит. Къ большему сегменту относится разобранный случай; для меньшаго изъ ур-нія  $(x'-a)\sqrt{\mathbf{R}^2-x''^2}=(x''-a)\sqrt{\mathbf{R}^2-x''^2}$ 

находимъ: 
$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8R^2}}{4}$$
.

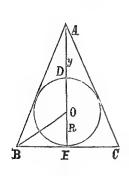
Если паравлень проходить черезъ центръ, то a=0, и  $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$ 

664. Методъ равныхъ норней. — Пусть вривая PAQ (Черт. 85) изображаетъ ходъ функціи f(x); давая функціи частное значеніе m и рѣшая ур-ніе f(x)-m=0, мы опредѣляемъ тѣ значенія x, при которыхъ функція получаетъ эту величину m. Съ геометрической точки зрѣнія это приводится къ опредѣленію точекъ встрѣчв кривой съ параллелью, проведенною въ разстояніи m отъ оси x. Когда m мало разнящіяся между собою; они дѣлаются равными между собою и ОВ, когда m обращается въ АВ. Итакъ, когда цѣлая въ x функція получаетъ при  $x=\alpha$  тахітиш m', уравненіе f(x)-m'=0 имѣетъ два корня равные  $\alpha$ , п слѣд. его первая часть раздѣлится на  $(x-\alpha)^2$ . Въ самомъ дѣлѣ: если ур. f(x)-m=0 имѣетъ корни  $\alpha'$  и  $\alpha''$ , то  $f(\alpha')-m=0$  п  $f(\alpha'')-m=0$ ; первое равенство показываетъ, что f(x)-m дѣлится на  $x-\alpha'$ , второе, что тотъ же полиномъ дѣлится на  $x-\alpha''$ ; сл. онъ дѣлится и на  $(x-\alpha')(x-\alpha'')$ , и при  $\alpha'=\alpha''$ , на  $(x-\alpha)^2$ . Отсюда правило:

Чтобы найти тахітит цьлой функціи, дьлимі разность f(x) - m на  $(x-\alpha)^2$  или на  $x^2-2\alpha x+\alpha^2$ , продолжая дьйствіе до тьхъ поръ, пока получится остатокъ первой степени, вида  $\mathbf{M}x+\mathbf{N}$ ; выражають, что этоть остатокъ тождественно равенъ нулю при всякомъ x, полагая  $\mathbf{M}=0$ ,  $\mathbf{N}=0$ ; ръшивъ эти уравненія, и найдемъ  $x=\alpha$ , соотвътствующій тахітиту, и самый этоть тахітит m.

Очевидно, то-же относится и къ minimum'у функціи.

665. Примвръ. — Изъ всъхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, описанныхъ около круга, найти тр-къ наименьшей илощади.



Если перемъщать вершину A по высотъ AE отъ D до безконечности, то илощадь  $\triangle$ -ка будетъ измъняться отъ  $\infty$  до  $\infty$ , слъд. имъетъ minimum. Пусть половина основанія равна x, высота = R + y; чтобы выразить y черезъ x, изъ  $\triangle$  ABE, по свойству биссектриссы, имъемъ y: R = AB: x, или  $y^2: R^2 = [(y+R)^2 + x^2]: x^2$ , откуда найдемъ:  $y = \frac{R(R^2 + x^2)}{x^2 - R^2}$ . Подставляя это выраженіе въ формулу площади тр-ка, получимъ

$$\triangle ABC = x(y + R) = x(\frac{R(R^2 + x^2)}{x^2 - R^2} + R) = \frac{2Rx^3}{x^2 - R^2}.$$

Черт. 88.

Вопросъ приводится къ нахожденію minimum'а выраженія  $\frac{x^3}{x^2-\mathbb{R}^2}$ . Приравнивая это выраженіе m, поду-

чаемъ ур-ніе

$$x^3 - mx^2 + mR^2 = 0.$$

Раздъливъ первую часть его на  $x^2-2\alpha x+\alpha^2$ , находимъ въ остаткъ  $(3\alpha^2-2\alpha m)x+(mR^2-2\alpha^3+\alpha^2 m)$ , откуда, слъдуя правилу, имъемъ 2 ур-нія  $3\alpha^2-2\alpha m=0$ ,  $mR^2-2\alpha^3+\alpha^2 m=0$ .

Изъ перваго находимъ:  $m=\frac{3}{2}\,lpha;$  подставляя во второе, получаемъ: x=

 $R\sqrt{3}$ ; себд.  $m=\frac{3}{2}$   $R\sqrt{3}$ , а минимальная площадь  $=3R^2\sqrt{3}$ : заключаемъ, что искомый треугольникъ—правильный.

# II. Махіта и тіпіта квадратной дроби $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$

666. Первый методъ. — Нужно опредёлить а такъ, чтобы при всякомъ знакъ безконечно—малаго h, имъло мъсто неравенство

$$\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c}{a'(x+h)^2+b'(x+h)+c'}-\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \leq 0,$$

гдъ знакъ < относитен къ случаю maximum'а дроби, знакъ > къ случаю ем minimum'a.

Умножая на произведеніе знаменателей, которое положительно, ибо полиномъ  $a'(x+h)^2+b'(x+h)+c'$ , разнясь безконечно мало отъ  $a'x^2+b'x+c'$ , имъетъ одинаковый съ нимъ знакъ, находимъ неравенство:

$$[a(x+h)^2 + b(x+h) + c][a'x^2 + b'x + c'] -$$

$$-[a'(x+h)^2 + b'(x+h) + c'](ax^2 + bx + c) \leq 0,$$

которое, будучи упрощено и расположено по возрастающимъ степенямъ h, приводится къ:

$$h[(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+bc'-cb']+h^2[(ab'-ba')x+ac'-ca'] \leq 0 . . . (1).$$

Чтобы это выраженіе не перемѣняло знака вмѣстѣ съ h, коэффиціенть при h долженъ быть нулемъ; слъд. значенія x, которыя могутъ дать дроби максимальное пли минимальное значеніе, суть корни уравненія:

$$(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')=0$$
. . . . . (2).

Итакъ первое условіе, чтобы дробь имѣла maximum или minimum, состоитъ въ томъ, чтобы ур. (2) имѣло корни дѣйствительные, т. е. чтобы было

$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb') \ge 0$$
 . . . . . (3)

Взявъ равенство, т. е. полагая, что ур. (2) имъетъ корни равные, находимъ, что общая величина ихъ опредъляется равенствомъ:  $x = -\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ , откуда x(ab'-ba') + ac'-ca' = 0;

отсюда следуеть, что неравенство (1) привело бы къ равенству 0 = 0, каково бы ни было h: въ этомъ случав, след., дробь не имветь ни maximum'a, ни minimum'a.

Обращаясь къ равенству  $(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0$ , замъчаемъ, что, какъ доказано въ § 490, оно выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы два ур-нія  $ax^2+bx+c=0$  и  $a'x^2+b'x+c'=0$  имъли общій корень, именно:  $x_1=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ ; сл. оба члена дроби дълятся на  $x-x_1$  и по сокращенія, дробь приводится къ  $\frac{\alpha x+\beta}{\alpha'x+\beta'}$ , а это выраженіе не имъть ни махімим'а, ни мілімим'а (§ 602).

Итанъ, пусть существуетъ неравенство (3), и пусть x' и x'' суть два корня ур-нія (2), причемъ x' < x''; сравнивая ихъ съ полусумною корней, имѣемъ неравенства

$$x' < -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} < x'' \cdot$$

1-й случай: ab'-ba'>0. Предыдущія неравенства тождественны слі-

$$(ab'-ba')x'+ac'-ca'<0, (ab'-ba')x''+ac'-ca'>0.$$

Отсюда выводимъ:

$$[(ab'-ba')x'+(ac'-ca')]h^2<0, \quad [(ab'-ba')x''+(ac'-ca')]h^2>0.$$

Первое условіє выражаєть, что величинь x' соотвътствуєть тахітит дроби, а второе, что большему корню x'' отвъчаєть тіпітит дроби.

**2**-й случай: ab'-ba'<0. — Умножая на положительное количество — (ab'-ba'), находимъ

 $[(ab'-ba')x'+ac'-ca']h^2>0$  и  $[(ab'-ba')x''+ac'-ca']h^2<0;$  заключенія обратны предыдущимъ.

3-й случай: ab'-ba'=0. — Ур-ніе (2) въ этомъ случав дёлается 1-й степени, а потому дробь имветь тахіти или тіпітит, смотря потому, отрицательно ac'-ca' или положительно, ибо неравенство (1) приводится къ  $h^2(ac'-ca') \leq 0$ .

Наконецъ, если бы сверхъ того имъли ac'-ca'=0, и слъд.  $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ , дробь не имъла бы ни maximum'a, ни minimum'a: она имъла бы постоянную величину  $\frac{a}{a'}$ , при всикомъ x. Этотъ анализъ приводитъ къ слъдующему правилу нахожденія maximum'a и minimum'a квадратной дроби:

Составляемь уравнение:

$$(ab'-bc')x^2+2(ac'-ca')x+bc'-cb'=0$$
 . . . . . . . (2).

Если его корни равные или мнимые, дробь не импеть ни тахітит'а, ни тіпітит'а; если же корни дъйствительные и неравные, то меньшему корню соотвътствуеть тахітит, большему тіпітит, если коэффицієнть ab'-ba' положителень; напропивь, меньшему корню отвъчаеть тіпітит, а большему тахітит, если ab'-ba'<0; если же ab'-ba'=0, дробь импеть тахітит или тіпітит, смотря потому, будеть ли ac'-ca'<0 или >0.

 $\Pi$ Римъръ I. — Найти тахітит и тіпіит дроби  $\frac{5x-1}{4x^2}$ 

Уравненіе, аналогичное (2), въ данномъ случать есть:  $-20x^2+8x=0$ , откуда: x'=0,  $x'=\frac{2}{5}$ .

Меньшему корию соотв'ятствует в абсолютный minimum дроби, равный —  $\infty$ ; большему корию — maximum, равный  $\frac{25}{16}$ .

 $\Pi$ Римъръ II. — Найти техітит и тіпітит дроби  $\frac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ .

Уравненіе, дающее значенія x, обращающія дробь въ maximum и minimum, въ данномъ случать есть

$$-bx^2+2(a-c)x+b=0.$$

Корни этого ур-нія всегда д'й й ствительные и неравные, ибо подрадикальное количество есть сумма двухъ квадратовъ. Такимъ образомъ, если b>0, дробь имветъ

$$\max = \frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{2}, \quad \text{iph } x = \frac{a - c + \sqrt{(a - c) + b^2}}{b}; \quad \text{iph } x = \frac{a - c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{b}.$$

Обратно—если b < 0.

667. Второй методъ. — Приравнявъ дробь произвольному, но опредъленному, количеству m. опредълимъ, при какихъ значеніяхъ перемъннаго x она можетъ имъть эту величину m. Искомыя значенія x дастъ ур-ніе

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = m, \quad \text{with} \quad (a - a'm)x^2 + (b - b'm)x + c - c'm = 0,$$

изъ котораго

$$x = \frac{-(b - b'm) \pm \sqrt{(b - b'm)^2 - 4(a - a'm)(c - c'm)}}{2(a - a'm)},$$

или, расположивъ подрадикальное количество по степенямъ m, найдемъ:

$$x = \frac{b'm - b \pm \sqrt{(b'^2 - 4a'c')m^2 + 2(2ac' + 2ca' - bb')m + b^2 - 4ac}}{2(a - a'm)}.$$

Положивъ

$$b'^2 - 4a'c' = P$$
,  $2ac' + 2ca' - bb' = Q$ ,  $b^2 - 4ac = R$ ,

дадимъ подрадикальному количеству видъ

Для того, чтобы перемѣнное x было дѣйствительно, пеобходимо, чтобы подрадикальное количество не было отрицательнымъ, т. е. чтобы было

$$Pm^2 + 2Qm + R \geqslant 0$$
 . . . . . . . . . . . . (2).

Итакъ, m можетъ изивняться только въ предвлахъ, удовлетворяющяхъ этому неравенству; соотвътствующія значенія x получатся изъ формулы

$$x = \frac{b'm - b \pm \sqrt{Pm^2 + 2Qm + R}}{2(a - a'm)} \quad . \quad . \quad (3).$$

Здѣсь могутъ представиться три случая: Q² — PR > 0, Q² — PR = 0 и Q² — PR < 0.

Первый случай:  $Q^2 - PR > 0$ . — Корни тринома (1) будуть дъйствительные неравные: пусть меньшій корень будеть m', большій m''. Извъстно, что при всякомь значеніи m, лежащемь внѣ корней, знакъ тринома (1) одинаковь съ знакомъ коэффиціента P; при всѣхъ же значеніяхъ m, лежащихъ между корня

ми, знакъ тринома противоположенъ знаку Р. Отсюда необходимость различать два случая:

1. P > 0. Неравенство (2) будеть удовлетворено, если количеству m будемь давать значенія, лежащія внё корней тринома (1); такимь образомь дробь m можеть принимать два ряда значеній: оть  $-\infty$  до m' и оть m'' до  $+\infty$ . Заключаемь, что m' есть наибольшее значеніе перваго ряда, а m''—наименьшее значеніе втораго ряда, т. е. maximum дроби равень меньшему корню тринома (1), а minimum—большему его корню; и дробь не имѣеть значеній между корнями тринома. Когда дробь принимаеть максимальное и минимальное значеніе, подрадикальное количество формулы (3) обращается въ ноль, и

$$x = \frac{b'm - b}{2(a - a'm)};$$

подставивъ сюда m' вмёсто m, найдемъ x, соотвётствующій maximum'y дробн, а замёнивъ m количествомъ m', найдемъ x, соотвётствующій minimum'y.

2. P < 0. Неравенство (2) будеть удовлетворено, если количеству m дадимь значенія, лежащія между корнями тринома (1); такимь образомь дробь m можеть имёть всё значенія въ предёлахъ:  $m'' \ge m \ge m'$ , т. е. меньшій корень m ринома (1) есть m ініши дроби, а большій—ея m ахітит. Соотвётствующія значенія m вычисляются по прежней формуль.

 ${
m I\hspace{-.1em}I}$  Римвры.—1. Найти тахітит и тіпітит дроби  $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$ .

Приравнявъ данную дробь произвольному количеству m, ръшаемъ ур.

$$\frac{x^2-2x+21}{6x-14}=m, \text{ или } x^2-(2+6m)x+(14m+21)=0,$$

откуда

$$x=1+3m\pm\sqrt{9m^2-8m-20}$$
.

Корни подрадикальнаго тринома суть: 2 и  $-\frac{10}{9}$ . Такъ какъ въ данномъ случат P>o, то заключаемъ, что maximum дроби равенъ меньшему корню, а minimum—большему; слъд.

max. 
$$(m) = -\frac{10}{9}$$
; minimum  $(m) = 2$ .

Подставивъ въ формулу x виъсто m, сперва  $\left(-\frac{10}{9}\right)$ , а потомъ 2, и заиъ-чая, что при этихъ значеніяхъ m подрад. колич. обращается въ ноль, находимъ:

$$x_{\text{(max.)}} = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}; \quad x_{\text{(min.)}} = 1 + 3 \cdot 2 = 7.$$

2. Haŭmu max. u min. дроби  $\frac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$ .

Приравнявъ дробь количеству m, и ръшивъ полученное ур. относительно x, имъемъ

$$x = \frac{5 - m \pm \sqrt{-3m^2 - 2m + 2}}{2(1 - m)}.$$

Корни подрадинальнаго тринома суть: — 3 и  $+2\frac{1}{3}$ ; а какъ P < 0, то за-

виючаемъ, что большій корень есть maximum дроби, меньшій — ея minimum; итакъ

max. 
$$(m) = 2\frac{1}{3}$$
; minimum  $(m) = -3$ .

Вычисливъ соотвътствующія значенія x по формуль  $x=\frac{5-m}{2(1-m)}$  находимъ:  $x_{\max}=-1; \quad x_{\min}=+1.$ 

Второи случаи:  $Q^2 - PR = 0$ . —Триномъ (1) имѣетъ корни дѣйствительные равные и общая величина ихъ  $= -\frac{Q}{P}$ ; триномъ принимаетъ видъ  $P(m + \frac{Q}{P})^2$ , а условіе дѣйствительности x — видъ:

$$P\left(m+\frac{Q}{P}\right)^2 \ge 0.$$

Заплючаемъ, что триномъ всегда имъетъ знакъ количества Р. Отсюда:

1. P>0. При всякомъ m триномъ (1) остается положительнымъ, а при  $m=-\frac{Q}{P}$  обращается въ ноль, слёд. дробь можетъ имёть какую угодно величину, и слёд. нётъ ни maximum'a, ни minimum'a. Это можно было предвидёть; въ самомъ дёлё:  $Q^2-PR=(2ac'+2ca'-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')$ ; но въ данномъ случаё это выраженіе =0, а мы видёли (§ 490), что при такомъ условіи триномы  $ax^2+bx+c$  и  $a'x^2+b'x+c'$  имѣютъ одинъ общій корень, а слёд. оба члена дроби—общаго множителя; сокративъ его, найдемъ

$$m = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'}.$$

Отсюда видно, что задача всегда возможна; всегда найдемъ для x одну величину, и только одну, при которой дробь принимаетъ данную величину.

2. P < 0. Въ этомъ случай триномъ (1) будетъ отрицателенъ при всякомъ m, кромв  $m = -\frac{Q}{P}$ ; слёд. какую бы величину дробь m ни имъла, кромв величины  $-\frac{Q}{P}$ , x остается мнимымъ, и только при  $m = -\frac{Q}{P}$ , онъ дёйствителенъ; слёд., наоборотъ, всякая дёйствительная величина x должна дёлать дробь равною  $\left(-\frac{Q}{P}\right)$ , иначе говоря, дробь должна имътъ постоянную величину, а слёд. не имъетъ ни тах., ни тіп.

Можно доказать непосредственно, что когда совмѣстно имѣемъ P < 0 и  $Q^2 - PR = 0$ , то дробь имѣетъ постоянную величину. Въ самомъ цѣлѣ

$$Q^{2} - PR = a'c' \left[ b - \frac{b'(ac' + ca')}{2a'c'} \right]^{2} + \frac{4a'c' - b'^{2}}{4a'c'} (ac' - ca')^{2} . \quad (4)$$

Но P или  $b'^2$  — 4a'c' < 0, след.  $4a'c' - b'^2 > 0$ , откуда 4a'c' > 0; след.  $Q^2$  — PR есть сумма двухъ существенно-положительныхъ количествъ, и потому м. б. нулемъ только тогда, когда каждое изъ этихъ количествъ въ отдельности = 0; итакъ, должно быть:

$$b - \frac{b'(ac' + ca')}{2a'c'} = 0$$
 . . . . (1)  $\mathbf{n}$   $ac' - ca' = 0$  . . . . . (2),

или, замћнивъ въ (1) c' его величиною, выведенною изъ (2):

$$\begin{cases} 2bc \cdot \frac{a'^2}{a^2} - 2b'ca' = 0, \text{ fight } \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}, \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}; \end{cases}$$

т. е.

но мы видъли (§ 491), что при этихъ условіяхъ дробь ниветъ постоянную величину, пе зависить отъ x.

1-й способъ. Оставаясь постоянною при всякомъ x, дробь должна вмѣть одну и ту-же величину и для трехъ различныхъ значеній x, напр. для x=0, x=1 и x=+1; слѣд. должно быть:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a - b + c}{a' - b' + c'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'},$$

откуда, по § 329, найдемъ:

$$\frac{c}{c'} = \frac{a+c}{a'+c'} = \frac{b}{b'}$$
, вып, наконецъ,  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ .

Эти условія, будучи необходимы, вийстй съ тймъ и достаточны; ибо какъ скоро они выполнены, то, назвавъ общую величину равныхъ отношеній буквою k, найдемъ: a=a'k, b=b'k, c=c'k, и дробь беретъ видъ  $\frac{k(a'x^2+b'x+c')}{a'x^2+b'x+c'}$ , т. е. =k.

2-й способь. Пусть постоянная, впрочемъ, пензвъстная, велична дроби будеть k. Положить  $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=k$  значить положить, что  $ax^2+bx+c=k(a'x^2+b'x+c')$ , или  $(a-a'k)x^2+(b-b'k)x+c-c'k=0$ , каковъ бы ни быль x. Отсюда, по § 72, заключаемъ, что

$$a - a'k = 0$$
,  $b - b'k = 0$ ,  $c - c'k = 0$ , nan  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ .

Третій случай.  $Q^2 - PR < 0$ . Въ этомъ случав корня тринома (1) мнимые, слъдъ триномъ всегда сохраняетъ знавъ коэффиціента P. Отсюда:

- 1. P>0. Подрадивальное количество формулы x будеть при всякомъ m положительно, а сл. x дъйствителенъ; такимъ обр. дробь m можетъ имъть накую угодно величину, и слъд. не имъетъ ни maximum'a, ни min.
- 2. P < 0. Подрадивальное колич. Формулы x будеть существенно-отрицательно, слъд. при всякомъ m для x будеть получаться мнимое значеніе; а слъд. обратно. какое-бы дъйствительное значеніе мы ни дали перемъпному x, дробь m не можеть получить дъйствительнаго значенія. Но это заключеніе, очевидно, нельно, пбо изъ ур-нія  $m = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$  видно, что дъйствительному зна-

ченію x соотвътствуеть дъйствительное же значеніе дроби m. Стало-быть, случай совмъстнаго существованія условій: P < 0 и  $Q^2 - PR < 0$  невозможенъ.

Впрочемъ, можно доказать это и прямо; въ самомъ дълъ, изъ формулы (4) видно, что когда P < 0, выраженіе  $Q_2 - PR$  представляеть сумму двухъ квадратовъ, а такая сумма никогда не можеть быть отрицательною.

Частные случаи. Когда P=0, подрадикальное выраженіе формулы x обращается въ 2Qm+R. Чтобы перемённое x было дёйствительно, необходимо, чтобы  $2Qm+R \le 0$ , или  $2Qm \le -R$ . Отсюда:

- 1) Есля Q>0, то  $m > -\frac{R}{2Q}$ , савд. min.  $(m)=-\frac{R}{2Q}$ : дробь вмёсть только min., и не имёсть max.
- 2) Если Q < 0, то  $m < -\frac{R}{2Q}$ , отвуда max.  $(m) = -\frac{R}{2Q}$ : дробь имъетъ только maximum, и не имъетъ min.
- 3) Если Q = 0, неравенство приводится въ R > 0: оно всегда удовлетворяется; ибо въ этомъ случав  $b^2-4ac=\frac{(ac'-ca')^2}{a'c'}$ , гдв a'c'>0, т. в.  $b'^2-4a'c'=0$ . След. всякому значенію m отвёчаетъ действительное значеніе  $x^{ca}$ : дробь не имёстъ ни max., ни min.

Изсявдованіе приводить въ сявдующему результату: Когда корни тринома  $Pm^2 + 2Qm + R$  мнимые или дпйствительные расные, дробь не имъетъ ни тах., ни тіп.; если же корни этого тринома дпйствительные неравные, дробь импеть тахітит и тіпітиш, выражаемыя корнями тринома; соотвитствующія значенія х получаются изъ формулы

$$x = -\frac{b - b'm}{2(a - a'm)},$$

въ которой т нужно замънить корнями тринома.

О результатахъ этого изследованія мы получимъ боле ясное понятіе, изследуя измененія дроби при измененіи x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$ .

# III. Изслъдованіе измъненій дроби $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ при измъненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ .

668. Теорема: Квадратная дробь непрерывна при измпненіи x ото  $\alpha$  до  $\beta$ , если только въ промежуткъ между  $\alpha$  и  $\beta$  не содержится ни одинъ изъ порней знаменателя.

Во первыхъ очевидно, что данная дробь дъйствительна при всякомъ дъйствит. x, и что она конечна, если только значеніе, данное x-cy, не обращаетъ знаменателя въ ноль. Остается доказатъ, что если  $x_1$  есть нъкоторое значеніе x, заключающееся между  $\alpha$  и  $\beta$ , то количеству  $x_1$  всегда можно дать при-

ращеніе h, на столько близкое къ нулю, чтобы и приращеніе K дроби  $y_1$  само было какъ угодно близко къ нулю. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{a'x_1^2 + b'x_1 + c'}, \quad y_1 + \mathbb{K} = \frac{a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c}{a'(x_1 + h)^2 + b'(x_1 + h) + c'}, \\ \mathbb{K} &= \frac{[a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c](a'x_1^2 + b'x_1 + c') - [a'(x_1 + h)^2 + b'(x_1 + h) + c'](ax_1^2 + bx_1 + c)}{[a'(x_1 + h)^2 + b'(x_1 + h) + c'](a'x_1^2 + b'x_1 + c')} \end{aligned}$$

иди, по упрощеніи числителя,

$$\mathbf{K} = \frac{h \left\{ (ab' - ba') x_1^2 + \left[ (ab' - ba') h + 2 (ac' - ca') \right] x_1 + \left[ (ac' - a'c) h + (bc' - b'c) \right] \right\}}{\left[ a' (x_1 + h)^2 + b' (x_1 + h) + c' \right] \left( a' x_1^2 + b' x_1 + c' \right)}.$$

По мъръ приближенія h къ нулю числитель стремится къ нулю, а знаменатель къ  $(\alpha'x_1^2+b'x_1+c')^2$ . Но  $x_1$  не обращаеть этого тринома въ ноль, ибо интерваллъ отъ  $\alpha$  до  $\beta$ , содержащій  $x_1$ , не содержить корней знаменателя; слёд. вмъстъ съ h и K стремится къ нулю; пначе говоря, можно приращенію h перемъннаго x дать значеніе настолько близкое къ нулю, чтобы и соотвътственное приращеніе K дроби было также какъ угодно близко къ нулю; что и требовалось доказать.

Примпъсите. — Если x — су дать знаніе  $x_1$ , обращающее въ ноль знаменателя дроби, то она вообще обратится въ безконечность, испытывая при этомъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ  $\pm \infty$  въ  $\pm \infty$ , если только корни знаменателя неравные, или если оба члена дроби не имѣютъ общаго множителя  $x-x_1$ . Если эти исключенія не имѣютъ мѣста, то слѣдуетъ опредѣлить знакъ безконечности, когда x приближается къ  $x_1$ , возрастая, и затѣмъ переходитъ чрезъ  $x_1$ . Для этого достаточно опредѣлить знакъ числителя при  $x=x_1$ ; зная знакъ и знаменателя, будемъ знать и знакъ дроби.

- 669. При изученій изміненій дроби будеми держаться слідующаго порядка.
- 1. Опредъляемъ maximum и minimum, если таковыя имъются, и соотвътственныя значенія x.
- 2. Приравниваемъ нулю числителя, потомъ знаменателя и рѣшаемъ полученныя ур-нія: корни перваго ур-нія, если они дѣйств., дадутъ тѣ значенія x, при которыхъ пробъ обращается въ ноль; втораго тѣ значенія x, при которыхъ она обращается въ  $\pm \infty$ .
  - 3. Опредъляемъ значение дроби при x = 0.
  - 4. Наконецъ, ищемъ предъльныя вначенія дроби, т. е. при  $x=\pm\infty$ .

Расположивъ значенія x въ порядкъ ихъ возрастанія, а противъ нихъ соотвътствующія величины дроби, составинь таблицу, ясно показывающую измъненія дроби по величинъ и знаку. Для наглядности такую таблицу буденъ сопровождать графическимъ изображеніемъ измѣненій дроби.

#### Задача І.

**670.** *Изсандовать измпиенія дроби*  $\frac{3x^2+2x-3}{4x^2-10x+7}$  при непрерывномь возрастаніи x от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Следуя вышеозначенному плану, определяемъ:

1. Maximum и minimum дроби. — Приравнивая данную дробь произвольному количеству у, получаемъ ур-ніе

$$\frac{3x^2+2x-3}{4x^2-10x+7}$$
 =  $y$ , или  $(3-4y)x^2+(2+10y)x-(3+7y)=0$ ,

изъ котораго (расположивъ подрадик. колич. по степенямъ у):

$$x = \frac{-(1+5y) \pm \sqrt{-3y^2 + 19y + 10}}{3-4y} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Приравнявъ подрадик. выраженіе нулю и рѣшивъ ур.  $3y^2-19y-10=0$ , находимъ: y'=-0.488, y''=6.821; а какъ въ данномъ случаѣ коэффиціентъ при  $y^2$  подъ радикаломъ отридателенъ, то заключаемъ, что большій корень есть такішит дроби, меньшій — ея тівішит. Итакъ

max. 
$$(y) = 6.821$$
; min.  $(y) = -0.488$ .

Соотвътствующія значенія x суть:

$$x_{\text{max.}} = \frac{-(1+5.6,821)}{3-4.6,821} = 1,445; \quad x_{\text{min.}} = -\frac{(1+5.-0,488)}{3-4.-0,488} = 0,291.$$

Заключаемъ, что дробь можетъ измѣняться только между — 0,488 и +6,821 и не имѣетъ значеній, меньшихъ — 0,488 и большихъ 6,821. Всякое же значеніе между этими предѣлами она принимаетъ два раза, при двухъ различныхъ значеніяхъ x, потому-что для каждаго y, лежащаго между — 0,488 и +6,821, мы изъ формулы (1) находимъ два различныхъ дѣйствит. значенія x.

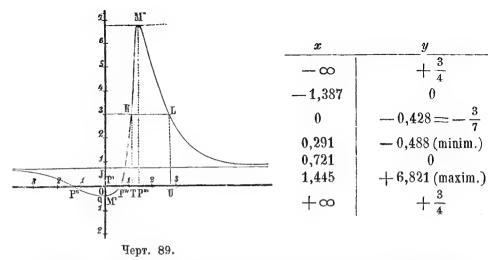
2. Нулевыя значенія дроби, соотв'єтствующія конечнымъ значеніямъ x. — Алгебраическая дробь  $\frac{A}{B}$  обращается въ ноль, когда обращается въ ноль числитель A, знаменатель же B остается отличнымъ отъ нуля; или когда B обращается въ  $\infty$ , причемъ A остается конечнымъ. Но B — выраженіе ц'єлое относительно x, сл. оно не можетъ обратиться въ  $\infty$  при конечныхъ x; остается приравнять A нулю. Положивъ  $3x^2+2x-3=0$  и р'єшивъ это ур., найдемъ:

$$x' = -1,387, \quad x'' = +0,721.$$

- 3. Везконечныя значенія дроби. Дробь не обращается въ  $\infty$ ; въ этомъ убъждаемся, приравнявъ знаменателя нулю, и ръшивъ ур-ніе  $4x^2-10x+7=0$ : найдемъ для x мнимыя значенія.
  - 4. Значеніє дроби при х = 0. Положивъ x = 0, найдемъ  $y = -\frac{3}{7}$ .
- 5. Предъльныя значенія дроби. Положивъ  $x=\pm\infty$ , находимъ, что y принимаетъ неопред. видъ $\frac{\infty}{\infty}$ , для раскрытія котораго дѣлимъ числ. и знам. на  $x^2$  и затѣмъ полагаемъ  $x=\pm\infty$ .

Такимъ образомъ получаемъ, что при  $x=\pm\infty,\ y=\pm\frac{3}{4}$ .

Результаты этого изследованія дають следующую таблицу измененій дроби:



Кривая измененій дроби. — Взявъ оси координамъ xx' и yy' и произвольную прямую за 1, наносимъ на оси x—овъ OP''=-1,387 и получаемъ точку P'', для которой ордината равна 0, и въ которай, слъд., кривая пересъкаетъ ось отрицательныхъ x—овъ. Отложивъ 0Q=-0,428, имъетъ точку Q, въ которой кривая пересъкаетъ ось отрицательныхъ y—овъ. Нанеся 0P'=0,291 и возставивъ въ точкъ P' перпеидикуляръ къ оси x—овъ, откладываемъ на немъ P'M'=-0,488— ординату minimum. Нанеся  $0P^{IV}=0,721$ , получаемъ другую точку  $P^{IV}$ , въ которой кривая пересъкаетъ ось x-овъ. 0P'''=1,445 даетъ точку P''', въ которой проведя перп. P'''M''=6,821, имъемъ наибольшую ординату. Наконецъ, отложивъ  $0I=\frac{3}{4}$  и проведя черезъ точку I параллель оси x—овъ, имъемъ ассимитоту кривой, къ которой кривая неограниченно приближается сливаясь съ него на безконечныхъ разстояніяхъ отъ оси y—овъ.

Соединяя построенныя точки непрерывною кривою, получаемъ линію, представленную на черт. 89 . Такъ какъ каждую свою величину дробь принимаетъ только два раза при двухъ различныхъ значеніяхъ x (напр. y=3 при x=0Т и x=0U), то всякая прямая параллельная xx' пересъкаетъ кривую только въ двухъ точкахъ. Исключеніе составляютъ тах. и тіп.: прямыя, параллельныя оси x и проведенныя отъ нея, одна въ разстояніи — 0,488, другая 6,821, встръчаютъ кривую, каждая въ одной точкъ, иначе — касательны къ кривой. Такимъ обр., кривая не можетъ представлять иныхъ изгибовъ, кромъ указанныхъ на чертежъ. Чертежъ наглядно роказывастъ, что — 0,488 есть наименьшая ордината или тіпітит дроби, в — 6,821 — наибольшая, или тахітит дроби.

## Задача II.

**671.** Изсладовать изманенія дроби  $\frac{2x^3+3}{x^4+4x+5}$  при непрерывномь возрастаніи x от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

1. Махітит и тіпітит дроби. — Приравнявъ дробь у-ку, получаемъ ур.

$$\frac{2x^2+3}{x^2+4x+5}=y, \quad \text{ мян} \quad (2-y)x^2-4y.x+3-5y=0,$$

откуда

$$x = \frac{2y \pm \sqrt{-y^2 + 13y - 6}}{2 - y}$$
.

Корни подрад. тринома суть: y'=0.48 и y''=12.52, и какъ коэф. при  $y^2$  отрицателенъ, то заключаемъ, что

max. 
$$(y) = 12,52$$
; minimum.  $(y) = 0,48$ .

Соотвётствующія значенія х суть:

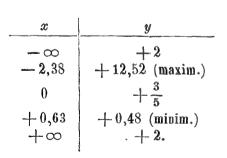
$$x_{\text{max.}} = \frac{2.12,52}{2-12,52} = -2,38;$$
  $x_{\text{min.}} = \frac{2.0,48}{2-0,48} = 0,63.$ 

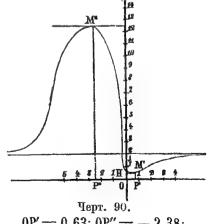
Такимъ образомъ дробь можетъ измѣняться только между предѣлами 0.48 и 12.52, принимая каждое свое значеніе между этими предѣлами два раза — при двухъ различныхъ значеніяхъ x.

- 2. Нулегыя значенія дроби. Такъ какъ между предълами 0,48 и 12,52 не содержится ноль, то дробь ни при какихъ дъйствительномъ x не обращается въ ноль. Это видно и изъ того, что приравнивая числителя нулю, получаемъ ур.  $2x^2+3=0$ , имъющее мнимые корни.
- 3. Безконечныя значенія дроби. Дробь не обращается въ  $\infty$ , ибо корни знаменателя мнимые.
- 4. Значеніе дроби при х = 0. Положивъ x = 0, имѣемъ y =  $\frac{3}{5}$ . Сл. кривая пересъкаетъ ось y на разстояніи  $+\frac{3}{5}$  отъ начала.
- 5. Предпланыя значенія дроби. Какъ и въ предыдущей задачъ, найдемъ, что при  $x=\pm\infty,\ y=2$ . Слъд. кривая неограниченно приближается къ ассимптотъ, параллельной оси x и отстоящей отъ нея на 2.

Таблица измъненій дроби.

Кривая измъненій дроби.





0P' = 0,63; 0P'' = -2,38; P'W' = 0,48; P''M'' = 12,52. $0H = \frac{3}{6}; 0J = 2.$ 

#### Задача III.

**В72.** Пзсладовать изманенія дроби  $\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$  при изманеніи x оть  $-\infty$  до  $+\infty$ .

1. Махітит и тіпітит. — Положивъ

$$\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}=y, \text{ hiff } (1-y)x^2+4y.x+1-3y=0,$$

находимъ

$$x = \frac{-2y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 1}}{1 - y}$$
.

Корип тринома  $y^2 + 4y - 1$  суть: y' = -4,236; y'' = 0,236; а какъ козоопціенть при  $y^2$  положителень. то

max. 
$$(y) = -4,236$$
; min.  $(y) = 0,236$ ;

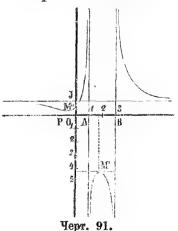
соотв'єтствующія значенія x суть: x = 1,618; x = -0,617.

- 2. Дробь не обращается въ ноль, ибо числитель  $x^9 + 1$  существенно положителенъ.
- 3. Дробь обращается въ  $\infty$ , или претерпѣваетъ разрывъ непрерывности при двухъ значеніяхъ x, обращающихъ знаменателя въ ноль; именно при x'=1 и x''=3. Для опредѣленія знаковъ безконечности, замѣчаемъ, что числитель дроби при всякомъ x положителенъ, сл. нужно изслѣдовать знаки знаменателя. Обозначивъ буквою h произвольно малое полож. количество, замѣчаемъ, что x=1-h и x=3+h будутъ находиться внѣ корней знаменателя, и слѣд. при этихъ значеніяхъ x знаменатель положителенъ, а потому и y>0 затѣмъ x=1+h и x=3-h содержатся между корнями знаменателя, а потому знаменатель и вся дробь при этихъ значеніяхъ x отрицательна. Отсюда видно, что если измѣнятъ x отъ  $\infty$  непрерывно до  $+\infty$ , то при x=1 и при x=3 дробь претерпѣвать разрывъ непрерывности, перескакивая изъ  $+\infty$  въ  $\infty$ , въ первомъ случаѣ, т. е. при x=1, и изъ  $\infty$  въ  $+\infty$  во второмъ, т. е. при x=3.
  - 4. При x=0 дробь обращается въ $\frac{1}{3}$
  - 5. При  $x = \pm \infty$  она равна 1.

Таблица измпненій дроби.

<i>x</i>	$\boldsymbol{y}$
$-\infty$	1
-0,617	0,236 (minim.)
1 — h	$+\infty$
1+h	$-\infty$
1,618	-4,236 (maxim.)
3-h	$-\infty$
3 + h	$+\infty$
$+\infty$	1

Кривая измъненти.



Кривая измененій дроби. — Намітивъ точки М' и М", соотвітствующія тах. и тіп. дроби, проводимъ черезъ нихъ параллели оси х-овъ: кривая не имієть точекъ между этими параллелями. Затімъ наносимъ 0A=1 и 0B=3 и черезъ точки A и B проводимъ параллели оси y, которыя будутъ служить ассимптотами кривой въ містахъ разрыва непрерывности. Такъ какъ при  $x=\pm\infty$ , y=1, то параллель оси x на единичномъ отъ нея разстояній будетъ служить  $x=\pm\infty$ , y=1, то параллель оси  $x=\pm\infty$ , замічая, что для всіхъ х-овъ, лежащихъ вні  $x=\pm\infty$ , дробь  $x=\pm\infty$ , и  $x=\pm\infty$ , дежащихъ между  $x=\pm\infty$ , дежащихъ вні  $x=\pm\infty$ , добь  $x=\pm\infty$ , дежащихъ между  $x=\pm\infty$ , дежащихъ между  $x=\pm\infty$ , дежащихъ между  $x=\pm\infty$ , декащихъ между  $x=\pm\infty$ , декащихъ

#### Задача IV.

673. Изсладовать изманенія дроби  $\frac{2x^2-5x-4}{5x^2-8x-10}$  при непрерывномь изманеніи x оть  $-\infty$  до  $+\infty$ .—

1. Махітит и тіпітит. — Положивъ

$$\frac{2x^2-5x-4}{5x^2-8x-10}=y, \text{ мли } (2-5y)x^2-(5-8y)x-4+10y=0,$$

находимъ

$$x = \frac{5 - 8y \pm \sqrt{264y^2 - 240y + 57}}{2(2 - 5y)}$$

Убъдившись, что корни подрадивальнаго выраженія мнимые, заключаємъ, что оно всегда будетъ положительно, а потому дробь не имъетъ ни мах., ни min.

2. Приравнивая числителя нулю, найдемъ зпаченія x, при которыхъ дробь обращается въ 0; эти значенія суть:

$$x' = -0.638 \text{ m } x'' = 3.138.$$

3. Приравнивая знаменателя 0, получимъ значенія x, при которыхъ дробь обращается въ  $\infty$ ; эти значенія суть:

$$x^{\text{III}} = -0.824 \text{ m } x^{\text{IV}} = 2.424.$$

Для опредъленія знаковъ безконечности, даемъ дроби видъ:

$$y = \frac{2(x+0.638..)(x-3.138)}{5(x+0.824..)(x-2.424..)}.$$

Такъ какъ x=-0.824-h дежить какъ внѣ корней числителя, такъ и внѣ корней знаменателя, то и числ. и зн. дроби, а потому и саман пробь, положительны. x=-0.824+h находител внѣ корней числителя и ней знаменателя, слѣд. при этомъ значенін x числитель >0, а знаме а потому дробь отрицательна. Заключаемъ, что при переходѣ x чре дробь претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ + С Подобнымъ же образомъ убъднися, что когда x, возрастая, прох +2.424, дробь перескакиваетъ изъ +  $\infty$  въ  $-\infty$ .

- 4. При x = 0 нивемъ:  $y = \frac{2}{5}$ .
- 5. При  $x = \pm \infty$ , находимъ:  $y = \frac{2}{5}$ .

Кривая измъненій дроби.

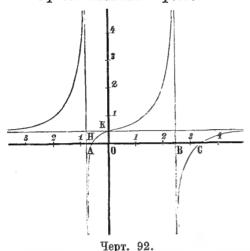


Таблица измъненій дроби.

y		
$+\frac{2}{3}$		
$+\infty$		
∞		
0		
$+\frac{2}{5}$		
$+\infty$		
$-\infty$		
0		
$+\frac{2}{5}$		

Таблица измѣненій дроби показываеть, что величина дроби постоянно увеличивается, но претерпѣваеть два раза разрывъ непрерывности: одинъ разъ при переходѣ x чрезъ — 0,824, другой разъ при переходѣ x чрезъ 2,424: вь томъ и другомъ случаѣ дробь перескавиваетъ изъ  $+\infty$  въ  $-\infty$ .

Кривая изминеній. — Отноживъ на оси у линію  $0K = +\frac{2}{5}$ , проводимъ черезъ точку К параллель оси x; затъмъ, отложивъ на оси x линін 0H = -0.824 и 0B = +2.424, проводимъ черезъ точки Н и В параллели оси y. Такимъ обр. получаемъ три ассимитоты вътвей кривой. Отложивъ на оси x линіи: 0A = -0.638 и 0C = 3.138, получимъ точки, въ которыхъ кривая пересъкаетъ ось x-овъ. Ось y она пересъкаетъ въ точкъ K.

#### Задача У.

**674.** Изсладовать пзманенія дроби  $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}$  при непрерывном изманеніи x от  $x_1=0$  до  $x_2=0$  при непрерывном изманеніи  $x_1=0$  при непрерывном изманенія  $x_1=0$  при непрерывном изманенія x

1. Махітит и тіпітит. — Положивъ

$$\frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}=y, \text{ when } (2-y)x^2-7(1-y)x+3(1-4y)=0,$$

находимъ

$$x = \frac{7(1-y) \pm \sqrt{y^2 + 10y - 25}}{2(2-y)}$$
.

Замъчан, что  $y^2 + 10y + 25 = (y + 5)^2$  и что, слъд., подрадикальное выражение всегда положительно, заключаемъ, что дробь не имъетъ ни мах., ни міп.

Если у-ку дадимъ какое-либо значеніе, то для x найдемъ два соотвътственныхъ значенія; только при y = -5, x принимаетъ одно значеніе = 3. Итакъ всякую свою величину дробь принимаетъ при двухъ различныхъ значеніяхъ x, кромъ величины, равной -5. Значенія x, соотвътствующія данному y, суть:

$$x = \frac{7(1-y) \pm (y+5)}{2(2-y)}$$
, and  $x = 3$  if  $x = \frac{1-4y}{2-y}$ ,

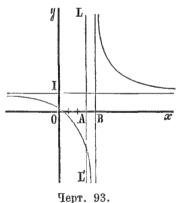
изъ которыхъ первое независитъ отъ y. Эта особенность объясняется тъмъ, что числ. и знам. дроби имъютъ общій корень x=3 и слъд. при x=3 оба члена дроби равны 0, а дробь неопредъленна.

Если сократить дробь на x-3, она приметь видъ

$$Y = \frac{2x-1}{x-4}$$
, откуда  $x = \frac{1-4Y}{2-Y}$ ;

всякой величинѣ Y соотвѣтствуетъ только одно значеніе x, слѣд. при возрастаній x отъ  $-\infty$  до  $+\infty$  дробь  $\frac{2x-1}{x-4}$  проходить только одинь разв чрезъ всякое свое значеніе; обращается въ 0 при  $x=\frac{1}{2}$ , и въ  $\infty$  при x=4; а при  $x=\pm\infty$  обращается въ 2. Замѣтивъ при этомъ, что при x=4-h,  $y=-\infty$ , а при x=4+h,  $y=+\infty$ , выразимъ ходъ измѣненій сокращенной дроби таблицей:

x	сокр. дробь Ү
$-\infty$	2
$\frac{1}{2}$	0
4-h	∞
4+h	+∞
$+\infty$	2



Что касается дроби  $\frac{2x^2-7x+8}{x^2-7x+12}$ , то какъ она принимаетъ какую угодно величину при x=3, то чтобъ изобразить вполнѣ ея изиѣненія, нужно къ кривой присоединить прямую LL', параллельную оси 0y и пересѣкающую ось х-овъ въ разстояніи 0A=3 отъ начала координатъ.

#### Задача VI.

675. Изсладовать изманенія дроби  $\frac{x^2-8x+15}{3x^2-24x+45}$  при непрерывномь изманеніи x от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Положивъ

 $\frac{x^2-8x+15}{3x^2-24x+45}=y, \quad \text{ мли} \quad (1-3y)x^2-8(1-3y)x+15(1-3y)=0,$  $(1-3y)(x^2-8x+15)=0$ , находимъ, что ур-ніе удовлетворяется при всякомъ y, когда  $x^2-8x+15$  равно нулю, т. е. когда x=3 и x=5, п кром'в того при всякомъ x, если только  $y=\frac{1}{3}$ . След. при x=3 и x=5, y можегъ имъть какую угодно величину, и кромъ того  $y=rac{1}{2}$  при

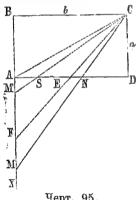
угодно x. Это объяснается тёмъ, что оба члена дроби имѣютъ одинавовые корни:

$$y = \frac{(x-3)(x-5)}{3(x-3)(x-5)}$$

величина дроби неопредъденна; а если сопритить дробь на (x-3)(x-5), то y д\*ялается  $=\frac{1}{3}$ , гаковъ бы ни былъ x.

Совокупность рѣшеній ур-нія  $x^2 - 8x + 15 =$  $y(3x^2-24x+45)$ , as  $(x^2-8x+15)(3y-1)=0$ геометрически изображается двумя параллелями оси у, отстоящими отъ начала на 0A = 3 и 0B = 5, и нараллелью оси x, отстоящею отъ начала на  $0I = \frac{1}{3}$ .

676. Задача. — На продолжении стороны АВ даннаго прямоугольника ABCD взять такую точку М, чтобы сумма площадей треугольниковъ АМN и DCN была minima.



Черт. 94.

Черт. 95.

Когда точка М движется отъ А къ Х, сумма илощадей, вначаль равная  $\frac{1}{2}$  прямоугольника, начинаетъ уменьшаться: такъ для точки М' треуг. CAS замъняется меньшимъ M'AS; но когда точка М займеть положение F, при которомъ AF = AB, сумиа площадей снова становится равною 1 прямоугольника, сл. при перемъщении точки М отъ А къ F эта перемънная сумма прошла черезъ minimum.

Пусть AB = a, BC = b, AM = x; выраженіе суммы у будеть:

$$y = \frac{x \times AN}{2} + \frac{a \times DN}{2}$$
.

$$egin{aligned} ext{Ho} & rac{ ext{AN}}{x} = rac{ ext{DN}}{a} = rac{b}{a+x}, & ext{откуда:} & ext{AN} = rac{bx}{a+x}, & ext{DN} = rac{ab}{a+x}, & ext{ff} & ext{слъд.} \ y = rac{bx^2}{2(a+x)} + rac{ba^2}{2(a+x)}, & ext{finh} & rac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)}. \end{aligned}$$

Опредъляемъ x такъ чтобы сумма площадей имъла величину m. Для этого беремъ ур-ніе

$$\frac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)}=m$$
, или  $bx^2-2mx+a(ab-2m)=0$ ,  $x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-ab(ab-2m)}}{b}$ . . . . . . . . . (1).

Чтобы сумма площадей могла имъть величину m, необходимо и достаточно, чтобы этой величинъ m отвъчало дъйствительное и положительное значеніе x. Но x будеть дъйств., если  $m^2 - ab(ab - 2m) \geqslant 0$ ,

откуда

А ргіогі видно, что корни триномъ (2) дѣйствительные, неравные и противоположнаго знака; слѣд. неравенство (2) будеть удовлетворено такимъ положительнымъ m, которое не меньше положительнаго корня тринома; т. е. необходимо, чтобы  $m \ge ab(\sqrt{2}-1)$ . Итакъ, сумма площадей не можеть быть  $< ab(\sqrt{2}-1)$ ; смотримъ, можетъ-ли она равняться  $ab(\sqrt{2}-1)$ . Когда m достигнетъ этого предѣда, тогда будетъ

$$x = \frac{m}{b} = a(\sqrt{2} - 1);$$

это значеніе положительно и сл. можеть быть взято; потому minimum  $(y) = ab(\sqrt{2}-1)$ , а соотв'єтствующее значеніе  $x = a(\sqrt{2}-1)$ .

Повърка. — Полагаемъ  $x = a(\sqrt{2}-1) \pm h$ , гдё h произвольно мало, и подставляемъ это значеніе x въ выраженіе функціи. Найдемъ

$$y = \frac{(2 - \sqrt{2})a^{9}b \pm ab(\sqrt{2} - 1)h + \frac{bh^{2}}{2}}{a\sqrt{2} \pm h}.$$

Вопросъ приводится въ провёрке неравенства:

$$\frac{(2-\sqrt{2})a^2b \pm ab(\sqrt{2}-1)h + \frac{bh^2}{2}}{a\sqrt{2} \pm h} > ab(\sqrt{2}-1),$$

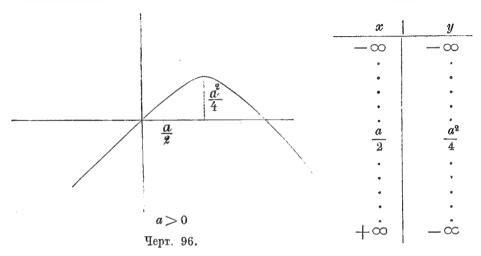
которое, по освобождении отъ знаменателя и по упрощении приводится къ  $\frac{bh^2}{2}>0$ , что върно.

### IV. Maxima и minima функцій итсколькихъ перемфиныхъ.

677. Теорема. — Произведение двухъ перемъннъхъ, которыхъ сумма постоянна и равна а, имъетъ наибольшую величину, когда оба множителя дълаются равными, если только они могутъ быть сдъланы равными.

Прямое доназательство. — Пусть одинъ множитель =x; другой будеть a-x; произведеніе ихъ выразится формулою y=x(a-x) или  $-x^2+ax$ . Это есть квадратный триномъ, свободиній членъ котораго =0. Придавая и вычитая  $\frac{a^2}{4}$ , даемъ функціи видъ:  $-\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)+\frac{a^2}{4}$ , или  $y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$ .

При  $x=-\infty$  и функція  $y=-\infty$  При увеличеній x отъ  $-\infty$  до  $\frac{a}{2}$ , y возрастаєть оть  $-\infty$  до  $\frac{a^2}{4}$ ; затёмъ при увеличеніе x отъ  $\frac{a}{2}$  до  $+\infty$ , y уменьшаєтся отъ  $\frac{a^2}{4}$  до  $-\infty$ . Получаємъ слёдующія — таблицу и кривую измёненій функцій:



Итакъ, произведеніе сперва возрастаєть отъ —  $\infty$  до  $\frac{a^2}{4}$ , а затёмъ уменьшаєтся отъ  $\frac{a^2}{4}$  до —  $\infty$ ; слёд, оно не имёсть minimum'a, но имёсть maximum  $= \frac{a^2}{4} \cdot \text{Соотвётствующее значеніе } x \text{ есть } \frac{a}{2}, \text{ а другаго множителя: } a = \frac{a}{2}$ или  $\frac{a}{2}$ , т. е. произведеніе получаєть наибольшую величину, когда оба множителя дёлаются равными.

Носвенное доназательство. — Вийсто того, чтобы изсийдовать изийненія произведенія x(a-x), соотвитствующія изийненію x оть —  $\infty$  до  $+\infty$ , можно предложить себй вопрось: при какомъ значеніи x это произведеніе получаеть данную ведичину m, изслидовать ришеніе, и такимъ образомъ найти, между какими предилами величина m произведенія можеть изийняться. Такимъ образомъ для опредиленія x имиемъ ур-ніе

$$x(a-x)=m$$
, вли  $x^2-ax+m=0$ , откуда  $x=rac{a}{2}\pm\sqrt{rac{a^2}{4}-m}.$ 

Чтобы x было дёйствительно, необходимо, чтобы подкоренное количество не было отрицательнымъ, т. е. необходимо, чтобы  $m \leqslant \frac{a^3}{4} \cdot 3$  заключаемъ, что произведеніе m можетъ имёть всё величины отъ —  $\infty$  до  $\frac{a^2}{4}$ ; слёдов. оно не вибетъ minimum'a, по иметъ maximum  $\frac{a^2}{4} \cdot$  Но когда  $m = \frac{a^2}{4} \cdot$  радикалъ об-

ращается въ 0, и  $x=\frac{a}{2}$ ; поэтому и другой множитель, какъ равный a-x, обращается въ  $\frac{a}{2}$ , сл. произведеніе имѣетъ maximum, когда множители равны.

Примъры. І. — Произведеніе двухъ множителей, которыхъ сумма =12, можетъ имъть всъ величины отъ  $-\infty$  до +36; махімим произведенія равенъ 36, а соотвътствующіе множители равны, каждый, 6.

II. Произведеніе двухъ множителей, которыхъ сумма =-12, можетъ имѣть всѣ величины отъ  $-\infty$  до +36; слѣд. тахітит произведенія равенъ -436, а каждый производитель =-6.

678. ЗАДАЧА I. — Изг всъхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ, какой имъетъ наибольшую площадь?

Если основаніе DE прямоугольника передвигать отъ вершины тр-ка до его основанія, то площадь прямоугольника будеть измѣняться отъ нуля до нуля, и слѣд. проходить чрезъ тахітит. Пусть b и h будуть — основаніе и высота даннаго треугольника (Часть I, черт. 25), x и y—основаніе и высота вписаннаго прямоугольника DEFG. Площадь прямоугольника = xy. Изъ подобія треугольниковъ ABC и DBE имѣемъ:  $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$ , откуда  $y = \frac{h}{b}(b-x)$ ; слѣдов. площадь xy выразится произведеніемъ:

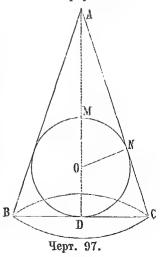
$$\frac{h}{b}x(b-x).$$

Такъ какъ постоянный множитель  $\frac{h}{b}$  не вліяеть на условія шахіт., то вопросъ приводится къ опредѣленію шах. произведенія x(b-x). Сумма множителей x п b-x равна постоянной величинѣ b, слѣд. произведеніе имѣеть шахішиш, когда множители равны, т. е. когда x=b-x, откуда  $x=\frac{b}{2}$ ; но въ такомъ случаѣ изъ ур-пія  $y=\frac{h}{b}(b-x)$  найдемъ  $x=\frac{h}{2}$ , самая же макмальная площадь xy равна  $\frac{bh}{4}$ , т. е. половинѣ площади треугольника. Итакъ: наибольшій изъ всѣхъ прямоугольниковъ, какой можно вписать въ треугольникь, имѣетъ основаніе и высоту вдвое меньшія основанія и высоты треугольника.

679. ЗАДАЧА II. — Изъ вспхъ конусовъ, описанных около даннаго шара, какой имъетъ наименьшій объемь?

Пусть будеть ABC конусь, описанный около шара ON. Если его вершина A будеть перемѣщаться по оси DA отъ M до безконечности, объемъ конуса будеть измѣняться оть  $\infty$  до  $\infty$ , и слѣд. пройдеть чрезъ minimum. Чтобы найти этоть шіпішим, обозначиль высоту DA буквою x; объемъ будеть:  $Y = \frac{1}{3} \pi.CD^2$ . x.

Подобные тр-ки ACD и AON дають:  $\frac{\text{DC}}{\text{R}} = \frac{x}{\text{AN}}$ ; но AN $^2 = x(x-2\text{R})$ ; слъд.



$$Y = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2x^2}{x - 2R}$$

Постоянный множитель  $\frac{1}{3}$   $\pi R^2$  не измѣняеть условій тіпітита функціи, а потому Y имѣеть наим. вел. при тѣхъ же обстоятельствахъ, какъ и  $\frac{x^2}{x-2R}$ . Но тіпітит этой функціи соотвѣтствуєть тахітиту обратной:  $\frac{x-2R}{x^2}$ , которую можно представить въ видѣ:  $\frac{1}{x}(1-\frac{2R}{x})$ ; наконецъ, мы не измѣнимъ условій тахітита, введя постоянный множитель 2R. Такимъ образомъ вопросъ приведенъ къ опредѣленію тах. функціи

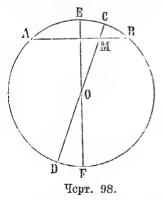
$$\frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$$

Замѣчая, что сумма перемѣнныхъ факторовъ  $\frac{2R}{x}$  и  $1-\frac{2R}{x}$  равна постоянной величинѣ 1, заключаемъ, что произведеніе достигнеть наибольшей величины, когда оба фактора сдѣлаются равными, т. е. когда  $\frac{2R}{x}=1-\frac{2R}{x}$ , откуда x=4R, что не несовмѣстно съ свойствомъ задачи. Итакъ, описанный конусъ имѣетъ наименьшій объемъ, когда высота конуса вдвое больше діаметра; самый же объемъ  $=\frac{8}{3}\,\pi R^3$ , т. е. вдвое больше шара.

680. Въ нѣкоторыхъ вопросахъ (напр. геометрін) перемѣнныя x и y, которыхъ сумма постоянна (a), по свойству самой задачи, не могутъ быть сдѣланы равными. Въ такомъ случаѣ maximum произведенія имѣетъ мѣсто тогда, когда разность между этими количествами достигаетъ наименьшей величины; въ самомъ дѣлѣ, если x и y суть два перемѣнныя, и x+y=a, то имѣемъ тождество

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$$
, откуда  $xy = \frac{a^3 - (x-y)^2}{4}$ ;

отсюда непосредственно заключаемъ, что xy достигнетъ maximum'a, когда абсолютная величина разности x-y достигнетъ minimum'a.



Примъръ. — Данъ кругъ и хорда АВ; провести діаметръ такъ, чтобы произведеніе отръзковъ СМ и МD, образуемыхъ на немъ хордою, имъло наибольшую величину.

Сумма отръзковъ СМ и МД, при всякомъ положеній діаметра, постоянна; но эти отръзки не могутъ быть сдъданы равными; слъд. ихъ произведеніе достигнетъ наибольшей величины, когда разность ихъ будетъ наименьшая, и это будетъ тогда, когда діаметръ стапетъ перпендикуляренъ въ хордъ. Требуемый діаметръ есть ЕF.

**681.** 3 A A A A III. — Haŭmu maximum npoussedenis  $(3-x^2)(7+x^2)$ ?

Сумма факторовъ постоянна и равна 10; приравнивая ихъ, получаемъ ур-ніе  $3-x^2=7+x^2$ , или  $x^2=-2$ : равенство невозможное ни при какомъ дъйствительномъ x. Итакъ, находимъ шіпішит абсолютной величины ихъ разности:  $2x^2+4$ . Міпішит этого бинома, очевидно, есть 4, достигаемый при x=0; слъд. тахішит произведенія равенъ 21, при x=0.

682. Теорема. — Произведеніе п положительных факторовт, сумма которых постоянна и равна а, достигает наибольшей величины, когда вст множители дплаются равными (полагая, что ихъ можно сдёлать равными).

Пусть будеть x.y.z.t....v разсматриваемое произведеніе n перемѣнныхъ множителей, связанныхъ условіемъ

$$x+y+z+t...+v=a$$
.

Это произведеніе имѣетъ тахітит; въ самомъ дѣлѣ, каждое слагаемое положительно, а сумма всѣхъ слагаемыхъ равна a, слѣд. каждый множитель, меньше a, и слѣд. ихъ произведеніе, необходимо, меньше  $a^n$ ; значитъ, оно не можетъ увеличиваться безпредѣльно, и потому имѣетъ тахітить.

Легко доказать, что оно тогда достигнеть наибольшей величины, когда всё слагаемыя сдёлаются равными, т. е. когда  $x=y=z=\cdot\cdot\cdot=v$ . Дёйствительно, пусть x не равно y; такъ какъ наши положительныя слагаемыя подчинены только одному условію, чтобы сумма ихъ всегда оставалась =a, то мы можемъ измёнять ихъ какъ угодно, не нарушая только этого условія; поэтому можемъ замёнить каждый изъ множителей x и y ихъ полусуммою  $\frac{x+y}{2}$ , ибо отъ этого сумма первыхъ двухъ слагаемыхъ, а слёд. и вся сумма не измёнится. Но въ такомъ случав, на основаніи, предыдущей теоремы, (когда сумма deyx» перемённыхъ остается постоянно, ихъ произведеніе получаемъ наиб. пеличину, когда они равны), будетъ имёть мёсто неравенство

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}>xy\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

помножая объ его части на положительное количество zt...v, мы не измънимъ смыслъ неравенства, слъд.

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot zt...v > xyzt...v \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Это значить, что пока въ происведени xyzt...v есть множители неравные, оно не есть наибольшее, ибо новое произведение больше его. Слъд. его можно будеть увеличавать до тъхъ поръ, пока вст множители не сдълаются равными между собою. Итакъ, произведение достигнеть своего тахітита, когда вст множители сдълаются равными (полагая, что они могуть сдълаться равными, что не всегда бываетъ).

При  $x=y=z=\cdot\cdot\cdot=v$ , каждый изъ равныхъ множителей будетъ  $-\frac{a}{n}$ , а слёд, максимальное произведение  $=\left(\frac{a}{n}\right)^n$ .

683. Задача I. — Какой изъ всъхъ треугольниковъ одинаковаго периметра импетъ наибольшую площадь?

Пусть перемънныя стороны будуть x,y,z; 2p — постоянный периметръ; по условію, x+y+z=2p.

Площадь S треугольна по тремъ сторонамъ выражается формулою

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Функція S имѣеть тахітит при тѣхъ же обстоятельствахъ какъ и ел квадратъ; приэтомъ, откинувъ постоянный множитель, мы опять не измѣнимъ условій тахітита; такимъ обр. приводимъ вопросъ къ опредѣленію тах. произведенія (p-x)(p-y)(p-z) каждый множитель этого произведенія положителень, сумма ихъ = (p-x)+(p-y)+(p-z)=3p-(x+y+z)=p- величинѣ постоянной; слѣд. произведеніе достигнетъ тахітита, когда всѣ множители сдѣлаются равными, т. е. когда p-x=p-y=p-z, или x=y=z. Слѣд. искомый треугольникъ—правильный. Каждая сторона его =  $\frac{2}{3}$  p, а площадь =  $\frac{p^2\sqrt{3}}{2}$ .

**684.** Задача II. — Какой из встах прямоугольных параллелопипедовъ, имъющих одинаковую полную поверхность, имъеть наибольшій объемь?

Пусть x,y и z будутъ перемънныя измъренія этихъ парадлелопипедовъ, S — данная полная поверхность; имъетъ:

$$S = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Перемённый объемъ U = xyz. Его maximum будетъ при тёхъ же условіяхъ, какъ maximum его квадрата:  $U^2 = (xy)(xz)(yz)$ . Но эти три положит. множителя имёютъ постоянную сумму  $\frac{S}{2}$ , слёд. maximum имёетъ мёсто при xy = xz = yz, откуда: x = y = z. Это значитъ, что наибольшій объемъ имёетъ кубъ; величина максимальнаго объема  $= x.x.x = x^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$ .

685.  $3 \text{ A A A A III.} - 3 \text{ mas, uno mx}^{\alpha} + \text{ny}^{\beta} + \text{pz}^{\gamma} = q$ , naŭmu maximum npoussedenis  $x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ .

Произведеніе  $x^{\alpha}$   $y^{\beta}$   $z^{\gamma}$  имѣеть maximum при тѣхъ же обстоятельствахъ какъ и  $mnp.x^{\alpha}$   $y^{\beta}$   $z^{\gamma}$ , т. е. какъ и  $(mx^{\alpha})(ny^{\beta})(pz^{\gamma})$ ; но сумма факторовъ этого послѣдняго произведенія постоянна (и равна q), слѣд. это произведеніе, а съ нимъ и предложенное, имѣеть maximum, когда множители равны, т. е. когда  $mx^{\alpha} = ny^{\beta} = pz^{\gamma} = \frac{q}{3}$ . Такимъ образомъ, максимальное значеніе предложеннаго произведенія  $= \frac{q^3}{27mnp}$ .

Напр., найдемъ, что произведеніе xy, при условіи 3x+4y=12, имѣетъ maximum = 3, при x=2 и  $y=\frac{3}{2}\cdot$  — Произведеніе  $x^2yz^8$ , при условіи  $3x^2+5y+7z^8=315$ , имѣетъ maximum = 35.21.15, при  $x=\sqrt{35}$ , y=21,  $z=\sqrt[8]{15}$ .

686. Примъчание I. — Въ теоремѣ (§ 682) было дано, что перемѣнныя x, y, z, . . . подчиняются только одному условію, чтобы сумма ихъ была постоянна; если же эти перемѣниыя будуть подчинены еще другимъ условіямъ (выражаемымъ равенствами или неравенствами), то мы уже не имѣемъ права утверждать, что если перемѣнныя x, y, z, . . . могутъ принимать значеніа x', y', z', . . . , то могутъ принимать и значенія  $\frac{x'+y'}{2}$ ,  $\frac{x'+y'}{2}$ , z', . . . Слѣд. доказательство наше было бы неприложимо. Вообще, множители не могутъ быть равными, имѣть постоянную сумму и удовлетворять еще другимъ условіямъ; такъ-что теорема § 682, вообще, не будетъ имѣть мѣста: тахітиш произведенія будетъ вообще меньше той величины произведенія, какую оно имѣетъ при равенствѣ множителей.

Разсмотримъ, напр., произведеніе трехъ положительныхъ чисель x, y, z, сумма которыхъ постоянна и = 12, сл. удовлетворяющихъ условію

Пусть, кромъ того, числа эти связаны еще условіемъ

$$x + 5y + 2z = a \dots \dots \dots (2)$$

гдё a—постоянная величина. Назовемъ перемённое произведеніе, удовлетворяющее этимъ двумъ условіямъ, черезъ P. Разсмотримъ также произведеніе Q трехъ положительныхъ чиселъ x, y, z, удовлетворяющихъ только условію (1). Махімим произведеніе Q будетъ имёть при x=y=z=4; самый же  $\max.=64$ . Что касается перемённаго произведенія P, область его значеній будетъ ограниченнёе области значеній Q: произведеніе P не можетъ принимать всёхъ значеній, которыя можетъ имёть Q; въ самомъ дёлё: для составленія Q, нужно отыскать всё системы положительныхъ рёшеній, удовлетворяющихъ неопред. ур-нію (1). Для составленія же значеній, которыя можетъ принимать произведеніе P, нужно изъ ксёхъ сказанныхъ системъ выбрать только тё, которыя удовлетворяютъ и ур-нію (2). Отсюда очевидно, что во-первыхъ, махімим (P) не м. б. больше тахімим (P) доставленія (P) область вахімим произведенія (P) область махімим произведенія (P) область меньше тахімим (P) область меньше тахімим (P)

Сказанный исключительный случай—тоть, когда ур. (2) удовлетворяется величинами x=y=s=4, что имжеть мёсто при  $a=4+5\times 4+2\times 4=32$ : въ этомъ случав 64 будетъ находиться въ числё значеній, которыя принимаетъ P, а такъ какъ мах. (P) не м. б. больше махім. (Q), и 64 есть мах. произведенія Q, то тёмъ болье 64 будетъ служить махімим'омъ и P.

Обобщая это разсужденіе, заключаемъ, что если факторы произведенія положительны, имѣютъ постоянную сумму и подчинены еще другимъ условіямъ, махімим произведемія вообще меньше той величины его, какую оно получаетъ, если всѣ множители сдѣлать равными; этой послѣдней величинѣ махімим произведенія равенъ только въ томъ исключительномъ случаѣ, когда всѣ условія, которымъ факторы подчинены, удовлетворяются, когда сдѣлать эти факторы равными.

Интересный примъръ на этотъ исключительный случай представляетъ произведеніе  $x^m y^n z^p$ , состоящее изъ m множителей равныхъ x, n—равныхъ y, и p множителей равныхъ z, съ условіемъ, что сумма mx + ny + pz всёхъ множителей равна постоянному a.

На основаніи сказаннаго выше, это произведеніе будеть имъть тах., когда всъ множители равны, если только равенство факторовь будеть совивстно съ остальными условіями, которымъ множители подчинены.

Равенство m множителей x-су дастъ m-1 соотношеніе; подобно этому имѣемъ еще n-1 и p-1 условій, что составляєть m+n+p-3 условія; присоединивъ еще равенство суммы всѣхъ множителей количеству a, получимъ m+n+p-2 соотношенія; присоединяя еще два ур нія x=y=z, всего будемъ имѣть m+n+p ур-ній для опредѣленія столькихъ же количествъ, а это вообще возможно. Слѣд. въ этомъ случаѣ, наибол. вел. произведеніемъ достигается при

$$x = y = z = \frac{a}{m + n + p}.$$

687. Примъчанте II. — При доказательствъ теоремы (682) мы предполагали, что всъ множители положительны; при этомъ условіи изъ неравенства (1) и было получено (2), доказывающее теорему. Но теорема, очевидно, имъетъ мъсто и въ томъ случав, когда всю множители отрицательны, если только число ихъ четное. Въ самомъ дълъ, отдълявъ два изъ нихъ (х и у), мы изъ неравенства (1), умноженіемъ объихъ частей на положител. количество г. . . иг, опять получимъ неравенство (2). Если же всъ множители отрицательны и число ихъ нечетное, то произведеніе будетъ minimum, когда всъ множители равны. Въ самомъ дълъ, если, взявъ произведеніе нечетнаго числа положит. множителей, перемънимъ у нихъ знаки, то и знакъ произведенія перемънится. Но если функція U имъетъ махімим М, то функція (— U) имъетъ міпімим (— М); потому-что, если М есть мах. (U), то U < М для всъхъ значеній этой функціи, близкихъ къ М; а изъ неравенства U < М имъемъ — U > — М, сл. — М есть міпімим функціи (— U).

Наконецъ, если не всё множители отрицательны, то произведение не имълобы maximum'a, ибо при постоянной суммъ множителей ихъ абсолютная величина могла бы увеличиваться неопредёленно; и если число отрицат. множителей четное, произведение было бы положительно и могло бы быть какъ угодно велико.

688. *Примъчание III.* — Для двухъ множителей теорема о тах. произведенія была доказана еще *Никомахом* 100 лътъ спустя послъ Р. Х.

**689.** Слѣдствіе теоремы § **682.** — Ариометическая средина п положительных количеств  $x_1, x_2, \dots x_n$ , изъ которых по крайней мърт два неравны, больше ихъ геометрической средины.

Взявъ  $\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$  и произведеніе  $x_1$   $x_2$  . . .  $x_n$ , замѣчаемъ, что то и другое произведенія состоять нзъ n множителей, сумма которыхъ одинакова  $(=x_1+x_2+\cdots+x_n)$ ; но въ первомъ произведеніи всѣ множители равны, во второмъ, по крайней мѣрѣ, два неравны, слѣд. первое произведеніе больше втораго:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n > x_1x_2\cdots x_n$$

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}>\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

690. Когда множители, имъя постоянную сумму, не могутъ быть сдъланы равными, прямое приложение теоремы (682) становится невозможно. Однакоже, методъ неопредбленныхъ коэффиціентовъ даеть возможность непрямаго примъненія теоремы. Приводимъ въ поясненій сказаннаго слёдующую задачу.

ЗАДАЧА. — Въ прямоуювьномъ картонномъ листь, стороны котораго равны а и b, требуется вынуть по угламь такіе равные квадраты АГКЦ..., чтобы загнувъ вст четыре прямоугольника FKMN,... перпендикулярно къ плоскости KMST, составить коробку наибольшей вмпстимости?

Пусть AF = x, AB = b, AD = a; стороны основанія коробки выразятся формулами a-2x п b=2x, высота =x. Объемъ V коробки (какъ прямоугольнаго паравледопипеда)



$$\mathbf{V} = (a - 2x)(b - 2x) \cdot x$$

Чтобы сдълать сумму множителей постоянною, введемъ множитель 4 (введеніе постояннаго множителя 4 не вліяеть на условія maximum'a); получимь:

$$4V = (a - 2x)(b - 2x)4x$$
,

т. е. произведеніе положительныхъ переивиныхъ иножителей, которыхъ сумма (a-2x)+(b-2x)+4x равна постоянной величинь a+b; но какь b>a, то ни при какомъ x нельзя сдъдать a-2x=b-2x, и теорему (682) въ данномъ случав нельзя примънить непосредственно. Чтобы найти maximum произведенія (a-2x)(b-2x)x, замётимъ, что не измёняя условій тах., мы можемъ умножить два изъ этихъ трехъ факторовъ на произеольных постоянныя количества, напр. первый на а, второй на в, и искать тахішит произведенія

$$V\alpha\beta = (a\alpha - 2\alpha x)(b\beta - 2\beta x)x.$$

Пользуясь неопредёленностью постоянныхъ а и В, можно выбрать ихъ такъ, чтобы сумма всё трехъ множителей была постоянна. Представивъ эту сумму въ видъ

$$a\alpha + b\beta - (2\alpha + 2\beta - 1)x$$

находимъ, что она будетъ независима отъ  $oldsymbol{x}$  и сиъд. постоянна,  $2\alpha + 2\beta - 1 = 0$ . Такимъ образомъ  $\alpha$  и  $\beta$  должны удовлетворять неопредъленному ур-нію, и слёд, существуєть безчисленное множество паръ значеній а п β, дълающихъ нашу сумму ностоянной. Но изъ этихъ паръ надо выбрать такую пару значеній а и в, при которой множители были бы равны. Итакъ, для опредвленія а, в и х имвемь 3 ур-нія:

$$2\alpha + 2\beta - 1 = 0$$
. (1)  $\alpha(a - 2x) = x$ . (2)  $\beta(b - 2x) = x$ . (3).

Имъя 3 ур-нія съ 3 неизвъстными, мы получимъ опредъленныя значенія дия  $\alpha$ ,  $\beta$  и x; но намъ нёть надобности опредёнять  $\alpha$  н  $\beta$ , а только x; съ этою цёлью исплючаемъ изъ ур-ній (1), (2) и (3) а и В, чтобы получить ур-ніе съ однимъ неизвістныхъ х. Изъ (2) и (3) имбемъ

$$\alpha = \frac{x}{a-2x}, \quad \beta = \frac{x}{b-2x};$$

подставивъ въ (1) эти значенія  $\alpha$  и  $\beta$ , имъемъ ур.

$$\frac{2x}{a-2x} + \frac{2x}{b-2x} - 1 = 0,$$

$$12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0..........(4).$$

или

Это ур-ніе и даеть такой x, при которомъ  $V\alpha\beta$ , а сл. и V имѣетъ maximum. Ръщая это ур., имѣемъ

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$
.

Оба корня дъйствительны, ибо  $a^2+b^2-ab=a^2+b^2-2ab+ab=(a-b)^2+ab$ — количеству положительному; они положительны, такъ какъ произведеніе и сумма корней положительны. Но чтобы корень ур-нія (4) даваль ръшеніе задачи, недостаточно, чтобы онъ былъ дъйств. и положит.; нужно еще, чтобы онъ былъ меньше половины меньшей стороны прямоугольника ABCD. Пусть a < b; тогда можно взять оба или одинъ корень, смотря потому, будутъли оба они, или только одинъ заключаться между 0 и  $\frac{a}{2}$ . Подстановка въ первую часть ур-нія (4) вмъсто x количествъ  $0, \frac{a}{2}$  и  $\frac{b}{2}$  даетъ.

$$+ab$$
,  $a(a-b)$ ,  $b(b-a)$ :

первый результать положителень, сл. 0 заключается внё корней; второй рез. отрицателень (ибо a < b), слёд.  $\frac{a}{2}$  лежить между корнями; третій результать положителень, сл.  $\frac{b}{2}$  — внё корней. Такимь образомь, называя x' меньшій корень, x'' большій, имёємь

$$0 < x' < \frac{a}{2} < x'' < \frac{b}{2}$$

откуда слёдуеть, что большій корень x'', какъ большій  $\frac{a}{2}$ , не можеть служить отвётомъ; меньшій же корень x', будучи меньше  $\frac{a}{2}$ , и служить отвётомъ на задачу. Итакъ высота коробки наибольшаго объема равна

$$x' = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$$
.

Когда a=b, т. е. картонъ имѣетъ форму квадрата, прямо изъ послѣдней формулы находимъ:  $x=\frac{a}{6}$ .

Примпчаніе. — Если произведеніе содержить п перемённых множителей, зависящихь оть x, то произвольныхь постоянныхь надо брать n — 1; вмёстё съ x они составять п неизвёстныхь. Требованіе, чтобы сумма факторовъ равнялась постоянной, даеть 1 ур., а сравненіе п множителей дасть n — 1 ур-ній, всего п ур-ній, т. е. сколько неизвёстныхь; поэтому, метода—общая.

Приложение способа неопредъленных в коэффиціентов в вопросам о max. и min. принадлежитъ Грилье.

691. Теорема. — Если сумма нъскольких положительных перемънных x, y, z, постоянна и равна a, то произведение  $x^p y^q z^r$ , idъ p, q, r данныя цълыя числа, имъет тахітит, коїда перемънныя пропорціональны своим показателям, т. е. коїда  $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$ , полагая, что x, y и z моїут удовлетворить этим условіям.

Замѣчая, что введеніе постоянныхъ множителей не измѣняеть условій maximum'a, завлючаемъ, что данное выраженіе будеть имѣть max. при такихъ же x, y, s, какъ и

$$\frac{x^p y^q z^r}{p^p q^q r^r}, \text{ RIH } \left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\frac{y}{q}\right)^q \left(\frac{z}{r}\right)^r, \text{ BIH }$$

$$\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{x}{p} \times \frac{y}{q} \cdot \frac{y}{q} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{y}{q} \times \frac{z}{r} \cdot \frac{z}{r} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{z}{r}$$

$$\xrightarrow{p \text{ MEORRY.}}$$

Произведеніе это состоить изь p+q+r множителей, которыхь сумма постоянна и равна a, такъ какъ  $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}+\cdot\cdot+\frac{x}{p}=\frac{x}{p}\cdot p=x$ ,  $\frac{y}{q}+\frac{y}{q}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{y}{q}=\frac{y}{q}\cdot q=y$  и  $\frac{z}{r}+\cdot\cdot\cdot+\frac{z}{r}=r\cdot\frac{z}{r}=z$ . Примъняя сюда теорему § 682, заключаемъ, что произведеніе достигнеть maximum'a, когда множители сдълаются равными, т. е. когда

$$\frac{x}{v} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

Пользуясь извъстнымъ свойствомъ равныхъ отношеній и помня, что x+y+z=a, имъемъ:

$$x = \frac{pa}{p+q+r}$$
,  $y = \frac{qa}{p+q+r}$ ,  $z = \frac{ra}{p+q+r}$ ;

самый же maximum =

$$p^p q^{q} r^r \left(\frac{a}{p+q+r}\right)^{p+q+r}$$
.

692. ЗАДАЧА І. — Какой изг вспхг конусовг, вписанных въ данный шарг, импетъ наибольшій объемъ?

Обозначивъ радіусъ основанія конуса буквою x, разстояніе центра шара отъ этого основанія буквою y, и буквою R радіусъ шара, имѣемъ

$$x^2 + y^2 = R^2$$
,  $V = \frac{1}{3}\pi x^2(R + y)$ ;

или, замънивъ  $x^2$  его величиною  ${
m R}^2 - y^2$ , найдемъ

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - y^2)(R + y) = \frac{1}{3}\pi(R + y)^2(R - y).$$

Отбросивъ постоянный множитель  $\frac{1}{3}\pi$ , и разсматривая произведеніе  $(R+y)^2$ 

(R-y), замѣчаемъ, что сумма первыхъ степеней множителей, т. е. (R+y)+(R-y) равна постоянной 2R, слѣд. произведеніе имѣетъ шахішиш, когда перемѣнных R+y и R-y пропорціональны своимъ показателямъ, т. е.  $\frac{R+y}{2}=\frac{R-y}{1}$ , откуда  $y=\frac{R}{3}$ .

693. ЗАДАЧА II. — Описать около даннаго цилиндра конуст наименьшаго объема.

Если вообразимъ (черт. 77), что вершина А перемъщается по оси АІ, отъ точки Н, то объемъ копуса вначалъ безконечно-великъ, ибо основание его какъ угодно велико, а высота близка къ НІ; по мъръ удаления точки А въ безконечность, объемъ снова приближается къ безконечности, ибо высота стремится къ безконечности, а основание—къ конечной ведичинъ основания цилиндра. Измъняясь отъ ∞ до ∞, объемъ конуса преходитъ чрезъ minimum.

Пусть Н и R — высота и радіусь основанія цилиндра, x и y — высота и радіусь основанія конуса. Объемъ конуса будеть  $V = \frac{1}{3}\pi xy^3$ ; но y: R = x: (x-H), что слёдуєть изъ подобія тр-ковъ ABI и AEH; слёд.

Отбрасывая постоянный множитель  $\frac{1}{3} \pi R^2$ , ищемъ minimum выраженія  $\frac{x^3}{(x-H)^2}$ , соотвётствующій maximum'y выраженія  $\frac{(x-H)^2}{x^3}$ , которое межно представить въ виде  $\frac{1}{x} \left(1 - \frac{H}{x}\right)^2$ . Условія maximum'a этого выраженія не изм'єнятся, если помножимъ его на постоянное количество H, что даетъ

$$\frac{\mathrm{H}}{x} \left(1 - \frac{\mathrm{H}}{x}\right)^2$$

Сумма первыхъ степеней производителей  $\frac{H}{x}$  и  $1-\frac{H}{x}$  есть величина постоянная 1, слёд, по теоремё § 691 maximum имъетъ мъсто, когда

$$\frac{\frac{\mathbf{H}}{x}}{\frac{1}{1}} = \frac{1 - \frac{\mathbf{H}}{x}}{x},$$

откуда x = 3 H.

Итакъ объемъ конуса достигаетъ minimum'a, когда высота конуса дълается втрое больше высоты цилиндра. Подставляя 3H вмѣсто x въ (1), находимъ, что минимальный объемъ  $=\frac{9}{4}\pi R^2H$ , т. е. составляетъ  $\frac{9}{4}$  объема цилиндра.

**694.** Задача III. — Какой изъ всъхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго полушара, имъетъ наименьшую боковую поверхность?

Какъ и въ предыдущей задачъ, сначала à priori убъждаемся, что разсматриваемая поверхность имъетъ minimum.

Пусть радіусъ шара будеть R; x, y и S — высота, радіусъ основанія и боковая поверхность конуса; имъемъ:

$$S = \pi y \times AC$$
.

Подобные тр-ки АОС и АОК дають:

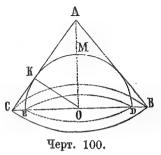
$$\frac{\text{AC}}{x} = \frac{y}{\text{R}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - \text{R}^2}},$$

откуда

$$\frac{\text{AC} \times y}{x\text{R}} = \frac{x^2}{x^2 - \text{R}^2};$$

слъд.

$$S = \pi R \cdot \frac{x^3}{x^2 - R^2}$$



Вопросъ приводится къ отысканію minimum'a  $\frac{x^3}{x^3-R^2}$ , и слёд. maximum'a обратной функціи  $\frac{x^2-R^2}{x^3}$ , которой можно дать видъ  $\frac{1}{x}(1-\frac{R^2}{x^2})$ . Возвысивъ въ квадратъ и умноживъ на  $R^2$ , что не измёнитъ условій maximum'a, приводимъ вопросъ къ нахожденію maximum'a выраженія

$$\frac{\mathrm{R}^2}{x^2}\Big(1-\frac{\mathrm{R}^2}{x^2}\Big)^2,$$

въ которомъ множители  $\frac{R^2}{x^2}$  и  $1-\frac{R^3}{x^2}$  имѣютъ постоянную сумму, равную 1; и слѣд. произведеніе это будетъ имѣть тахітит тогда, когда

$$\frac{\frac{\mathbf{R}^2}{x^2}}{\frac{1}{1}} = \frac{1 - \frac{\mathbf{R}^2}{x^2}}{\frac{2}{x^2}},$$

откуда  $x^2=3{\rm R}^2$ , и сдъд.  $x={\rm R}\sqrt{3}$ . Заключаемъ, что конусъ минимальной боковой поверхности имъетъ высоту, равную сторонъ правильнаго треуг-ка, вписаннаго въ большомъ кругъ шара; самая же минимальная поверхность  $=\frac{3}{2}\pi{\rm R}^2\sqrt{3}$ .

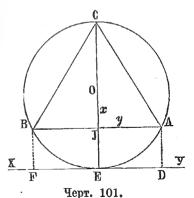
695. ЗАДАЧА IV. — Равнобедренный треугольникъ ABC, вписанный въ данный кругъ, вращается около касательной ху, параллельной его основанию; каковы должны быть размиры треугольника, чтобы объемъ, имъ описанный, имълъ наибольшую величину?

Пусть OI = x, IA = y. Объемъ выразится разностью между двойнымъ объемомъ усъченнаго конуса, описаннаго транеціей ADEC, и цилиндромъ, описаннымъ прямоугольникомъ ABFD, т. е.

$${\bf V} := \frac{2\pi y}{3} [4{\bf R}^2 + ({\bf R} - x)^3 + 2{\bf R}({\bf R} - x)] - \pi ({\bf R} - x)^2 \cdot 2y;$$

замѣнивъ y его величиною  $\sqrt{{
m R}^2-x^2}$  и упростивъ, приведемъ выраженіе къ виду

$$V = \frac{4}{3}\pi(2R - x)(R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$$
.



Можемъ искать maximum квадрата этого выраженія, или, отбрасывая постоянный множитель, — выраженія

$$(R + x)^3 \cdot (R - x) \cdot (2R - x)^2$$

Помноживъ R+x на 2, мы сделаемъ сумму первыхъ степеней этихъ множителей постоянною; но примъненіе теоремы  $\S$  692 поведетъ въ равенствамъ  $\frac{2(R+x)}{3}=\frac{R-x}{1}=\frac{2R-x}{2}$ , которымъ нельзя удовлетворить никакимъ значеніемъ x. Поэтому, обращаемся въ способу неопредёленныхъ воэффиціентовъ; помноживъ R+x и R-x на произвольныя постоянныя  $\alpha$  и  $\beta$ , замёчаемъ, что сумма  $\alpha(R+x)+\beta(R-x)+(2R-x)$  будетъ постоянна при  $\alpha-\beta-1=0$ ; и тогда тахітим будетъ имёть мёсто при условіи

$$\frac{\alpha(R+x)}{3} = \frac{\beta(R-x)}{1} = \frac{2R-x}{2}.$$

Выражая отсюда  $\alpha$  и  $\beta$  черезъ x, находинъ

$$\alpha = \frac{3(2R-x)}{2(R+x)}, \quad \beta = \frac{2R-x}{2(R-x)}.$$

Подстановка этихъ величина  $\alpha$  и  $\beta$  въ ур-ніе  $\alpha-\beta-1=0$  даетъ:

$$\frac{3(2R-x)}{2(R+x)} - \frac{2R-x}{2(R-x)} - 1 = 0$$
, where  $3x^2 - 5Rx + R^2 = 0$ .

Легко видёть, что корни действительны и оба положительны; но задачё можеть отвечать только тоть изънихъ, который < R. Подстановка R въ первую часть ур-нія даеть результать (—  $R^2$ ): заключаемъ, что R находится между корнями, т. е. большій корень больше, а меньшій—меньше R. Откидывая большій корень, соответствующій знаку + передъ радикаломъ, находимъ:

$$x = \frac{5R - \sqrt{25R^2 - 12R^2}}{6} = \frac{R(5 - \sqrt{13})}{6}$$

696. Теорема. — Сумма двухъ перемънныхъ, которыхъ произведеніе равно положительному постоянному, имъетъ тахітит, когда
оба слагаемыя отрицательны, и тіпітит, когда они положительны;
причемъ тахітит и тіпіттт имъютъ мъсто, когда оба количества
равны между собою, если только они могутъ быть едіъланы равными.
Сумма же двухъ перемънныхъ, которыхъ произведеніе равно постоянной отрицательной величинь, не имъетъ ни тахітит'а, ни тіпітит'а.

Прямое доназательство.—Пусть произведеніе = p, а одинъ изъ множителей его = x; другой множитель будеть  $\frac{p}{x}$ , а сумма ихъ

$$y=x+\frac{p}{x}$$

1-й случай: p < 0.—Назвавъ абсолютную величину произведенія p черезъ p', имѣемъ

$$y = x - \frac{p'}{x}$$
.

Будемъ измѣнять x отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . При  $x=-\infty$ ,  $y=-\infty+\frac{p'}{\infty}=-\infty$ ; по мѣрѣ приближенія x къ 0, первый членъ, оставаясь отрицательнымъ, увеличивается до 0, второй членъ  $\left(-\frac{p'}{x}\right)$ , оставаясь положительнымъ, увеличивается до  $+\infty$ ; слѣд, и сумма y увеличивается отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . При x немного большемъ нуля, первый членъ суммы весьма малъ; второй членъ, будучи равенъ -p', дѣленному на весьма малую положительную величину, будетъ равенъ отрицительну съ весьма большою абсолютною величиною; слѣд. при переходѣ x чрезъ 0, функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, дѣлая скачевъ изъ  $+\infty$  въ  $-\infty$ . При дальнѣйшемъ увеличеніи x до  $+\infty$ , первый членъ возрастаетъ до  $+\infty$ , второй, оставаясь отрицательнымъ, приближается къ 0: оба члена опять увеличиваются, потому и сумма ихъ воврастаетъ отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Такимъ образомъ при увеличеніи x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$ , y претерпѣваетъ два ряда измѣненій: въ томъ и другомъ y ндетъ непрерывно увеличиваясь отъ —  $\infty$  до  $\infty$ ; оба ряда раздѣлены разрывомъ непрерывности, имѣющимъ мѣсто при x=0. Функція не имѣетъ, слѣд., ни mах., ни minimum'a.

Таблица измъненій у.

Кривая измъненій.

	*	
$\underline{\hspace{1cm}}$ $x$	<u> </u>	
$-\infty$	$-\infty$	_
	ᅜ	NA
•	180	
•	возрастаетъ	
•	rae	/ \ /
•	13	F / /F,
0 7		/ 0 /
0 - h 0 + h	+∞ -∞	/ / /
0+n		/ //
•	возрастаетъ	/ //
	3pg	M P
•	CT	•
•	a e3	Черт. 102.
•	F	
+∞	+∞	
1		

Оба ряда изображаются ординатами кривыхъ МN и PQ, имъющихъ ассимитоту y; ось x они пересъкаютъ въ разстояніяхъ отъ начала, равныхъ  $+\sqrt{p'}$  и  $-\sqrt{p'}$ : ибо ивъ y=0 слъдуетъ  $x-\frac{p'}{x}=0$ , откуда  $x^2=p'$  и  $x=\pm\sqrt{p'}$ .

**2**-й случай; p>0.—Въ этомъ случав

$$y=x+\frac{p}{x}$$
....(1)

Этому равенству последовательно даемъ видъ:

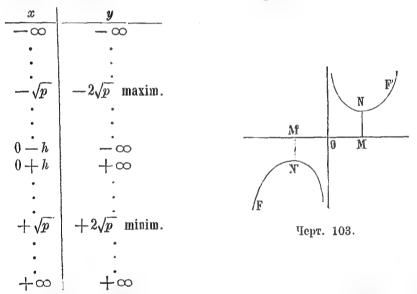
$$y = \sqrt{(x + \frac{p}{x})^2} = \sqrt{x^2 + (\frac{p}{x})^2 - 2p + 4p} = \sqrt{4p + (x - \frac{p}{x})^2}$$

Будемъ увеличивать x отъ 0 до  $+\infty$ . При увеличеніи x отъ 0 до  $+\sqrt{p}$ , функція  $x-\frac{p}{x}$ , по предыдущему, увеличивается отъ  $-\infty$  до 0, а слѣд.  $\left(x-\frac{p}{x}\right)^2$  уменьшается отъ  $+\infty$  до 0. При возрастаніи x отъ  $+\sqrt{p}$  до  $+\infty$ ,  $x-\frac{p}{x}$  возрастаетъ, а виѣстѣ съ тѣмъ и квадратъ этой функція, отъ 0 до  $+\infty$ . Функція y, оставаясь положительною, уменьшается сначала отъ  $+\infty$  до  $+2\sqrt{p}$ , а затѣмъ увеличивается отъ  $+2\sqrt{p}$  до  $+\infty$ . Слѣд. y проходитъ чрезъ minimum  $+2\sqrt{p}$ , при  $x=+\sqrt{p}$ .

Изъ (1) непоередственно ясно, что при двухъ значеніяхъ x, равныхъ по величинъ, но противоположныхъ по знаку, y имъемъ величины равныя, отличающіяся только знаками. Слъд. въ интервалдъ измъненій x отъ —  $\infty$  до 0, оункція возрастаєть до maximum'a —  $2\sqrt{p}$ , при  $x = -\sqrt{p}$ , а затъмъ при увеличеніи x отъ —  $\sqrt{p}$  до 0, y уменьшаєтся отъ —  $2\sqrt{p}$  до — $\infty$ . При переходъ x чрезъ 0, имъетъ мъсто разрывъ непрерывности изъ —  $\infty$  въ  $+\infty$ .

Таблица измъненій у.

Кривая измпненій.



Непрямое доназательство. — Обозначивъ данное произведение перемънныхъ x и  $\frac{p}{x}$  буквою p, а сумму ихъ S, имъемъ ур-ніе

$$x+\frac{p}{x}=S$$
....(1).

Ръшая ур-ніе (1) относительно x, имъемъ:

$$x = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - p}$$
.

Чтобы перемѣнное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы было  $\frac{S^2}{4} > p$ , или  $S^2 > 4p$ . Различаемъ два случая.

I. p < 0.—Условіє  $S^2 > 4p$  всегда будеть удовлетворено, каково бы ни было S; сябд. сумма двухъ факторовъ, произведеніе которыхъ равно постоянной отрицат. величинѣ, можетъ имѣть всѣ величины отъ —  $\infty$  до  $+\infty$ : сумма S не имѣетъ ни  $\max$ , ни  $\min$ .

II. p > 0. Неравенству  $S^2 > 4p$  можно дать видъ

$$(S + 2\sqrt{p})(S - 2\sqrt{p}) \ge 0;$$

оно будеть удовлетворено, если оба множителя будуть имѣть одинаковые знаки; слъд. должно быть:

- 1) Или:  $S > 2\sqrt{p}$ , откуда: min. (S)  $= 2\sqrt{p}$ ; причемъ  $x = \frac{S}{2} = \sqrt{p}$ ; другой множитель также  $= \frac{p}{x} = \sqrt{p}$ .
- 2) Или: S  $< -2\sqrt{p}$ , откуда: max. (S)  $= -2\sqrt{p}$ ; причемъ  $x = \frac{S}{2} = -\sqrt{p}$ ; другой множитель  $= \frac{p}{x} = -\sqrt{p}$ .

Итакъ: minimum и maximum суммы имъютъ мъсто при равенствъ слага-емыхъ.

697. ЗАДАЧА І. Изъ вспхъ прямоугольниковъ одинаковой площади какой импьеть наименьшій периметрь?

Обозначая перемѣнныя измѣренія прамоугольника черезь x и y, имѣемъ, по условію:  $xy = a^2$ , гдѣ  $a^2$  постоянно; найти тіпітит периметра 2x + 2y, или тіп. (x + y). Такъ какъ x м. б. сдѣлано равнымъ y, то площадь тогда получимъ наименьтій периметръ, когда будетъ x = y = a, т. е. когда прямоугольникъ обратится въ квадратъ: Самый тіпітит периметра равенъ 4a.

698. ЗАДАЧА II. — Даны двъ параллели и точка А межиу ними, служащая вершиною прямаго угла прямоугольнаго треугольника, котораго другія двъ вершины лежать на каждой изъ параллелей. Какое положеніе нужно дать треугольнику, чтобы площадь была тіпіта?

Проведемъ общій перпендикуляръ DE къ параллелямъ, и пусть: AD = a, AE = b, EC = x. Углы EAC и ABD равпы по перпедикулярности сторонъ, слъд. треугольники EAC, DAB подобны, и потому

$$AC:EC = AB:AD$$
, man  $AC:x = AB:a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$ 

Умножая оба предыдущіе члена на AC, вибеть:  $\overline{{
m AC}}^2$ : x = AB.AC:a; сабд. удвоенная площадь треугольника ABC, или

AB.AC 
$$=$$
  $\frac{\overline{AC^2.a}}{x}$ ; но  $\overline{AC^2}$   $=$   $b^2 + x^2$ , откуда:

2 пл. ABC = 
$$\frac{a}{x}(b^2 + x^2) = a(\frac{b^2}{x} + x)$$
.

Произведеніе положительных чисновь  $\frac{b^2}{x}$  и x равно постоянному  $b^2$ , слѣд. сумма  $\frac{b^2}{x} + x$  имѣетъ тіпітит, когда  $\frac{b^2}{x} = x$ , или  $x^2 = b^2$ , откуда x = b. Но изъ рав. (1) видно, что при x = b имѣемъ: AB = AC. Заключаемъ, что требуемый треугольникъ есть равнобедренный.

699. ЗАДАЧА III. — Опредълить наивыгоднъйшее соединение элементовъ гальванической баттареи при данномъ внъшнемъ сопротивлении.

Пусть всёхъ элементовъ М; электровозбудительная сила каждаго Е, внутреннее сопротивленіе каждаго элемента  $\rho$ , данное внёшнее сопротивленіе r. Раздёлимъ элементы на m группъ по n элементовъ въ каждой: M = m.n; въ каждой группъ соединимъ полюсы параллельно (цинкъ съ цинкомъ, уголь съ углемъ), и полученныя группы соединимъ последовательно; составится баттарея какъ бы изъ m большихъ элементовъ. Электровозбудительная сила каждая изъ нихъ m всей баттареи m m; сопротивленіе каждаго изъ такихъ элементовъ m;

внутр. сопр. всей баттарен  $=m.\frac{\rho}{m}$ . Сила тока

$$I = \frac{mE}{m \cdot \frac{\rho}{n} + r} = \frac{ME}{\frac{M\rho}{n} + rn}.$$

Числитель МЕ этой дроби есть величина постоянная, знаменатель — содержить перемънное n; дробь будеть имъть maximum, когда знаменатель достигнеть miuimum'a. Но произведение положительных в перемънных  $\frac{M\rho}{n}$  и rn есть величина постоянная  $(M\rho r)$ , слъд. сумма будеть имъть minimum, когда

$$\frac{M\rho}{n} = rn$$
, where  $\frac{m}{n}\rho = r$ ,

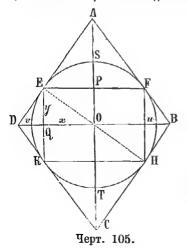
т. в. сила тока достигаеть тахітит'я, когда внутреннее сопротивление баттареи равно внъшнему.

700. Когда положительныя слагаемыя, коихъ произведение постоянно, не могутъ быть сдёланы равными, minimum ихъ суммы будетъ имъть мъсто тогда, когда абсолютная величина ихъ разности достигнетъ минимума.

Въ самомъ дълъ, называя перемънныя буквами x и y, имъемъ тожество

$$(x+y)^2 = 4xy + (x-y)^2$$

гдъ 4xy — постоянно, слъд. вторая часть достигнетъ minimum'a, когда  $(x-y)^2$  будетъ minim , т. е. когда абсолютная величина разности x-y будетъ minima.



701. ЗАДАЧА IV. — Импемъ перемънный ромбь, оппсанный около даннаго круга, и вписанный прямоугольникъ, вершины котораго находятся въ точкахъ касанія сторонъ ромба. При какомъ положеніи прямоугольника сумма площадей обоихъ четыреугольниковъ будетъ тіпіта.

Когда точка А будеть удаляться по линіи SA отъ точки S въ безконечность, площадь ромба будеть измёняться отъ безконечности до безконечности; слёд. сумма обёихъ площадей сначала уменьшается, затёмъ начинаетъ увеличиваться, слёд. проходитъ чрезъ minimum. Затёмъ, легко доказать, что произведение площадей остается по-

стояннымь; въ самомъ деле, обозначая площадь ромба буквою Z, площадь прямоугольника Z', и замъчая, что  $Z = 4\Delta AOD$ ,  $Z' = 8\Delta OPE$ , имъемъ: Z':2Z = $OPE:AOD=R^2:\overline{AD}^2$ ; но Z=AD.2R, след.  $Z':2Z=4R^4:Z^2$ , откуда  $Z.Z'=8R^4$ величинъ постоянной. Хотя произведение разсматриваемыхъ перемънныхъ и постоянно, но какъ мы не можемъ площади сдълать равными (ибо они всегда раздълены площадью круга), то для опредъленія тіпітита Z + Z' должны искать minimum разности Z - Z' = 4 (DEQ + AEP). Но DEQ =  $\frac{1}{2}y \times DQ =$ 

$$\frac{1}{2}y \times \frac{y^2}{x} = \frac{y^3}{2x}; \quad \text{а AEP} = \frac{x^3}{2y}; \quad \text{савд}.$$

$$Z - Z' = 2\left(\frac{y^3}{x} + \frac{x^3}{y}\right) = 2\left(\frac{x^4 + y^4}{xy}\right)$$

Замъчая, что  $x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2$ , имъемъ отсюда:  $x^4 + y^4 = \mathbb{R}^4 - 2x^2y^2$ , слъд.  $Z - Z' = 2 \cdot \frac{R^4 - 2x^2y^2}{xy}$ 

Очевидно, это выраженіе ливеть minimum, когда  $x^2y^2$  ливеть maximum; но сумма  $x^2+y^2$  равна постоянной  $\mathbb{R}^2$ , слъд.  $x^2y^2$  имъетъ maximum при x=y. Итакъ искомый минимумъ суми Z+Z' имъетъ мъсто тогда, когда прямоугольникъ обращается въ квадратъ: тогда и ромбъ обращается въ квадратъ, и величина min.  $(Z + Z') = 6R^{3}$ .

702. ТЕОРЕМА. — Сумма п положительных перемънных, которыхъ произведение постоянно, импетъ тіпітит, когда эти п количество равны между собою (полагая, что они могуть быть субланы равными).

Нужно доказать, что если xyz...t=a, гдѣ a постоянно, то сумма x+y+ $z+\cdots+t$  unbeth minimum, roqua  $x=y=z=\cdots=t=\sqrt[n]{a}$ , a cambin minimum  $= n \sqrt[n]{a}$ .

Во первыхъ, сумма имъетъ minimum, ибо она всегда >0. Докажемъ, что пока слагаемыя неравны, сумма можетъ быть уменьшена. Пусть, напр., x не равно y; мы можемъ замѣнить наждое изъ этихъ перемѣнныхъ квадратнымъ корнемъ изъ ихъ произведенія, не нарушая условія  $xyz \cdot \cdot \cdot t = a$ , пбо  $\sqrt{xy}$ .  $\sqrt{xy} = xy$ ; но тогда, въ силу теоремы 696, будемъ имѣть

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xy} < x + y;$$

а придавъ въ объимъ частямъ этого перавенства по  $z+\cdots+t$ , найдемъ

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xy} + z + \cdots + l < x + y + z + \cdots + t.$$

Значить, пока въ сумив есть неравныя слагаемыя, сумма эта можеть быть уменьшена; стало быть им можемъ ее уменьшать, т. е. она не достигнетъ наименьшей величины, не будеть minima, до тъхъ поръ, пока всъ ся части не сдълаются равными. Итакъ, minimum суммы имъсть мъсто при равенствъ слагаемыхъ; тогда условіе  $xys \cdot \cdot \cdot t = a$  обратится въ  $x^n = a$ , откуда  $x = \sqrt[n]{a}$ , и minimum суммы  $= n \sqrt[n]{a}$ .

Примъчание I. — Эта теорема, вообще, перестаетъ быть върною, если перемънныя подчинены инымъ условіямъ, кромѣ неизмѣнности ихъ произведенія. Но если новыя условія дозволяютъ перемѣннымъ  $x,y,\cdot$  - · сдѣдаться равными, теорема имѣетъ мѣсто.

Примъчаніе II. — Если всъ слагамыя отрицательны, то при постоянствъ ихъ пронзведенія, сумма ихъ имъетъ тахітит, когда всъ они равны.

Пусть какія нибудь два слагаемыя x и y неравны; не измѣняя условія  $xyz \cdot \cdot \cdot t = a$ , можно каждое изъ нихъ замѣнить отрецательнымъ  $\sqrt{xy}$ ; но изъвѣстно, что если произведеніе двухъ отрицательныхъ постоянно, то сумма ихъ имѣетъ тахітит, когда они равны; слѣд  $\sqrt{xy} + \sqrt{xy} > x + y$ , откуда, придавая къ обѣимъ частямъ по  $z + \cdot \cdot \cdot t$ , найдемъ

$$\sqrt{xy} + \sqrt{xy} + z + \cdots + t > x + y + z + \cdots t$$

откуда видно, что если два какія нибудь слагаемыя неравны, то сумма можеть быть увеличена; заключаемь, что сумма достлинеть maximum'a, когда всё ея слагаемыя будуть равны.

703. ЗАДАЧА І. — Изг вспхъ треугольниковъ, импющихъ одинаковую площадъ, какой импетъ наименьшій периметръ?

Обозначивъ стороны черезъ x,y,z, а постоянную площадь буквою Q, имъемъ

$$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)=16Q^2$$
.

Сумму x + y + z можно представить въ видъ:

$$\frac{3}{4} \left\{ \frac{x+y+z}{3} + \frac{x+y-z}{1} + \frac{x-y+z}{1} + \frac{-x+y+z}{1} \right\}.$$

Произведеніе четырехъ членовъ, заключенныхъ въ скобки, равно постоянной  $\frac{16}{3}$   $Q^2$ , сл. сумма имѣетъ minimum, когда ея члены равны. Найдемъ, что они равны при x=y=s. Слъд. минимальный периметръ принадлежитъ правильному треугольнику, а самый min.  $=2\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt{Q}$ .

704. ЗАДАЧА II. — Изг вспхг прямоугольных параллелопипедовъ одинаковаго обгема какой имъетъ наименъшую полную поверхность.

Пусть перемънныя измъренія парадледопипедовъ, сохраняющихъ одинаковый объемь  $a^3$ , будуть x, y, z; имъемъ:

$$xyz = a^3$$
.

Ищемъ тіпіт. полной поверхности S=2(xy+xz+yz); замъчая, что  $xy.xz.yz=x^2.y^2.z^2=a^6$ , находимъ, что сумма достигнетъ тіпітит а при xy=xz=yz, пли при x=y=z=a, т. е. когда нараллелопипедъ будетъ  $xy\delta z$ ; самая минимальная поверхность равна  $6a^2$ .

 $\Pi$  овърка. Взявъ x = a + h, y = a - h, и слъд.  $z = \frac{a^3}{a^2 - h^2}$ , найдемъ:

$$S' = 6a^2 + 2h^2 + \frac{4h^4}{a^2 - h^2}$$
, что больше  $6a^2$ .

705. 3 A A A A III. — 3 Has, umo  $x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} = \text{nocm}$ . q, naŭmu minimum суммы  $mx^{\alpha} + ny^{\beta} + pz^{\gamma}$ .

Изъ условія  $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} = q$  имѣемъ  $(mx^{\alpha})(ny\beta)(pz^{\gamma}) = mnpq$ ; слъд. мы должны найти шіпішит суммы, зная, что произведеніе ся членовъ постоянно. Искомый шіпішит имѣетъ мѣсто при  $mx^{\alpha} = ny^{\beta} = pz^{\gamma} = \sqrt[3]{mnpq}$ , а самый шіпішит  $= 3\sqrt[3]{mnpq}$ .

Напр., зная, что xy=16, найдемь minimum 3x+12y, разсуждая такъ: изъ условія xy=16 имѣемъ: (3x)(12y)=16.  $3\cdot 12=(24)^2$ ; слъд. данная сумма имѣетъ minimum при 3x=12y=24, т. е. при x=8 и y=2; самый minimum =2.24 т. е. 48.

Еще примъръ. Зная, что  $xy=a^2$ , найти min.  $x^2+xy+y^2$ ? Изъ  $xy=a^2$  заключаемъ  $x^3y^3=a^6$ , или  $x^2.xy.y^2=a^6$ ; произведение слагаемыхъ постоянно, слъд. minimum суммы имъетъ мъсто при  $x^2=xy=y^2$ , т. е. ври x=y=a, пбо  $xy=a^2$ ; самый minimum  $=3a^2$ .

706. Теорема.—Если произведение данных степеней нъскольких перемънных х,у, z имъет постоянную величину:  $x^p y^q z^r = P$ , то сумма первых степеней этих перемънных, x + y + z, имъет тіпітит, когда числа x,y,z пропорціональны своим показателям, т. е. когда  $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$ , если только числа эти могут имът такія значенія.

Раздъливъ объ части равенства  $x^py^qz^r$  — P на постоянное количество  $p^p.q^q.r^r$ , найдемъ

$$\left(\frac{x}{p}\right)^p \cdot \left(\frac{y}{q}\right)^q \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^r = \frac{P}{p^p, q^q, r^r} \cdot \cdot \cdot (1)$$

что можно представить въ видъ

$$\underbrace{\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \cdot \cdot \cdot \frac{x}{p}}_{\text{pabb}} \cdot \underbrace{\frac{y}{q} \cdot \frac{y}{q} \cdot \cdot \cdot \frac{y}{q}}_{\text{q pabb}} \cdot \underbrace{\frac{z}{r} \cdot \frac{z}{r} \cdot \cdot \frac{z}{r}}_{\text{pabb}} = \underbrace{\frac{P}{p^p, q^q, r^r}}_{\text{pabb}}.$$

Сумма производителей первой части равна  $\frac{x}{p} \cdot p + \frac{y}{q} \cdot q + \frac{z}{r} \cdot r$  или x + y + z, т. е искомая, произведение же ихъ-постоянно,  $(\frac{P}{p^p,q^q,r^r})$ , слёд., по теоремъ § 702, эта сумма будеть minima при равенствъ ея частей, т. е. при

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \cdot \cdot \cdot (2)$$

$$x = p \cdot \sqrt{\frac{P}{p^p \cdot q^q \cdot r^r}}, \qquad y = q \cdot \sqrt{\frac{P}{p^p \cdot q^q \cdot r^r}}, \qquad z = r \cdot \sqrt{\frac{P}{p^p \cdot q^q \cdot r^r}}.$$

Самый minimum суммы = (p+q+r).  $\sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p,q^q,r^r}}$ .

707.  $3_A \pi_A \pi_A I$ .—  $3_{HA}\pi_A I$ .—  $3_{HA$ 

Изъ  $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} = q$  имѣемъ:

$$(x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma})^{abc} = q^{abc}$$
, т. е.  $(x^{a})^{bc\alpha}(y^{b})^{ac\beta}(z^{c})^{ab\gamma} = q^{abc}$ , слъд.  $(mx^{a})^{bc\alpha}(ny^{b})^{ac\beta}(pz^{c})^{ab\gamma} = m^{bc\alpha}n^{ac\beta}p^{ab\gamma}q^{abc}$ ... (1)

Такимъ образомъ воцросъ приведенъ къ нахожденію minimum'a суммы  $mx^a + ny^b + pz^c$ , зная, что произведеніе различныхъ степеней ея членовъ постоянно; по теоремъ § 706 искомый minimum имъетъ мъсто при

$$\frac{mx^a}{bc\alpha} = \frac{ny^b}{ac\beta} = \frac{pz^c}{ab\gamma};$$

соединяя эти два ур-нія съ (1), найдемъ, при какихъ x,y,z имъетъ мъсто minimum данной суммы, и самый minimum.

 $\Pi$ Римъръ. — Зная, что  $x^2y^3=a^5$ , найти тіпітит 3x+2y.

Изъ  $x^2y^3=a^5$  имѣемъ:  $(3x)^3(2y)^3=9\times 8\times a^5$ ; слъд. по теоремѣ § 706 заключаемъ, что искомый minimum имѣетъ мѣсто при  $\frac{3x}{2}=\frac{2y}{3}$ ; выражая отсюда x и вставляя въ условіе, имѣемъ:  $\left(\frac{4y}{9}\right)^2\cdot y^3=a^5$ , откуда  $y=a\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}$ ; самый minimum есть  $\frac{4y}{3}+2y$ , т. е.  $\frac{19a}{3}\cdot \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}\cdot$ —

708. 3 A  $\pi$  A  $\pi$  A II.—Найти тіпітит полной поверхности ниши даннаго объема  $\pi$   $\frac{a^3}{6}$ .

Ниша есть тъло, образуемое вращеніемъ на 180° около оси АС ойгуры, состоящей изъ прямоугольника ВDCO, завершающагося квадрантомъ АВО. Пусть радіусъ ОА = x, высота ОС прямоугольника равна y; поверхность ниши =  $\pi \cdot \frac{x^2}{2} + \pi xy + \pi x^2$  или  $\frac{\pi}{2}(3x^2 + 2xy)$ . Но  $\frac{\pi a^3}{6} = \frac{\pi}{2} x^2 y + \frac{\pi x^3}{3}$ , откуда  $y = \frac{a^3 - 2x^3}{3x^2}$ ; слъд. пов. =  $\frac{\pi}{2}(3x^2 + \frac{2a^3 - 4x^3}{3x}) = \frac{\pi}{2}(\frac{5}{3}x^2 + \frac{2a^3}{3x}) = \frac{\pi}{6}(5x^2 + \frac{2a^3}{x})$ . Произвереніе ( $5x^2$ ). ( $\frac{2a^3}{x}$ ) = пост.  $20a^6$ , слъдоват. сумма  $5x^2 + \frac{2a^3}{x}$ , черт. 106. То теор. § 706, будеть міпіма, когда  $\frac{5x^2}{1} = \frac{2a^3}{x}$ , откуда  $x = \frac{a}{\sqrt[3]{5}}$ . Отсюда слъду- етъ:  $y = \frac{a}{\sqrt[3]{5}} = x$ .

709. ЗАДАЧА III.—Найти тіпітит суммы т $x^a + \frac{n}{x^b}$ .

Всегда можно найти такія два числа  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы  $a\alpha = b\beta$ ; найдя ихъ, имѣемъ тождеєтво  $(x^a)^\alpha = (x^b)^\beta$ , откудя  $(mx^a)^\alpha \cdot \left(\frac{n}{x^b}\right)^\beta = m^\alpha \cdot n^\beta$ . Та-

кимъ образомъ вопросъ приведенъ къ нахожденію minimum'а суммы, зная, что произведеніе двухъ степеней ся членовъ — постоянно; по теор. § 706 minimum

имъетъ мъсто при 
$$\frac{mx^a}{\alpha} = \frac{\frac{n}{x^b}}{\beta}$$
, т. е. при  $x^{a+b} = \frac{\alpha n}{\beta m} = \frac{bn}{am}$ , откуда  $x = \sqrt[a+b]{\frac{bn}{am}}$ ; самый minimum  $= (a+b) \cdot \sqrt[a+b]{\left(\frac{n}{a}\right)^a \left(\frac{m}{b}\right)^b}$ .

710. Теоремы 702 и 706 обратны теоремамъ 682 и 691. Этотъ результатъ встръчается часто и его можно формулировать такъ:

ТЕОРЕМА.—Если U и V суть функціи ньскольких перемьнных х, у, z,...; если, затьмь, при постоянномь значеніи A функціи U другая функція V имьеть тахітит В; если, сверхь того, В измыняется въ томъ же смысль какъ и A, то обратно: U будеть имьть тіпітит равный A, когда V будеть сохранять постоянное значеніе В.

Въ самомъ дѣдѣ, когда U получаетъ значеніе A, то этимъ перемѣнныя  $x, y, s, \ldots$  не опредѣляются, такъ какъ они должны удовлетворять только одному ур-нію

$$U = A;$$

слъд. Функція V можеть принимать безчисленное множество различных значеній, въ числъ которыхъ наибольшее, по условію, есть В; отсюда ясно, что если, на обороть, мы дадимъ функцін V постоянное значеніе В, то въ числъ безчисленнаго множества значеній, которыя можеть принимать U, будеть находиться и А. И легко показать, что U не можеть получить никакого значенія меньшаго A; въ самомъ дълъ, допустивъ, что U можеть принять значеніе A' < A, мы найдемъ, что наибольшее изъ значеній V, совмъстное съ U = A', будеть меньше B, въ силу того условія, что B и A измъняются въ одномъ смыслъ. Слъд. A есть дъйствительно minimum функціи U, когда V сохраняеть постоянное значеніе B.

Примъръ. — Пусть

$$U = x + y + z + t, \quad V = xyzt$$

по теоремѣ (682), если U сохраняетъ постоянную величину A, то V получаетъ наибольшее вначение при

$$x = y = z = t$$
,

а самый этоть maximum  $B = \left(\frac{A}{4}\right)^4$ . Но A и B измѣняются въ одномъ смыслѣ (ибо x, y, z, t—положительны), слѣд. когда V сохраняеть значеніе  $\left(\frac{A}{4}\right)^4$ , то наим. изъ значеній, принимаємыхъ U, будеть A; этого значенія U достигаеть, слѣд., при

$$x=y=z=t$$
.

711. Въ заключение приведемъ еще нъсколько примъровъ тъхъ зналитическихъ уловокъ, при помощи которыхъ можно элементарно находить max. и min. функцій высшихъ степеней отъ нъсколькихъ перемънныхъ. I. Haŭmu minimum  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , shan, umo x + y = 2a.

Имъемъ:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{2a}{xy}$ . Очевидно, эта дробь будетъ имъть minimum тогда, когда знаменатель ея достигаетъ maximum'a; но x+y=2a, сл. xy имъетъ max. при x=y=a: при этихъ значеніяхъ x и y данное выраженіе и имъетъ minimum  $=\frac{2}{a}$ .

II. Найти тіпітит x+y, зная, что  $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$ . x+y будеть ем'єть тіп., когда  $(x+y)^2$  пм'єть тіпітит. Но, по условію,  $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{1}{a^2}$ , откуда

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = \frac{x^2y^2}{a^2} + 2xy = xy(\frac{xy}{a^2} + 2)$$
.

Очевидно, это выраженіе имѣетъ тіпіюют, когда xy имѣетъ тіпіюют, т. е. когда  $\frac{1}{xy}$ , а потому и  $\frac{1}{x^2y^2}$ , имѣетъ тах. Но  $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2}$  (въ виду того, что сумма этыхъ производителей постоянна) имѣетъ тах. при  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2a^2}$ , т. е. при  $x = y = a\sqrt{2}$ . При этихъ значеніяхъ x + y и имѣетъ тіпітит, равный  $2a\sqrt{2}$ . ПП. Найти тіпітит  $x^2 + y^2 + z^2$ , зная, что x + y + z = 3a.

Тождественно имъемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2}{3} = \frac{9a^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2}{3}.$$

Отсюда видно, что данное выраженіе имѣеть minimum тогда, когда имѣетъ minimum  $(x-y)^2 + (x-z)^3 + (y-z)^2$ ; но эта сумма существенно положительна, слѣд. ея minimum есть ноль, и имѣетъ мѣсто при x=y=z. Потому и данное выраженіе имѣетъ min. при x=y=z=a; самый minimum  $=3a^2$ .

IV. Доказать, что если x+y=2a, сумма  $x^m+y^m$  импеть тіпітит при x=y=a.

Во-первыхъ замъчаемъ, что теорема справедлива для m=2, ибо

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4a^2 - 2xy$$

откуда ясно, что какъ уменьшаемое постоянное, то разность имбетъ min., когда вычитаемое имбетъ maximum, т. е. при x=y.

Затъмъ, допустивъ, что теорема справедлива для показателя m-1 и для всъхъ предыдущихъ, докажемъ, что она справедлива и для показателя m.

Различаемъ два случая: m = 2m' и m = 2m'' + 1.

Положивъ m=2m', имфемъ:

$$x^{2m} + y^{2m} = (x^{m} + y^{m})^2 - 2x^{m}y^{m};$$

по положеню,  $x^{m'}+y^{m'}$  имѣемъ minimum при x=y; съ другой стороны  $x^{m'}y^{m'}$  или  $(xy)^{m'}$  имѣемъ maximum при x=y. Слѣд.  $x^{2m'}+y^{2m'}$  имѣемъ minimum при x=y.

Положивъ m=2m''+1, имъемъ:

$$x^{2m''+1} + y^{2m''+1} = (x^{m''+1} + y^{m''+1})(x^{m''} + y^{m''}) - x^{m''}y^{m''}(x + y) = (x^{m''+1} + y^{m''+1})(x^{m''} + y^{m''}) - 2a(xy)^{m''}.$$

Первая часть этой разности имѣемъ minimum при x=y, ибо, по положенію, оба ея множителя—minima при x=y; вторая часть имѣетъ при x=y maximum. Слъд.  $x^{2m''+1}+y^{2m''+1}$  имѣетъ minimum при x=y.

На этомъ основанія заключаемъ такъ: теорема върна для m=2, слъд., по доказанному, върна и для m=3; будучи върна для m=2 и m=3, върна и для m=4 и т. д. Слъд. она върна для всякага m.

- 711. Задачи. Упражненіями на maxima и minima могуть служить задачи предыдущей главы. Въ дополненіе къ нимъ предлагаемъ еще слъдующія.
  - 1. Найти тахіта и тіпіта триномовь:

$$x^{2}-6x+13; \quad -x^{2}+6x+7; \quad 3x^{2}-8x+4; \quad x^{2}-3x+2; \quad -x^{2}+3x-2;$$

$$x^{3}-4x-140; \quad x^{2}+x+1; \quad -4x^{3}+7x+492; \quad 2x^{2}-24x+1; \quad (2x-3)^{2}-8x;$$

$$x^{2}-3-\frac{x-3}{6}; \quad x^{3}+(19-x)^{3}-1843; \quad (x-3)^{2}+6; \quad -acx^{2}+(ad-bc)x+bd;$$

$$(a-x)(c-x)-b^{2}; \quad -x^{2}+6ax-a^{2}; \quad ab-x^{2}-(a-b)x; \quad (ax+b)^{2}+(a'x+b')^{2};$$

$$x^{2}(n-3)(n-4)-8ax(n-3)-12a^{2}; \quad (a^{2}+3a+3)(x^{2}+x)+a^{2}; \quad 3ax^{2}-3b^{2}x+b^{3}-a^{3};$$

$$(2a-b)x^{2}+bx(2b^{2}-5a)+2ab^{2}; \quad 3x+4(a-x)^{2}; \quad (2-3ab)x^{2}+3b(1-ab)x-3b-2b^{3};$$

$$a(a-1)(x-b)^{2}+a'(a'+1)x^{2}-2aa'x(x-b); \quad (a-b)(a-10b)x^{2}-2(a^{2}-b^{2})x+a^{2}+11ab-2b^{2};$$

$$x^{4}-2x^{2}+8; \quad (x^{2}-1)^{2}+7; \quad x^{4}-3x^{2}+7; \quad (x^{2}-a^{2})(x^{2}-b^{2}).$$

2. Найти тахіта и тіпіта функцій:

$$\sqrt{5-3x}+\sqrt{7x-8}$$
;  $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ ;  $x-1+\sqrt{x+1}$ :  $\sqrt{5+3x}-\sqrt{7x-8}$ ;  $5x-3+\sqrt{2-3x}$ ;  $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}$ .

- 3. Разложить 27 на двё части такъ, чтобы сумма изъ учетвереннаго квадрата первой и упятереннаго квадрата второй была такъ. или тіп.
- 4. Раздёлить 1225 на двё части такъ, чтобы утроенный квадр. корень изъ одной части учетверенный корень изъ другой составляли бы maximum.
  - 5. Махітит периметра прямоугольника, вписаннаго въ данный кругъ.
- 6. Чрезъ точку M, данную внутри или внѣ круга, провести сѣкущую AMB или MAB такъ, чтобы: 1)  $AM^2 + MB^2$  (M—внутри), или  $MA^2 + AB^2$  (М—внѣ) была так или min.
- 7. Чрезъ точку, данную внутри угла, провести прямую такъ, чтобы сумма отръзковъ ен между данною точкою и сторонами угла была minima.
- 8. Въ данный кругъ вписать равнобедренный  $\triangle$ , сумма основанія и высоты котораго была бы maxima.
  - 9. Около даннаго прямоугольника описать прямоугольникъ наибольшей площади.
  - 10. Въ данный квадратъ вписать квадратъ наим. площади.
- 11. Называя гипотенузу буквою a, катеты буквами b и c, и полагая, что периметръ треугольника сохраняетъ постоянную величину, найти: 1) min. и max. гяпотенузы или b+c; 2) max. илощади; 3) max. b-c; 4) max. или min. b:c; 5) max. или min. a:(b+c), a:(b-c),  $a^2+b^2+c^2$ ; 6) min. и max. высоты.

- 12. Міп. периметра прямоуг. Д., им'єющаго данную площадь.
- 13. Гипотенуза сохраняетъ постоянную величину; найти: 1) тах. площади; 2) тах. периметра; 3) тах. b-c; 4) тал. нан тах. b+c+h.
- 14. Найти min. площади, или периметра, или гипотенузы, а также min. нля max.  $a^2 + b^2 + c^2$  прямоуг.  $\triangle$ -ка, описаннаго около даннаго круга.
  - 15. По двумъ даннымъ сторонамъ построить 🛆 наиб. плещади.
- 16. Въ данный полукругъ винсать транецію наибольшаго периметра; описать около него транецію наим. площади.
- 17. На данной прямой AB = a найти такую точку C, что если на отрѣзкѣ AC постронть правильны  $\triangle$  ADC, а на отрѣзкѣ BC квадратъ CEFB и соединить D съ E, то чтобы илощадь изтіугольника ADEFB была max. или min. (Черт. 75).
- 18. Даны высоты h и h' двухъ цилиндровъ. Опредълить радіусы ихъ основаній такъ, чтобы сумма боковыхъ поверхностей равнялась поверхности даннаго шара, a сумма объемовъ была бы minima.
- 19. Найти тах. или тіп. полной поверхности прямоугольнаго параллелопипеда, вписаннаго въ данную правильную пирамиду съ квадратнымъ основаніемъ.
- 20. Даны три точки A, B, C не на одной прямой; на неограниченной прямой, проходящей чрезъ B и C, найти такую точку M, сумма квадратовъ разстояній которой отъ A, B и C была бы minima.
- 21. Два тъла двигаются по сторонамъ прямаго угла съ постоянными скоростями v и v', по направлению въ вершпиъ, отъ которой въ началъ движения находятся первое въ разстоянии a, второе b. Въ какой моментъ разстояние между ними будетъ minimum.
- 22. Внутри вруга даны 2 точки P и P' на одномъ и томъ же діаметрѣ и въ равномъ разстояніи отъ центра. Провести черезъ эти точки двѣ парадлели PQ и P'Q' до окружности, такъ чтобы транеція PQP'Q' была тахіта.
  - 23. Найти min. объема усъченнаго конуса, описаннаго около даннаго полушара.
- 24. Въ данный секторъ вписать прямоугольникъ, такъ чтобы одна его вершина лежала на дугѣ, двѣ на одномъ радіусѣ и одна на другомъ, и чтобы: 1) перпметръ, 2) плошадь его была бы тах.
- 25. Съ какой высоты нужно пустить совершенно упругій шаръ, чтобы, отекочивъ отъ горизонтальной плоскости, онъ поднялся до данной точки первоначальнаго пути въ кратчайшее время?
- 26. Жехѣзная дорога, АС, выходящая изъ города А, проходить въ разстояніи d отъ другаго города В. Въ какомъ пунктѣ линіи АС должна быть построена станція, чтобы соединивъ ее съ В посредствомъ шоссе, пришлось употреблять на путешествіе изъ А въ В кратчайшее время? Скорость поѣзда  $\equiv V$ , скорость дилижанса  $\equiv v$ .
- 27. На каждой сторонѣ прямоугольника, какъ на гипотенузѣ, построены внѣ прямоугольника равнобедренные прямоуг. △-ки. Найти тах. и тіп. площади всей фигуры, полагая, что стороны прямоугольника измѣняются, діагональ же его сехраняеть постоянную величину.
- 28. Тотя же вопросъ, но прямоугольникъ замѣнить квадратомъ, прямоугольные тр ки—равнобедренными равными, а діагональ—периметромъ 8р всей фигуры.
- 29. Найти тах. и тіп. объема тіла, образуемаго сферическимъ сегментомъ и вписаннымъ цилиндромъ, имъющимъ общее основаніе съ сегментомъ, зная радіусъ шара.

30. Найти тахіта и тіпіта функцій:

$$x^3 - 12x + 16$$
;  $x^3 + 3x^2 - 4$ ;  $8x^3 - 11x^2 - 4x + 1$ ;  $-4x^3 - x^2 + 5x - 8$ .

31. Найти тахіта и тіпіта и изследовать измененія функцій:

$$\begin{array}{c} \frac{x^2+1}{x}; \ \frac{2x-3}{x^2+4}; \ \frac{5x^2+8x-1}{x^2+1}; \ \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}; \ \frac{12x^2-66x+57}{8x^2-14x+23}; \ \frac{8x^2-6x+1}{12x^2-4x}; \\ \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x+3}; \ \frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}; \ \frac{4x^2+4x+3}{x^2-3x+2}; \ \frac{x^2-x+1}{x^2+x+2}; \ \frac{3-2x}{x^2-2x+7}; \ \frac{x^2+1}{3-4x}; \\ \frac{x^2-1}{2x+1}; \ \frac{2x^2-8x+8}{x^2-5x+4}; \ \frac{3x^2-5x+1}{6x^2-10x+3}; \ \frac{x^2-2x+10}{4x^2-8x+21}. \end{array}$$

- 32. Найти max. и min. дроби  $\frac{2ax+b}{x^2+1}$ . Опредълить a и b подъ условіемъ, чтобы maximum дроби равнялся +4, a minimum =-1.
- 33. Опредълить предъды, между которыми измъняется  $\frac{x^3+2ax+1}{x^2-2ax+1}$  при измънения x отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . При накомъ a max. и min. дълаются равными?
- 34. Опредълить алгебранческую дробь вида  $\frac{ax^3+bx+c}{x^4+px+q}$ , въ которой a—данное положительное число, зная, что эта дробь имъетъ max. 4a при x=3, и minimum 5a при x=1.
  - 35. Изследовать измененія дроби  $\frac{max}{a^2-(1+m)x^2}$ , где a и m положительны.
- 36.  $\alpha$  и  $\beta$  суть два данныя числа, положительныя или отрицательныя; опредълить a и b такъ, чтобы  $\alpha$  и  $\beta$  представляли соотвётственно maximum и min. дроби  $ax^2+2x+b$ , когда x измёнять отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . Всегда-ли задача возможна?
  - 37. Дано равенство

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2};$$

изслѣдовать измѣненія у при измѣненіи х оть —  $\infty$  до  $+\infty$ . Полагая a>b, до-казать: 1) что a есть тах. y; 2) что b есть тах. y; 3) что если дадимь y значеніе, заключающееся между a и b, то биквадратное ур., изъ котораго опредѣляется x, имѣеть всѣ 4 корня дѣйствительные, и что если чрезъ x' назовемъ одинъ изъ этихъ корней, то три остальные опредѣляются равеиствами:

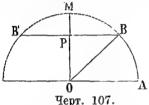
$$x^{I} + x^{II} = 0; \quad x^{I} x^{III} + 1 = 0; \quad x^{I} x^{IV} - 1 = 0.$$

- 38. Дана дробь  $\frac{x^2+px+a}{x^2+p'x+b}$ , въ которой a и b предполагаются извъстными; опредълить p и p' такъ, чтобы эта дробь была тахіта при  $x=\alpha$ , и тіпіта при  $x=\beta$ . Приложеніе:  $\frac{x^2+px+5}{x^2+p'x+3}$ .
- 39. Дана дробь  $\frac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'}$ ; опредёлить p,q,p' и q' такъ, чтобы при  $x=\alpha$  махішим дроби быль A, и чтобы при  $x=\beta$  міпімим дроби быль B. Приложеніє: опредёлить коэффиціенты дроби  $\frac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'}$  такъ, чтобы при x=3 она досгигала мах. 4, и чтобы при x=1 достигала міпімим'а 5.

40. Доказать, что дроби  $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ , п  $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha'x^2+\beta'x+\gamma'}$  имбють maxima и minima при однихь и тъхъ же значеніяхь x, если

$$\frac{ab'-ba'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'} + \frac{ac'-ca'}{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'} = \frac{bc'-cb'}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}$$

- 41. Найти maximum и minimum выраженія  $\frac{b}{x} + \frac{c}{a-x}$ .
- 42. Найти max. и min. отношенія сумны объемовъ двухъ конусовъ, имѣющихъ общую вершину въ центрѣ даннаго шара, а основаніями— парадлельные малые круги этого шара, къ объему сферическаго слоя, содержащагося между этими основаніями;



приэтомъ, дано, что разстояніе между основаніями постоянно п равно h.

- 43. Найти maximum и minimum отношенія объемовъ, образуемыхъ криволинейной трапедіей ОАВР и треугольникомъ ОВР при обращеніи около ОР; данъ радіусъ ОА В вруга.
- черт. 107. 44. Найти minimum отношенія суммы объемовъ, образуемыхъ прямоугольнымъ треуг-мъ, вращающимся поочередно около каждаго изъ катетовъ, къ объему, образуемому тѣмъ же △-мъ при обращеніи около гипотенувы, полагая, что периметръ треуг-ка постояненъ, а стороны перемѣнны.
- 45. Прямоугольный  $\triangle$  ABC (А прямой уг.) вращается около оси, промодящей чрезъ точку В параллельно катету АС. Найти maximum полученнаго объема, зная, что периметръ постояненъ и =2p.
- 46. На линіи центровь двухъ шаровь, лежащихъ одинъ вий другаго, найти точку, изъ которой видна наибольшая сумма поверхностей сегментовъ.
- 47. Центры двухъ шаровъ находятся въ вонцахъ прямой CC' = 2d. На CC' какъ на діаметрѣ описываютъ окружность; опредѣлить на этой окружности такую точку, изъ которой видна наибольшая часть суммы поверхностей обоихъ шаровъ.
  - 48. Hahth minimum  $\frac{(a-x)(b+x)}{x}$ .
  - 49. Наёти тах, и тіп. дроби  $\frac{x^2-2x+a^2}{x^2+2x+a^2}$ , въ которой a>1.
- 50. Даны двё параллели AB и CD, разстояніе между которыми равно b; и двё точки: М на AB и N на CD. На AB наносять оть точки M отрёзовъ ME = a. Какую точку I прямой MN нужно соединить съ точкой E, чтобы, полагая, что EI пересё каеть CD въ F, сумма площадей треуг-въ MEI и MFI была minima.
- 51. Данъ прямоугольный  $\triangle$  ABC, котораго катеты суть b п c. Отрёзать оть него другой прямоуг.  $\triangle$  ADE, который составляль бы m-ую часть перваго. Какъ провести линію DE, чтобы ея длина была minima? Построить, полагая m=2.
- 52. Даны: толщина e сферической оболочки и ел объемъ; вычислить внутренній радіусъ x. Полагая, что толщина постоянна, найти minimum объема.
- 53. Данъ правильный  $\triangle$  ABC стороны 2a и точка D въ срединѣ основанія BC. Въ накомъ разстояніи x отъ этого основанія провести ему параллельную линію EF, чтобы периметръ тр-ка DEF быль нанменьшій.
- 54. Дана точка A въ разстояніи AB  $\equiv d$  отъ прямой XV и на этой прямой отрізовъ CD  $\equiv 2a$ . Гдів на прямой долженъ быть взять этоть отрізовъ, чтобы периметръ  $\Delta$ -ка ACD быль найменьшій.

- 55. Дана прямая XV и вит ен двт точки A и В; разстоянія AA' и ВВ' этихъ точекъ отъ XV равны соотвътственно 2a и 2b; разстояніе A'В' между основаніями этихъ перпендикуляровъ равно 2d. Найти на XV такую точку M, чтобы: 1) сумма AM MB была minima; 2) отношеніе AM:ВМ было тах. или тіп.
- 56. Даны два концентрическіе круга радіусовъ R п r, вписать между ними прямоугольникъ наиб. площади. Одно изм'вреніе прямоугольника должно быть параллельно діаметру, а стороны перпендикулярныя къ нему—хордами большаго и малаго круговъ.

57. 38a
$$\pi$$
, 9TO  $3x^2 + 5y + 7z^8 = 315$ , Hañth max.  $x^2yz^8$ .

10.  $ax + by^2 + cz^3 = 3a^6b^3c^4$ ,  $ax + 3y^2z^3$ .

11.  $\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y} = a$ 

12.  $ax + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z} = a$ 

13.  $ax + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z} = a$ 

14.  $ax + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z} = a$ 

15.  $ax + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z} = a$ 

16.  $ax + \sqrt{y} + \sqrt{y} = a^3$ 

17.  $ax + \sqrt{y} + \sqrt{y} = a^3$ 

18.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

19.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

19.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

10.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

10.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

11.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

12.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

13.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

14.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

15.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

16.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

17.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

18.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

19.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

19.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

20.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

21.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

22.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

23.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

24.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

25.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

26.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

27.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

28.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

29.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

20.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

20.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

21.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

22.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

23.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

24.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

25.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

26.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

27.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

28.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

29.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

20.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

20.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

20.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

21.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

22.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

23.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

24.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

25.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

26.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

27.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

28.  $ax + \sqrt{y} + xy^8 = a^3$ 

58. Найти тахітит выраженій:

$$(ax+b)^{q}(c-dx); (ax+by)(cx+dy),$$
 зная, что  $mx+ny=p;$   $(x+a)(x+b)(c-x); mx^{p}-nx^{q}$  полагая  $p< q;$ 

 $(mx+n)^a$ .  $(p-qx)^b$ ; (a+mx)(b+nx)(c+px), полагая, что воэффиціенты m, n, p не всb одного знака.

59. Найти minimum выраженій:

$$\frac{a^4+x^4}{x^2}; \frac{a^8+b^2x^6}{x^2}; \frac{x^8+a^8}{3x^2}; \frac{2x^3+5a^3}{\sqrt{x}}; \frac{x^m}{(x-a)^n}; \frac{a^2+x^3}{a^2-x^2}.$$

60. Зная, что xyz = abc, найтн minimum abx + bcy + caz.

- 61. Опредълнть a такъ, чтобы сумма квадратовъ корней урнія  $x^2 + (2-a)x a 3 = 0$  была minima.
- 62. Показать, что 1) дробь  $\frac{x^m}{(x+d)^{m+p}}$  имѣеть max. при x=d.  $\frac{m}{p}$ ; 2) дробь  $\frac{x^{m+p}}{(x-d)^m}$  имѣеть minimum при x=d.  $\frac{m+p}{p}$ .
  - 63. Основываясь на второй задачx n 62, найти minimum  $x^p + \frac{1}{x^q}$  •
- 64. Опредълить радіусь такого шара, котораго сегменть, при постоянной поверхности, имъль бы наибольшій объемъ.
- 65. На продолженіи основанія ВС треугольника АВС взята точка Р. Провести изъ нея сѣкущую, встрѣчающую АВ въ R и АС въ Q, такъ, чтобы произведеніе АВ. СQ было minimum.

- 66. Даны двё окружности, касательныя къ прямой АВ; третья окружность, того же радіуса какъ и двё первыя, къ нимъ касательна. При какомъ положеніи этихъ окружностей илощадь пятнугольника, имёющаго вершины въ центрахъ и въ точкахъ касанія съ прямой, будеть maxima?
- 67. Дана точка М на основаніи AB треуг. ABC; въ какомъ разстояніи отъ этого основанія провести ему параллельную DE, чтобы  $\Delta$  MDE пифлъ напбольшую площадь.
- 68. Изъ всёхъ шаровъ, имъющихъ центръ на поверхности даннаго шара радіуса R, найти такой, на которомъ отсёкаемая поверхность сегмента была бы maxima.
- 69. Изъ всёхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго шара, какой имеетъ напменьшую: а) боковую; b) нолную поверхность; c) объемъ.
- 70. Изъ всёхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ данный кругъ, какой имфетъ наибольшую площадь.
- 71. Изъ всёхъ цилиндровъ одинаковой полной поверхности какой имъетъ напъбольшій объемъ, а изъ всёхъ цилиндровъ одинаковаго объема какой имъетъ напъвольший пол. поверхность?
- 72. Данъ прямоугольникъ ABCD, въ которомъ AB=a, AD=b; изъ вершины A провести съкущую AEF (E-встръча съ BC,F-съ продолженіемъ DC) такъ, чтобы суммая BE+DF была minima.
- 73. Изъ всёхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго полушара, какой имфетъ наименьшій объемъ.
- 74. Изъ всёхъ правильныхъ пирамидъ съ квадратнымъ основаніемъ, им'яющихъ данное боковое ребро 7, какая им'ясть наиб. объемъ?
- 75. Данъ 🛆 ABC; провести параллель MN сторонѣ BC такъ, чтобы сумма площадей: прямоугольника BMNC и треуг-ка DPQ (D — основаніе высоты на сторону BC, P и Q — точки пересѣчевія линіи MN съ AB и AC) была тахіта.
- 76. Дана окружность и въ ней перпендикулярные діаметры AD и BC; провести перпендикуляръ MNN' къ BC (Р встръча его съ BC) такъ, чтобы сумма объемовъ, образуемыхъ прямоугольникомъ ОАМР и треугольникомъ ОNР, при обращеніи около BC, была maxima.
- 77. Какой изъ сферическихъ сегментовъ даннаго объема имъетъ наименьшую выпуклую поверхность?
- 78. Опредълить сторопы прямоугольника, имъющаго данный периметръ, такъ, чтобы цилиндръ, полученный обращениемъ фигуры около одной изъ стороны, имълъ наиб. объемъ.
  - 79. Вписать въ данный шаръ цилиндръ наиб. объема.
- 80. Данъ полукругъ діаметра MN, къ которому проведены касательныя MK, NH; взявъ MK = a, проводять третью касательную KH. При какомъ в объемъ, образуемый четыреугольникомъ MKHN при обращеніи около MN, получаетъ наим. ведичину?
- 81. Вписать въ дапный шаръ правильную треугольную призму наибольшаго объема.
- 82. Данъ прямоугольникъ и вит его плоскости параллель двумъ его сторонамъ; средина параллели пролагается въ центръ прямоугольника. Чрезъ эту прямую и параллельныя ей стороны прямоугольника проводять двт плоскости, и чрезъ концы прямой и двт другія стороны прямоугольника двт другія плоскости: получается

тёло, ограниченное 5-ю гранями и им'єющее форму клина. Опред'єлить тах. или тіп. объема этого тёла, когда даны: высота, длина сказанной параллели и периметръ прямо-угольника.

- 83. Каковъ долженъ быть уголъ сектора радіуса R, чтобы, свернувъ этотъ секторъ въ конусъ, получить тёло наибольшаго объема.
- 84. Изъ всёхъ конусовъ, пиёющихъ одинановую боковую поверхность, какой имёетъ наиб. объемъ; и изъ всёхъ конусовъ одинаковаго объема какой имёетъ наим. боковую поверхность?
- 85. Махітит объема правильной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, имѣющей данную боковую поверхность.
- 86. Мах. объема тѣла, внисаннаго въ данный шаръ и состоящаго изъ цилиндра и двухъ конусовъ, построенныхъ извиѣ на основаніяхъ цилиндра.
- 87. Въ полушаръ винсать усѣченный конусъ, котораго полная поверхность была бы тахіта.
- 88. Изъ всёхъ усѣченныхъ конусовъ одинаковой высоты и одинаковаго объеча найти такой, около котораго можно описать наименьшій шаръ.
- 89. Около шара описанъ цилиндръ и чрезъ точки А и А', взятыя на его оси въ равномъ разстояніи отъ центра шара, описаны два конуса, пересъкающіе цилиндръ по кругамъ ВС и В'С'. Найги тіпітит полной поверхности, составленной изъ боковыхъ поверхностей конусовъ и содержащейся между ними пилиндрич. поверхности.
- 90. Дана неравнобочная трапеція ABCD п діагональ BD. Чрезъ точку І высоты ВН проводять параллель EON основаніямь: пусть она вствѣчаеть стороны въ E и N, діагональ въ O. Найтн I такъ, чтобы  $EO^2 + ON^2$  была max.
- 91. Дано меньшее основаніе 2a равнобочной трапеціи и общая длина b непараллельных сторонь. Опред'ялить большее основаніе такь, чтобы площадь трапеціи была maxima.
  - 92. Найти тах. полной поверхности конуса, вписаннаго въ данный шаръ.
- 93. Изъ данной точки P въ плоскость круга проводять къ нему съкущую; изъ точекъ пересъченія A и В этой прямой съ окружностью опускають периендикуляры AC и BD на діаметръ, проходящій чрезъ точку P. Найти тахітит площади трапеціи ACDB, когда съкущая вращается около точки P.
- 94. Изъ всёхъ прямоугольныхъ наразделонипедовъ, имѣющихъ одинаковую полную поверхность, а одно измѣненіе которыхъ если среднее гармоническое между двумя другими, найти такой, который имѣетъ наим. дізгональ.
- 95. Даны бока равнобочной трапеціи и одно изъ основаній; каково должно быть другое основаніе, чтобы объемъ, произведенный фигурою при обращеніи около перваго основанія, быль ванбольшій.
- 96. Данъ вругъ радіуса R; центръ правильнаго перемѣннаго треугольника совпадаетъ съ центромъ круга; на сторонахъ △-ка строятъ равнобедренные тр-ки, вершины которыхъ лежали бы на окружности даннаго круга. Затѣмъ составляютъ изъ этихъ четырехъ треугольниковъ тетраэдръ. Найти maximum объема этого гетраедра.
- 97. Изъ всёхъ сферическихъ слоевъ даннаго шара, им'єющихъ одинаковую высоту, найти такой, который им'єсть наибольшій объемъ.
- 98. Изъ всёхъ описусмыхъ равнобедренныхъ трансцій, вписанныхъ въ данный кругь, найти такую, которая имёсть наибольшую илощадь.

- 99. Изъ всёхъ трапецій одинаковой высоты, вписанныхъ въ данный кругь, у какой сумма квадратовъ всёхъ сторонъ minima?
- 100. Пересъвають данный шарь двумя параллельными плоскостями, разстояніе между которыми равно данной величинь, и въ каждый изъ полученныхъ сегментовъвписывають конусь. Найти maximum суммы объемовь этихъ конусовъ и заключающагося между ними слоя.
- 101. Замёняють конусы предыдущей задачи описанными вонусами, касающимися нара по кругамъ сёченія. Міпітиш суммы боковыхъ поверхностей обоихъ конусовъ.
- 102. Данъ кругъ и касательная AC въ концѣ діаметра AB. Провести хорду BD такъ, чтобы  $\triangle$  ABD, вращаясь около касательной, образовалъ наиб. объемъ.
  - 103. Найти тах. площади круговаго сектора, имфющаго данный периметръ.
- 104. Въ вонцахъ діаметра АВ даннаго полукруга проводятъ касательныя АС и ВО и параллель СО въ діаметру, точки встрівчи воторой съ окружностью суть Е и F. Опреділить положевіе сівущей ЕГ тавъ; 1) чтобы сумма или разность площадей АВОС, ОЕГ была тахіта пли тіпіта; 2) чтобы сумма объемовъ, описанныхъ этими площадями при обращеніи фигуры оволо АВ, была тахіта.
  - 105. Махітит объема ниши, имѣющей данную полную поверхность.
- 106. Minimum и maximum объема ареометра, имѣющаго данную полную поверхность и данный радіусъ.
- 107. Махітит объема цилиндрическаго котла, оканчивающагося двумя полусферами, если: 1) периметръ съченія тъла плоскостью, проходящею чрезъ ось, постоянень; 2) полная поверхность тъла постоянна; 3) длина оси постоянна.
  - 108. Махітит полной поверхности сферич. сектора даннаго объема.
- 109. Мах. или min. объема сферическаго слоя, имѣющаго данную полную поверхность, лS, если данъ радіусь шара R.
- 110. Разложить данное число a на n множителей  $x, y, z, \ldots$  такихъ, чтобы сумма  $x^m + y^p + z^q + \ldots$  была minima.
- 111. Внутри прямаго угла дана точка М; провести чрезъ нее съкущую такъ, чтобы отръзокъ ен внутри угла имълъ наименьшую величину.
- 112. На прямой, соединяющей два источника свёта, найти точку, всего сильнёе освёщаемую ими, если разстоявие между источниками = l, а напряженности ихъ a и b.
- 113. Изъ даннаго цилиндрическаго бревна вырѣзать прямоугольный брусъ паибольшаго сопротивленія. Сопротивленіе бруса пропорціонально произведенію его ширины на квадрать толщины.

# ОТДЪЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

## АНАЛИЗЪ СОЕДИНЕНІИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНІЯ.

#### ГЛАВА XLII

Разм'ященія, перестановки и сочетанія безъ повтореній и съ повтореніями.—Задачи.

712. Опредъленія. — Если изъ m данныхъ предметовъ, напр. изъ m буквъ  $a, b, c, d, \ldots, i$ , l взыть k буквъ, гдѣ  $k \ge m$ , и написать ихъ другъ за другомъ въ какомъ-нибудь порядкѣ, то получится соединеніе, называемое размъщеніемъ изъ m буквъ можно составить нѣсколько размѣщеній k-то порядка; число ихъ обозначаютъ символомъ m, гдѣ нижній указатель m означаетъ число всѣхъ предметовъ (элементовъ), верхній k—число элементовъ, входящихъ въ каждое размѣщеніе.

Если въ составъ каждаго соединенія мы возьмимъ всё данныя буквы, то одно соединеніе будеть отличаться отъ другаго уже не буквами, а только порядкомъ, въ которомъ они написаны. Такія ссединенія называются перестановками. Число перестановокъ изъ m элементовъ обозначають символомъ  $P_m$ . Изъ опредёленія слёдуетъ, что  $P = A^m$ .

Если, взявъ m различныхъ буквъ, мы составимъ изъ нихъ соединенія по k буквъ въ каждомъ, такъ чтобы одно соединеніе отличалось отъ другаго по крайней мъръ одною буквою, то получимъ такъ—называемыя сочетанія изъ m буквъ k-го порядка. Число ихъ обознаютъ символомъ C

Займемся указаніемъ способа составленія и опредъленія числа соединеній каждаго рода.

## Размѣщенія (arrangements).

713. Способъ составленія и опредѣленіе числа размѣщеній.—Пусть будутъ  $a,\ b,\ c,\ d,$  . . .  $h,\ i,\ l$  данные m элементовъ. Число размѣщеній изъ этихъ

m буквъ, по одному элементу въ наждомъ, очевидно, равно числу элементовъ. Слъд.  $A^1_m = m$ .

Составимъ размъщения втораго порядка, т. е. содержащия по два элемента: для этого нужно взять поочередно каждую изъ m буквъ и приписать къ ней справа каждую изъ остальныхъ m-1 буквъ; тавимъ образомъ получимъ таблицу:

				Чтобы доказать, что такимъ образомъ получатся
ab	bu	ca .	la	вст разитщенія 2-го порядка, надо доказать, что ни
ac	bc	cb .	lb	одно размъщение не было опущено, ни одно не пов-
ad	bd	cd .	1:	торено два раза. И въ самомъ дёлё: 1) возьмемъ ка-
		. 1		кое ниб. разывщеніе, напр. са; для составленія вер-
	•		•	тикальныхъ колоннъ мы ставили по очереди каждую
			•	букву на первомъ мъстъ; слъд. въ частности была
ai	bi	$oldsymbol{ci}$ .	. lh	взята и буква с; справа отъ этой буквы ставили каж-
al	bl	cl .	li	дую изъ остальныхъ буквъ, слёд., въ частности, и
				букву $d$ ; что и дало размъщение $cd$ . Слъд. ни одно

размъщение не было пропущено. 2) Сравнимъ два какія нибудь размъщенія таблицы: они будутъ находиться пли въ одной и той же вертикальной колонпъ, и въ такомъ случат будутъ различаться послъдними буквами, или же будутъ содержаться въ двухъ различныхъ вертикальныхъ колоннахъ, — и въ такомъ случат будутъ различаться первыми буквами. Убъждаемся, что вст размъщенія различны, т. е. что таблица не содержитъ повторэній. Итакъ, послъдпяя содержитъ вст размъщенія 2-го порядка.

Опредълимъ ихъ число. Очевидно, всѣхъ вертикальныхъ колониъ столько, сколько всѣхъ размѣщеній 1-го порядка, т. е. сколько всѣхъ буквъ, слѣд. m; въ каждой колониъ m-1 размѣщеній; слѣд. всѣхъ двойныхъ размѣщеній m(m-1). Итакъ  $A_m^2 = m(m-1)$ .

Составимъ тройныя размъщенія изъ m буквъ. Для это нужно взять поочередно каждое двойное размъщеніе, и принисать къ нему послъдовательно каждую изъ m-2 остальныхъ буквъ; такимъ образомъ составимъ таблицу:

		_	-			 	and the second s
							Докажемъ, что на одно тройное размъщение не
abc	acb			bca		lia	было пропущено и ни одно не повторено лишній
abd	acd			bcd		lib	разъ. П въ самомъ дълъ: 1) возьмемъ какое ин-
abe	ace			bcc		lic	будь размъщение lif. Для составления вертикаль-
							ныхъ колоннъ мы брали поочередно каждое двойное
							разивщеніе; сл. между прочимъ было взято и $li.$
•	•				4		Къ нему принисывали последовательно каждую изъ
abi	aci			bci			остальныхъ буквъ, сл. въ частности была припи-
abl	acl			bcl		lih	сана и буква f, что и даетъ lif. Слъд. таблица
							не содержитъ пропусковъ. 2) Сравнимъ два какія
_							

нибудь размёщенія таблицы. Или они находятся въ одной вертикальной колоннё, и тогда различаются послёдними буквами; или—въ двухъ различныхъ колопнахъ, и въ такомъ случав различаются, по крайней мёрё, порядковъ двухъ первыхъ буквъ, какъ асі и саі. Заключаемъ, что всё размёщенія таблицы различны. Итакъ, она содержить всё размёщенія 3-го порядка.

Опредълных ихъ число. Всёхъ вертикальныхъ колоннъ столько, сколько

двойныхъ размѣщеній изъ m буквъ, т. е.  $A_m^2$  или m(m-1); въ каждой колоннѣ содержится m-2 размѣщенія; слѣд. всѣхъ тройныхъ размѣщеній m(m-1)(m-2). Итакъ  $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$ .

Разсматривая формулы  $A_m^1$ ,  $A_m^2$ ,  $A_m^3$ , замѣчаемъ, что всѣ они составлены по одному и тому же закону: каждая представляеть произведение чисель, послъдовательно уменьшающихся на 1, начиная съ м и кончая множителемъ, равиымъ числу элементовъ, минусъ порядокъ размъщеній, плюсъ 1; число же множителей равпо порядку размъщепій. Докажемь общность этого закона, в для этого выведемъ формулу, выражающую зависимость между числами размѣщеній двухъ смежныхъ порядковъ, напр. связь между  ${f A}_m^{k-1}$  и  ${f A}_m^k$ . Вообразимъ, что мы составили всѣ размѣщенія k-1-го порядка, число которыхъ выражается символомъ  $A_m^{k-1}$ , и желаемъ составить размѣщенія k-го порядка. Для этого беремъ поочередно каждое разывщение k-1-го порядка и принисываемъ въ нему поочередно каждую изъ остальныхъ буквъ, число которыхъ = m - (k-1), или m-k+1. Такимъ образомъ составимъ столько вергикальныхъ колониъ, сколько разм'ященій k-1-го порядка, а въ каждой колонн'я m-k+1 разм'ященій. Докажемъ, что ни одно размъщеніе k-го порядка не повторено два раза, и что ни одно не пропущено. Въ самомъ дѣлѣ: 1) сравнивая два какія нибудь размъщенія, найдемъ, что они или находятся въ одной и той же вертикальной колонић, и въ такомъ случаћ разнятся посаћдинми буквами, или же принадлежать двумь различнымь колопнамь, и вь такомь случав разнятся, по крайней мъръ, порядкомъ k-1 первыхъ буквъ, какъ abc...ih п ci...bah. 2) Ни одно размѣщеніе k-го порядка не будетъ пропущено; въ самомъ дѣдѣ, пусть взято равивщеніе k го порядка abc....ih. Для составленія этпхъ размівщеній мы брали поочередно каждое размъщеніе k-1-го порядка, слъд. въ частности было взято и размъщение авс....і; къ нему приписывали послёдовательно каждую изъ остальныхъ буквъ, слъд. принисали, между прочимъ, и букву h, что и даетъ abc...ih. Итакъ, указаннымъ способомъ составлены вс $\mathfrak k$  разм $\mathfrak k$ щенія k-го пор. наъ m буквъ.

Для опредъленія ихъ часла, очевидно, нужно помножить часло колоннъ, т. е. число размъщеній k—1-го пор. или  $A_m^{k-1}$  на часло размъщеній въ каждой колоннъ, т. е. на m-k+1. Имъемъ:

$$A_m^k = A_m^{k-1} \cdot (m-k+1).$$

Это и есть формула, связывающая числа  $\mathbf{A}_m^k$  и  $\mathbf{A}_m^{k-1}$ . Такъ какъ формула эта — общая, то можемъ давать въ ней k всё цёлыя значенія отъ 2 до k. Получимъ:

$$A_{m}^{2} = A_{m}^{1}(m-1)$$

$$A_{m}^{3} = A_{m}^{2}(m-2)$$

$$A_{m}^{4} = A_{m}^{3}(m-3)$$

$$\vdots$$

$$A_{m}^{k} = A_{m}^{k-1}(m-k+1)$$

Перемноживъ почленно эти равенства, сокративъ въ объихъ частяхъ общаго множителя  $A_m^2$  .  $A_m^3$  . . . .  $A_m^{k-1}$  и замънивъ  $A_m^1$  его значеніемъ m, найдемъ:

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-k+1) \dots (I)$$

Отсюда

Теорема. Число размъщеній изъ т буквъ по к равно произведенію к цълыхъ чисель, уменьшающихся послыдовательно на 1, изъ которыхъ первое равно т.

714. ПРИМВРЪ I. Сколько можно составить трехзначных чисель изъ нечетных инфръ 1, 3, 5, 7, 9?

Искомое число, очевидно, есть число размѣщеній изъ 5 элементовъ по 3; слѣд. оно равно  $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ .

ПРИМЪРЪ II. Сколько можно бы было составить словъ изъ 20 согласных и 6 гласныхъ, если каждое слово должно заключать 3 согласныхъ и 2 гласныхъ, причемъ послъднія могутъ занимать только второе и четвертое мъста?

20 согласных в дадуть размѣщеній по 3 буквы въ каждомъ:  $A_{20}^3$ ; въ каждомъ изъ этихъ размѣщеній, 6 гласныхъ, помѣщаемыя по парно на второмъ и четвертомъ мѣстѣ, могутъ быть размѣщены  $A_6^2$  способами; слѣд. число искомыхъ словъ =  $A_{20}^3 \times A_6^2 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \times 6 \cdot 5 = 205200$ .

## Перестановки (permutations).

715. Способъ составленія и опредъленіе числа перестановонъ. — Перестановки различаются отъ размѣщеній только тѣмъ, что берутся всѣ буквы. Изъ этого прямо слѣдуетъ, что для составленія перестановокъ изъ m буквъ, надо изъ этихъ буквъ составить всѣ размѣщенія по 2, изъ нихъ размѣщенія по 3 и т. д., пока не дойдемъ до размѣщеній по m. Отсюда также слѣдуетъ, что для опредъленія числа перестановокъ изъ m буквъ нужно только въ формулѣ  $A_m^k = m(m-1)(m-2)....(m-k+2)(m-k+1)$  положить k=m. Такимъ образомъ найдемъ

$$P_m = A_m^m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot (m-2)(m-1)m$$
.

Отсюда теорема: Число перемъщеній изг т элементов равно произведенію натуральных чиселг отг 1 до т.

Можно доказать эту теорему независимо отъ формулы числа размѣщеній. Въ самомъ дѣлѣ, пусть составлены перемѣщенія изъ m-1 буквъ a,b,c,d,...,h,i,k, и пусть число перемѣщеній будетъ  $P_{m-1}$ . Чтобы составить перемѣщенія изъ m буквъ, беремъ жаждое перемѣщеніе изъ m-1 буквъ и вводимъ въ него m-ую букву l, помѣщая послѣдовательно слѣва и справа этого перемѣщенія и во всѣ промежутки между его буквами. Такимъ образомъ мы составимъ всѣ перемѣщенія изъ m буквъ, безъ повтореній и безъ пропусковъ. Безъ повторе-

ній — потому, что одно перемъщеніе будеть отличаться отъ другаго или порядкомъ m-1 первоначально взятыхъ буквъ, или мъстомъ, которое занимаетъ новая буква l. Безъ пропусковъ, ибо взявъ перемъщеніе ablc...k, напр., замъчаемъ, что оно произошло изъ перемъщенія abc...k, составленнаго изъ m-1 первоначальныхъ элементовъ, въ которое буква l введена на 3-е мъсто; слъд. такая перестановка была получена.

Итакъ: указаннымъ способомъ получимъ всѣ перестановки изъ m буквъ. Опредѣлимъ ихъ число. Каждая перестановка изъ m-1 буквъ даетъ m перестановокъ изъ m буквъ, ибо буква l можетъ занять въ первой m различныхъ мѣстъ; слѣд.

$$P_m = mP_{m-1}$$
:

такова связь между  $P_{m-1}$  и  $P_m$ . Формула эта справедлива для всякаго m, будум совершенно общею; давая въ ней m послъдовательно всъ значенія отъ 2 до m, находимъ:

$$P_2 = P_1 \cdot 2$$
;  $P_3 = P_2 \cdot 3$ ;  $P_4 = P_3 \cdot 4$ ; ...;  $P_m = P_{m-1} \cdot m$ .

Перемноживъ эти равенства, уничтоживъ общіє множители въ объихъ частяхъ, и замъчая, что  $P_1 = 1$ , находимъ:

$$P_m = 1.2.3.4....(m-1).m.....$$
 (II)

Такое произведеніе т первыхъ натуральныхъ чиселъ часто встрѣчается въ формулахъ анализа; ему дано особое названіе — факторіала т.

716. Примъръ. Сколькими способами 5 лошадей могутг быть запряжены въ дилижансь?

Очевидно, искомое число есть число перестановокъ изъ 5 предметовъ; сл5д. оно равно 1.2.3.4.5, или 120.

Примпъчаніе. Номощію перестанововъ въ прежнее время отыскивались анаграммы оразъ и словъ. Такъ, изъ имени Генриха III Валуа, Henri de Valois, выходить: Vilain Herode, s; изъ имени убійцы Генриха III, Frère Jacques Clément выходитъ: c'est l'enfer qui m'a créé; изъ словъ Domus Lescinia (домъ Лещинскихъ) Яблонскій составилъ слёдующія оразы: Ades incolumis, omnis es lucida, mane sidus loci, sis columna Dei, I scande solium; въ послёдней анаграммъ было предсказаніе: Станиславъ сдёлался королемъ польскимъ. Нахожденіе подобныхъ анаграммъ весьма затруднительно, такъ какъ число перестановокъ изъ довольно значительнаго числа буквъ бываетъ чрезвычайно велико; напр. число перемёщеній изъ 12 предметовъ будетъ 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12; это число представляетъ, напр., сколькими способами могутъ 12 лицъ размѣститься на 12 мѣстахъ; положивъ, что 1 перемѣщеніе они усцѣваютъ сдѣлать въ 1 минуту, что въ сутки они употребляютъ на это 12 часовъ и въ годъ 360 дней; найдемъ, что всѣ перемѣщенія могутъ быть окончены чрезъ 1848 лѣтъ.

## Сочетанія (combinaisons).

717. Способъ составленія и опредъленіе числа сочитаній.—Пусть дано m буквъ:  $a,\ b,\ c,\ d,\ \dots,\ h,\ i,\ l$ : это будутъ сочетанія изъ m буквъ по

одной. Для составленія двойныхъ сочетавій беремъ каждую букву, кром'в посл'єдней, и приписываемъ къ ней посл'єдовательно каждую из'ъ сл'єдующихъ за нею. Получимъ таблицу двойныхъ сочетавій:

$$ab, ac, ad, \ldots, ah, ai, al$$
 $bc, bd, \ldots, bh, bi, bl$ 
 $cd, \ldots, ch, ci, cl$ 
 $\ldots$ 

Чтобы составить тройныя сочетація беремъ каждое пзъ двойныхъ, кромѣ тѣхъ, которыя содержатъ послѣднюю букву  $(al,\ bl,\ ...,\ il)$  и приписываемъ послѣдовательно каждую слѣдующую букву; получимъ

Этимъ мы изъ размъщеній выдъляемъ такія, которыя отъ имъющихся уже отличаются только мъстами буквъ, и сл. получаемъ сочетанія. Но изъ способа составленія сочетаній трудно опредълить ихъ число; легче это сдълать при помощи слъдующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Число размищеній изъ т буквъ по k равно числу сочетаній изъ т буквъ по k, помноженному на число перестановокъ изъ k буквъ, т. е.  $A_m^k = C_m^k$ .  $P_k$ .

Вообразимъ, что мы составили таблицу сочетаній изъ m буквъ k-го порядка; число ихъ выражается символомъ  $C_m^k$ . Взявъ каждое изъ этихъ сочетаній (соцержащее k буквъ), сдълаемъ въ немъ всевозможныя перестановки, число которыхъ (изъ одного сочетанія) будетъ Рк. Докажемъ, что такимъ образомъ мы составимъ всѣ размѣщенія изъ m по k, безъ пропусковъ и безъ повтореній. Въ самомъ дълъ, если взять изъ составленной таблицы два члена, то: или они происходять отъ двухъ разныхъ сочетаній, и въ такомъ случай различаются буквами; или же происходять изъ одного и того же сочетавія, — и въ такомъ случать разнятся порядкомъ буквъ. Слъд. таблица не содержитъ повтореній. Въ ней нътъ и пропусковъ. Въ самомъ дълъ, вообразимъ нъкоторый членъ г грудпы  $A_m^k$ , не обращая вниманія на порядокъ буквъ въ немъ; этотъ членъ представляеть некоторое сочетание изъ m буквъ по k, и след., если не обращать вниманія на порядовъ его буквъ, онъ находится въ группъ См; такъ какъ буквы этого сочетанія были перем'ящены всіми возможными способами, то г необходимо содержится въ числъ полученныхъ размъщеній. Зная это, замътимъ, что одно сочетаніе порядка к даетъ Рк перестанововъ, слід.

$$A_m^k = C_m^k \cdot P_k,$$
 откуда  $C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \cdot \cdot \cdot \cdot (III)$ 

Итакъ, имъемъ теорему: число сочетаній и  $\tau$  т буквъ по k равно произведенію k цылых  $\tau$  чисель, послыдовательно убывающих на 1, первое изъ которых  $\tau$  т, дыгенному на произведеніе натуральных чисель отъ 1 до k.

71°. Примъры — I. Въ обществъ изг 12 миг выбираютъ коммиссію изъ 5 членовъ, для разработки нъкотораю вопроса; сколькими способами эта коммиссія можетъ быть составлена?

Такъ какъ одинъ составъ коммисіи долженъ отличаться отъ другаго, и не содержать всёхъ тёхъ же лицъ, то, очевидно, искомое числе есть числе сочетаній изъ 12 элементовъ по 5; слёд. оно  $=C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 9 \cdot 8$  = 792.

II. Сколько различных діалон лей можно пропести въ десятнуюльникь? Искомое число есть число сочетаній изъ 10 элементовъ по 2, уменьшенное 10-ью (10 стр. мног), и сл. =  $C_{10}^2-10=\frac{10.9}{1.2}-10=35$ .

**719**. Число  $\mathbb{C}_m^k$  есть необходимо число цѣлое; поэтому изъ формулы (III) прямо получается

ТЕОРЕМА. Произведение к послыдовательных цилых чисель дылится безь остатка на произведение первых к инлых чисель.

720. Формула (III) можеть быть представлена въ другомъ видъ. Помноживъ ея числителя и знаменателя на (m-k)(m-k-1)(m-k-2)...3.2.1 или, что тоже, на 1.2.3....(m-k), найдемъ

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot (m-k+1)(m-k)(m-k-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m-k)}.$$

Прочитавъ числителя въ обратномъ порядкъ, находимъ, что онъ представляетъ произведение натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m; слъд. можно написатъ:

$$\mathbf{C}_m^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-k)}$$
, или еще  $\mathbf{C}_m^k = \frac{\mathbf{P}_m}{\mathbf{P}_k \times \mathbf{P}_{m-k}} \cdot \cdots \cdot (\mathbf{IV})$ .

Замѣчая, что  $\mathbf{C}_m^k$  есть число цѣлое, изъ послѣднихъ формулъ прямо находимъ слѣдующую теорему.

Теорема. Произведение ряда натуральных чисел от 1 до т всегда дълится на произведение 1.2.3....k, на произведение 1.2.3....k, на произведение 1.2.3....k, полагая k < m.

721. Свойства сочетаній. 1. — Число сочетаній изъ m букат по k равно числу сочетаній изъ m букат по m-k, m. e.  $C_{ij}^k \stackrel{\bullet}{=} C_m^{m-k}$ .

Въ самомъ дълъ, по формуль IV имъемъ:

$$\mathbb{C}_m^k = \frac{\mathbb{P}_m}{\mathbb{P}_{k} \cdot \mathbb{P}_{m-k}} \quad \text{if} \quad \mathbb{C}_m^{m-k} = \frac{\mathbb{P}_m}{\mathbb{P}_{m-k} \cdot \mathbb{P}_{m-k-m-k}} = \frac{\mathbb{P}_m}{\mathbb{P}_{m-k} \cdot \mathbb{P}_k},$$

откуда прямо следуеть равенство  $C_m^k = C_m^{m-k}$ .

Можно доказать эту теорему еще такъ. Выбравъ изъ m буквъ какія нибудь k буквъ, мы составимъ изъ нихъ одно сочетаніе группы  $\mathbf{C}_m^k$ ; но остальныя m-k

буквъ дадутъ, своей совокупностью, одно сочетаніе группы  $\mathbf{C}_m^{m-k}$ ; такимъ образомъ всякому члену группы  $\mathbf{C}_m^k$  соотвътствуетъ одинъ членъ группы  $\mathbf{C}_m^{m-k}$ , и обратно: слъд. число членовъ объихъ группъ одинаково.

II. Число сочетаній изъ т буквъ по k равно числу сочетаній изъ т — 1 буквъ по k, сложенному съ числомъ сочетаній изъ т — 1 буквъ по k—1; т. е.  $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$ .

Въ самомъ дълъ, по формулъ IV можемъ написать:

$$\mathbf{C}_{m-1}^{k} = \frac{1.2.3...(m-1)}{1.2...k.1.2...(m-k-1)} \quad \mathbf{m} \quad \mathbf{C}_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3....(m-1)}{1.2...(k-1).1.2...(m-k)} \cdot \mathbf{C}_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3....(m-1)}{1.2....(k-1).1.2...(m-k)} \cdot \mathbf{C}_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3....(m-1)}{1.2....(k-1).1.2...(m-k)} \cdot \mathbf{C}_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3....(m-1)}{1.2....(k-1).1.2....(m-k)} \cdot \mathbf{C}_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3....(m-1)}{1.2....(m-k)} \cdot \mathbf{C}_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2....(m-k)}{1.2....(m-k)}$$

Спладывая, находимъ:

$$C_{m-1}^{k} + C_{m-1}^{k-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot (m-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot (k-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot (m-k-1)} (\frac{1}{k} + \frac{1}{m-k});$$
HO
$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m-k} = \frac{m}{k \cdot (m-k)},$$

слъд. 
$$C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \times 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-k-1)(m-k)} = C_m^k$$

Теорема эта можеть быть доказана иначе. Члены группы  $C_m^k$  могуть быть разбиты на двё части: пусть первая содержить всё тё сочетанія, въ которыя не входить буква a; ихъ число будеть  $C_{m-1}^k$ . Другая группа будеть содержать сочетанія съ буквою a. Вынеся въ нихъ за скобки букву a, получимъ въ скобкахъ, безъ пропусковъ и безъ повтореній, всё члены группы  $C_{m-1}^{k-1}$ , составленные изъ буквъ  $b,c,d,\ldots h,i,l$ . Итакъ, дёйствительно, число  $C_m^k$  есть сумма чиселъ  $C_{m-1}^k$  и  $C_{m-1}^{k-1}$ .

**722.** ЗАДАЧА I. — Въ числъ сочетаній изъ 12 буквъ a,b,c,d.... по 5 сколько такихъ сочетаній, каждое изъ которыхъ содержало бы 3 опредъленныя буквы, напр. a,b,c?

Для рѣшенія вопроса напишемъ подрядъ буквы a,b,c; къ этимъ буквамъ нужно послѣдовательно приписывать парныя сочетанія изъ остальныхъ 9 буквъ. Искомое число и будетъ число парныхъ сочетаній изъ 9 буквъ, т. е.  $\frac{9}{1} \cdot \frac{8}{2}$  или 36.

ЗАДАЧА II. — Вь числь сочетаній изт m букег  $a,b,c,\ldots$  по k, сколько таких, которыя не содержать ни одной изг p опредъленных букег  $a,b,c,\ldots$ ?

Отдъливъ эти p буквъ, которыя не должны входить въ составъ требуемыхъ сочетаній, изъ остальныхъ m-p буквъ составимъ сочетанія k-го порядка: ихъ число и будетъ искомое, т. е.

$$(m-p)(m-p-1)\cdot \cdot \cdot \cdot (m-p-k+1)$$

ЗАДАЧА III.—Въ числъ сочетаній изъ т буквъ a,b,c,... по k, сколько такихъ, которыя содержать, по крайней мъръ, одну изъ опредъленныхъ р буквъ a,b,c,...?

Очевидно, искомое число есть разность между полнымъ числомъ сочетаній изъm буквъ по k и числомъ сочетаній, не содержащихъ ни одной изъp опредъленныхъ буквъ, т. е. равно

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdot \cdot \cdot \cdot (m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdot \cdot \cdot k} - \frac{(m-p)(m-p-1)\cdot \cdot \cdot (m-p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdot \cdot \cdot k}.$$

### Соединенія съ повтореніями.

723. Размѣщенія съ повтореніями. — Размѣщенія называють полными пли съ повтореніями, когда буквы въ размѣщеніяхъ могуть повторяться нѣсколько разъ.

Пусть дано m буввь:  $a,b,c,d,\ldots,h,i,l$ . Чтобы составить изъ нихъ двойныя развъщенія съ повтореніями нужно въ важдой изъ буквъ приписать послѣдовательно важдую изъ данныхъ буквъ безъ исвлюченія; тавимъ образомъ получимъ двойныя размѣщенія:

- съ буквою a въ началb: aa,ab,ac, . . . , ah,ai,al;
- съ буквою b въ началь: ba,bb,bc, . . . , bh,bi,bl;
- съ буквою c въ началь: ca,cb,cc, . . . , ch,ci,cl; и т. д.

Обывновеннымъ разсужденіемъ докажемъ, что полученныя этимъ способомъ разшёщенія всё различны и не содержать пропусковъ. Легко найти число ихъ. Съ каждою буквою въ началё имёемъ m размёщеній, и какъ каждая изъ m буквъ поочередно ставится въ началё, то всёхъ размёщеній будеть  $m \cdot m$  или  $m^2$ .

Для составленія тройных разміщеній беремь одно двойное напр. аа и принисываемь къ нему каждый изъ данных элементовь безь исключенія; двойное размішеніе аа дасть тройныя:

aaa,aab,aac, . . . . , aah,aai,aal;

двойное размъщение ав дасть тройныя:

$$aba,abb,abc, \ldots, abh,abi,abl;$$
 H T. R.

Извёстнымъ образомъ докажемъ, что поступая такъ, ни одного тройнаго разм. мы не пропустимъ, и ни одного не повторимъ лишній разъ. Число ихъ опредёлить легко. Одно двойное разм'єщеніе даетъ m тройныхъ; след.  $m^2$  двойныхъ разм'єщеній дадуть  $m \times m^2$  или  $m^3$  тройныхъ.

Вообще число разм'вщеній r-го порядка, обозначаємоє символомъ  $AA_m^r$ , будеть  $m^r$ . Доказать это значить доказать, что если число разм'вщеній r—1-го пор. есть  $m^{r-1}$ , то число разм'вщеній порядка r есть  $m^r$ . Въ самомъ д'влів, послівднія мы получаємъ, приписывая въ каждому разм'вщенію r—1-го пор. каждую изъ m буквъ; такимъ обр. одно разм'вщеніе r—1-го пор. даеть m разм'вщеній порядка r, слівд.  $m^{r-1}$  разм'вщеній r—1-го пор. дадуть  $m \times m^{r-1}$  или  $m^r$  разм'вщеній порядка r.

 $\Pi$  Р  $\Pi$  м  $\pi$  Р  $\Pi$ . I. — Сколько можно написать трехзначных чисель изъ девяти инфръ  $1,2,\ldots,9$ ?

Очевидно, столько, сколько можно сдёлать тройных размёщеній съ повтореніями изъ 9 элементовъ, т. е. 93 или 729.

II. Сколькими способами могуть вскрыться 3 игральныя кости (костяные кубики съ номерованными гранями)?

Очевидно, 63 или 216 способами.

724. Перестановки съ повтореніями. — Вообразимъ m буквъ, въ числѣ которыхъ буква a повторяется a разъ,  $b-\beta$  разъ,  $c-\gamma$  разъ и т. д., причемъ  $a+\beta+$ 

¬ + · · · равно или меньше m, т. е. что каждая буква повторяется, или что есть и неповторяющіяся буквы. Группы, получаемыя отъ всевозможныхъ перестановокъ этихъ m
буквъ, называются перестановками съ повтореніями; число ихъ обозначають такъ: PP<sub>m</sub>.

Обозначимъ число ихъ буквою x и опредълить его. Въ каждой группѣ поставимъ у  $\alpha$  буквъ, равныхъ a, значки 1, 2, 2, ....,  $\alpha$ . Переставимъ эти значки всевозможными способами; такъ какъ изъ  $\alpha$  элементовъ можно сдѣлать  $P_{\alpha}$  перестановокъ, то получится новая таблица, въ которой будетъ x.  $P_{\alpha}$  групъ. Эта таблица содержитъ всѣ перестановки изъ m буквъ, въ числѣ которыхъ  $\beta$  буквъ равны b,  $\gamma$  буквъ равны c, ...., а другія различны. Въ самомъ дѣлѣ: 1) каждыя двѣ группы этой таблицы различны, ибо если они получаются изъ одной и той же группы первоначальной таблицы, то разнятся порядкомъ значковъ 1, 2, ....,  $\alpha$ ; а если происходятъ отъ двухъ различныхъ группъ, то отличаются порядкомъ буквъ 2) Какое угодно перемѣщеніе изъ m буквъ, въ которомъ  $\beta$  буквъ равны b,  $\gamma$  равны c, ...., остальныя же буквы различны, находится въ этой второй таблицѣ; ибо если въ этомъ перемѣщенім уничтожить значки 1, 2, ....,  $\alpha$ , то получимъ группу первой таблицы; а, по предположенію, буквы a въ этой группѣ были снабжены индексами 1, 2, ....,  $\alpha$  и послѣдніе перемѣщены всевозможными снособами.

Затъмъ въ каждой группъ 2-ой таблицы поставимъ у буквы b значки  $1,2,3,\ldots,\beta$  и перемъстимъ эти значки всевозможными способами; получится 3-ья таблица, число членовъ которой равно  $x \cdot P_{\alpha} \cdot P_{\beta}$ . Какъ и выше, докажемъ, что эти члены суть перемъщенія изъ m буквъ, въ числъ которыхъ  $\gamma$  буквъ равны c и т. д.

Продолжая такимъ образомъ, нолучимъ перемѣщенія изъ m буквъ числомъ  $x \cdot P_{\alpha} \cdot P_{\beta} \cdot P_{\gamma} \cdot \ldots$  Но когда всѣ равныя буквы замѣнятся неравными, то образуются перемѣщенія изъ m буквъ, безъ повтореній; число такихъ перемѣщеній равно  $P_{m}$ . Итакъ:

$$x \cdot P_{\alpha} \cdot P_{\beta} \cdot P_{\gamma} \cdot \ldots = P_{m}$$
, откуда  $x = \frac{P_{m}}{P_{\alpha} \cdot P_{\beta} \cdot P_{\gamma} \cdot \ldots}$ , или  $x = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \alpha \times 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \beta \times 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \gamma \times \ldots}$ .

 $\Pi$  Р  $\pi$   $\pi$   $\pi$   $\pi$   $\Pi$ : I. Сколько можно составить пятизначных чисель цифрами 3 и 5, изъ которых первая повторяется 2 раза, вторая 3 раза?

Искомое число, очевидно, есть  $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.3}$ , т. е. 10.

П. Какт велика сумма инфрт во встх перемъщеніях изг цифрт 122334?

Число всёхъ перемёщеній  $=\frac{P_6}{P_2-P_2}=180;$  въ каждомъ перемёщеніи сумма цифръ =15, слёд. во всёхъ перемёщеніяхъ она  $=15\times180=2700$ .

III. Въ урнъ 10 шаровъ: 3 бълыхъ, 4 красныхъ, 2 черныхъ и 1 синій. Околько можеть быть перемъщеній изъ этихъ щаровъ?

Число искомыхъ перемъщеній — 
$$\frac{P_{10}}{P_3 \cdot P_4 \cdot P_2}$$
 — 12600.

**725.** Сочетанія съ повтореніями. Имѣя m данныхъ буквъ  $a,\ b,\ c,\ d,\ \dots$ bbii llh, i, l, н взявъ букву a, присоединимъ къ ней поочеaacc abbccdilредно всѣ буквы, не исключая и буквы a; затѣмъ къ bbdприсоединимъ последовательно все следующія за ней буквы и самую букву b; къ c— всb за ней слbдующія  $\dot{bi}$ ciи с, и т. д. Получимъ группы, различающися, по крайaiы ней мере, одникь элементомы и называемыя сочетаalніями изъ т буквь 2-го порядка съ повторсніями.

Затёмъ, взявъ каждое сочетание 2-го порядка, припишемъ къ нему букву, которою оно оканчивается и каждую изъ слёдующихъ буквъ; составимъ группы, разня-

Въ простыхъ сочетаніяхъ порядовъ k былъ необходимо  $\leq m$ ; въ случаѣ сочетаній съ повтореніями порядовъ ихъ м. б. какой угодно, т. е. k можетъ быть  $\geq m$ . Напр. изъ двухъ

буквъ a и b сочетанія съ повтореніями могутъ быть и 3-го, и 4-го и т. д. порядковъ; такъ полныя сочетанія 3-го пор, изъ двухъ буква a и b будутъ: aaa, aab, abb, bbb.

aal

abc

Пусть требуется найти число сочетаній съ повтореніями изъ m буквъ  $a, b, c, \ldots, l$  порядка k. Всякое такое сочетаніе m. б. изображено одночленомъ  $a^{\alpha}$   $b^{\beta}$  . . .  $l^{\lambda}$ , гдѣ  $\alpha$ ,  $\beta$ , . . . ,  $\lambda$  суть m цѣлыхъ, положительныхъ или равныхъ нулю, чиселъ, которыхъ сумма = k. Всѣхъ сочетаній будетъ столько, сколькими способами можно распредѣлить k единицъ между m числами, нульными или положительными. Чтобы представить одно изъ такихъ распредѣленій, расположимъ въ рядь m-1 какихъ либо знаковъ, напр. 0; затѣмъ напишемъ единицы числа  $\alpha$  передъ первымъ 0, единицы  $\beta$  въ первомъ промежуткѣ п т. д., наконецъ, единицы числа  $\lambda$  за послѣднимъ 0; не ставя ничего, если показатель естъ ноль. Такимъ образомъ получатся группы въ родѣ:  $0 \cdot 110 \cdot \ldots \cdot 01$ , состоящія изъ k единицъ и m-1 раздѣлительныхъ знаковъ. Сочетаній столько, сколько группъ этого рода, а число этихъ группъ естъ число перемѣщеній изъ m+k-1 буквъ, въ числѣ которыхъ находится k единицъ и m-1 значковъ 0. Такимъ образомъ, назвавъ искомое число сочетаній чрезъ  $\mathbb{C}C_m^k$ , получимъ:

$$CC_{m}^{k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \cdot \dots \cdot (1)$$

Эту формулу можно представить въдругомъ видѣ, сокративъ на  $1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdot \cdot (m-1)$ ; найдемъ

$$CC_m^k = \frac{m(m+1)(m+2) \dots (m+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots k} \cdot \cdots (2)$$

Напр., число тройныхъ сочетаній съ повтореніями изъ 4 элементовъ будетъ:  $CC_4^3 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{6}{3} = 20$ .

726. Иногда можно упрощать опредёление числа сочетаний съ повторениями при помощи соотношения:

Въ самомъ дъль, на основанін формулы (1) имъемъ:

$$\mathrm{CC}_m^k = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (m+k-1)}{1\cdot 2\cdot \ldots (m-1)\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$$
 и  $\mathrm{CC}_{k+1}^{m-1} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (m+k-1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (m-1)\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}$  а эти дроби равны.

Hanp., 
$$CC_3^{10} = CC_{11}^2 = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66$$
.

727. Примъръ. На сколько способов могут вскрыться 2, 3,... игральныя кости? На столько, сколько существуеть парных сочетаній съ повтореніями изъ 6 элементовъ, т. е. на  $CC_6^2 = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$  способъ.

Три кости могутъ вскрыться на  $CC_6^3 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$  способовъ.

#### 728. Задачи.

- 1. Сколькими способами могуть разм'ьститься 30 учениковъ въ класс'ь?
- 2. Сколько различных чисель можно составить изъ цифръ 1,.2, 3, 4, 5, 0, полагая, что каждая цифра должна находиться въ каждомъ числѣ, но только 1 разъ? Числа, начинающися нулемъ, не считаются.
- 3. Сколько перем'вщеній можно составить изъ словъ: Филиппъ, Caracas, Mississipi, inconstitutionnellement?
  - 4. Сколько перем'єщеній можно сл'єдать въ произведеніи  $a^3b^7c^2$ ?
- 5. Изъ 7 буквъ, въ числъ которыхъ есть нъсколько а, можно сдълать 210 различныхъ словъ. Сколько разъ входить буква а?
- 6. Число разм'вщеній изъ n предметовъ по 3 относится къ числу разм'вщеній изъ техъ же предметовъ по 4 вакъ 1:20. Найти n?
  - 7. Опредълить m изъ соотношенія  $m: A_m^3 = 1: 240.$
- 8. Сколько четырехзначныхъ чиселъ можно составить: 1) изъ цифръ 1, 2, 3, 4; 2) изъ цифръ 1, 2, . . . , 9? Въ томъ п другомъ случав цифры могуть повторяться.
- 9. Опредёлить полное число разм'ященій безъ повтореній изъ 16 предметовъ по одному, по два, . . . , по 16?
- 10. Доказать, что полное число размѣщеній съ повтореніями изъ m предметовъ по 1, по 2, . . , по m равно  $m \cdot \frac{m^m-1}{m-1}$ .
  - 11. Найти n изъ соотношенія  $AA_n^8 : AA_n^3 = 537824$ .
- 12. Полное число разм'єщеній изт p предметовъ вс'єхъ порядковъ отъ 1-го до 8, съ повтореніями, относится къ полному числу разм'єщеній 1-го, . . . , 4-го пор., съ повтореніями же, какъ 1297 : 1. Найти p.
- 13. Сколько различныхъ произведеній можно составить изъ натур. чисель отъ 2 до 13, перемножая эти числа по 3?
- 14. Купецъ, имћя 8 сортовъ кофе, хочетъ сдѣдать изъ нихъ смѣси, соединяя эти сорта по-ровну, употребляя по 3 сорта на каждую смѣсь. Сколько различныхъ смѣсей можетъ онъ составить?
- 15. Нёкто имёсть 5 брюкь, 8 жилетовь и 7 сюртуковь. Въ сколькихъ различныхъ костюмахъ можеть онь являться?
- 16. Имжется т различныхъ предметовъ. Какого порядка число сочетаній изъ вихъ будеть наибольшее?
  - 97.  $C_{n+2}^4: C_n^2 = 11:1$ ; найти n?
- 18. Акціонерное общество, состоящее изъ 40 купцовъ, 20 адвокатовъ, 30 промышленниковъ, п 10 врачей желаетъ выбрать изъ своей среды коммиссію, въ составъ которой вошли бы 4 купца, 3 промышл., 1 медикъ и 2 адвоката. Сколькими способами можетъ быть составлена коммиссія?
  - 19. Доказать, что  $CC_m^p = CC_{m-1}^p + CC_m^{p-1}$ . Затыть, вывести отсюда формулу  $CC_1^p + CC_2^p + CC_3^p + \ldots + CC_m^p = CC_m^{p+1}$ , или
  - $1.2.3...p+2.3...(p+1)+....+m(m+1)....(m+p-1) = \frac{m(m+1)....(m+p)}{p+1}.$

#### ГЛАВА XLIII.

#### Биномъ Ньютона.

Выводъ формулы бинома Ньютона для педаго положительного показателя. -- Свойства этой формулы. —Степень полинома. — Ариометическій треугольникъ Паскаля. —Задачи.

**729.** Произведеніе биномовъ (x+a)(x+b)...(x+h)(x+i). Прямымъ умноженіемъ находимъ:

1. 
$$(x+a)(x+b) = x^2 + a + a + ab;$$

оженіемъ находимъ:

1. 
$$(x+a)(x+b) = x^2 + a$$
  $x+ab$ ;  $+b$   $x+ab$ ;  $+ac$   $+b$   $+ac$   $+a$ 

3. 
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^{1} + a \begin{vmatrix} x^{3} + ab \\ + b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^{2} + abc \\ + ac \\ + ad \end{vmatrix} + acd \begin{vmatrix} + acd \\ + acd \\ + bc \end{vmatrix} + bcd$$

#### ит. д.

Внимательное раземотръніе этихъ произреденій обнаруживаетъ слъдующіе законы ихъ состава:

- 1) Число членовъ каждаго произведенія единицею больше числа перемножаемыхъ биномовъ.
- 2) Каждое произведение расположено по убывающимъ степенямъ общей буквы х биномовъ, причемъ показатель буквы х въ первомъ членъ равенъ числу перемножаемыхъ биномовъ; затъмъ показатели х идутъ постепенио уменьшаясь на 1, до послъдняго члена, который не содержить буквы x, или, что тоже, содержить х въ нулевой степени.
- 3) Коэффиціентъ перваго члена равенъ 1; коэф. 2-го члена ревенъ суммъ вторыхъ членовъ биномовъ, или, что тоже, суммъ сочетаній перваго порядка изъ вторыхъ членовъ; коэф. третьяго члена равенъ суммъ двойныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ; коэф. четвертаго члена — сумив тройныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ, и т. д. Наконецъ, последній членъ равенъ произведенію вторыхъ членовъ всёхъ биномовъ.

Докажемъ общность этого закона. Для этого, допустивъ, что законъ въренъ для m-1 бинома, докажемъ, что онъ останется въренъ и для произведенія, содержащаго однимъ биномомъ больше, т. е. для т биномовъ.

Итакъ, пусть будутъ x+a, x+b, x+c, . . . , x+h, x+i тъ m-1 биномовъ, для которыхъ, по допущенію, вышеуказанный законъ въренъ. Обозначить симполами: S<sub>1</sub> — сумму вторыхъ членовъ этихъ биномовъ,  $\mathbf{S_2}$  - сумму двойныхъ сочетаній изъ нихъ,  $\mathbf{S_3}$  - сумму тройныхъ сочетаній, вообще,  $S_k$  — сумму сочетаній k го порядка, и  $S_{m-1}$  — произведеніе всёхъ вторыхъ членовъ. По допущенію, произведеніе этихъ m — 1 биномовъ дастъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)....(x+h)(x+i) = x^{m-1} + S_1 x^{m-2} + S_2 x^{m-3} + S_3 x^{m-4} + .... + S_{m-1} x^{m-k} + S_k x^{m-k-1} + .... + S_{m-1}.$$

Введя m-го **м**ножителя x + l, найдемъ отсюда:

$$(x+a)(x+b)....(x+i)(x+l) = x^{m} + S_{1} \begin{vmatrix} x^{m-1} + S_{2} \\ + S_{1}l \end{vmatrix} x^{m-2} + S_{3} \begin{vmatrix} x^{m-3} .... \\ + S_{2}l \end{vmatrix} x^{m-4} .... + S_{m-1}l.$$

$$... + S_{k-1}l \begin{vmatrix} x^{m-k} + .... + S_{m-1}l. \\ + S_{k-1}l \end{vmatrix} x^{m-k} + .... + S_{m-1}l.$$

- 1. Видимъ, что показатель буквы x въ первомъ числъ равенъ числу m перемножаемыхъ биномовъ, что въ слъдующихъ членахъ показатели буквы x идутъ, послъдовательно уменьшаясь на 1, до послъдняго члена, гдъ этотъ показатель есть nonъ, т. е. гдъ x не входитъ.
- 2. Изъ закона показателей прямо слъдуетъ, что число членовъ произведенія равно m+1, т. е. на единицу больше числа биномовъ.
  - 3. Коэффиціентъ перваго члена есть 1.

Коэф. втораго члена составленъ изъ суммы  $S_1$  вторыхъ членовъ первыхъ m-1 биномовъ, сложенной со вторымъ членомъ l m-го бинома; аслъд. онъ равенъ суммъ вторыхъ членовъ всъхъ m биномовъ.

Коэф. третьяго члена составляется изъ суммы  $S_2$  двойныхъ сочетаній вторыхъ членовъ m-1 первыхъ биномовъ, сложенной съ произведеніемъ  $S_1l$  суммы вторыхъ членовъ этихъ же m-1 биномовъ на второй членъ l последняго m-го бинома; другими словами, этотъ коэф. сеставленъ изъ суммы такихъ тройныхъ сочетаній m буквъ, въ которыя не входитъ l, + сумма тройныхъ сочетаній m буквъ, въ которыя входитъ l; а это даетъ полную сумму тройныхъ сочетаній изъ m буквъ.

Коэф. четвертаго члена равенъ суммъ  $S_3$  тройныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ первыхъ m-1 биномовъ, сложенной съ произведеніемъ  $S_2l$  суммы двойныхъ сочетаній тъхъ же буквъ на новую букву l введеннаго бинома; другими словами, этотъ коэф. составленъ изъ суммы тройныхъ сочетаній вторыхъ буквъ m биномовъ, сочетаній, не содержащихъ l, + сумма тройныхъ сочетаній изъ тъхъ же буквъ, но содержащихъ l; это даетъ полную сумму тройныхъ сочетаній m буквъ.

Вообще, коэф. при  $x^{m-k}$  или коэф. (k+1)-го члена составляется изъ суммы  $S_k$  сочетаній k-го порядка вторыхъ членовъ первыхъ m-1 биномовъ, + произведеніе  $S_{k-1}$ . l суммы сочетаній (k-1)-го порядка изъ тѣхъ же членовъ на второй членъ l новаго бинома; т. е. этотъ коэф. слагается изъ суммы сочетаній k-го пор. вторыхъ буквъ m биномовъ, сочетаній, не содержащихъ l, + сумма сочетаній k-го порядка изъ тѣхъ же буквъ, но содержащихъ l; это даетъ полную сумму k-хъ сочетаній m буквъ.

Наконецъ, такъ какъ  $S_{m-1}$  есть произведение вторыхъ членовъ m-1 первыхъ биномовъ, то  $S_{m-1}$  , l есть произведение вторыхъ членовъ m биномовъ.

Итакъ, законъ, допущенный для m-1 биномовъ, оказывается върнымъ и для произведенія, содержащаго однимъ биномомъ больше. Но мы непосред-

ственно доказали его для четырехъ биномовъ; слъд. онъ въренъ и для 5; будучи върнымъ для 5, въренъ и для 6 биномовъ, и т. д.; слъд. онъ въренъ для какого угодно числа биномовъ.

730. Формула бинома. Итакъ, имфемъ тождество:

$$(x+a)(x+b)(x+c)...(x+i)(x+l) = x^{m} + S_{1}x^{m-1} + S_{2}x^{m-2} + S_{3}x^{m-3} + ... + S_{k}x^{m-k} + ... + S_{m} \cdot ... \cdot ... \cdot (1)$$

нолагая, что число биномовъ есть т. Приэтомъ:

$$S_1 = a + b + c \dots + l;$$

$$S_2 = ab + ac + \dots + il;$$

$$S_3 = abc + abd + \dots + hil;$$

$$\vdots$$

$$S_k = abc \dots i + abc \dots l + \dots$$

$$\vdots$$

$$S_m = abcd \dots il.$$

Для вывода изъ этого тождества формулы бинома, т. е.  $(x+a)^m$ , стоитъ только положить, что во всёхъ m биномахъ вторые члены равны, т. е. что  $a=b=c=\ldots=i=l$ . Первая часть тождества обратится въ  $(x+a)^m$ .

Затъмъ, найдемъ, что:

$$S_1 = a + a + a + \ldots + a;$$

а какъ всёхъ слагаемыхъ здёсь m, то  $S_1 = ma$ .

 $S_2=a^2+a^2+a^2+\dots$  . . . .  $+a^2$ ; причемъ слагаемыхъ здёсь столько, сколько двойныхъ сочетаній изъ m элементовъ, т. е.  $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ ; слёд.  $S_2=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$  .  $a^2$ .

 $S_3 = a^3 + a^3 + \ldots + a^3$ ; причемъ  $a^3$  повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько есть тройныхъ сочетаній изъ m эдементовъ, т. е.  $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ ; такъ что  $S_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$   $a^3$ .

Вообще,  $S_k = a^k + a^k + \ldots + a^k$ ; причемъ слагаемымъ  $a^k$  берется столько разъ, сколько есть сочетаній k-го порядка изъ m элементовъ, т. е.  $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots (m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k};$  и слъд.  $S_k = \frac{m(m-1)\ldots (m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}.$   $a^k$ .

Наконецъ,  $S_m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot a$ , гдѣ a повторяется множителемъ m разъ; слъд.  $S_m = a^m$ .

Такимъ образомъ, тождество (1) беретъ видъ:

$$(x+a)^{m} = x^{m} + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{2}x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{3}x^{m-3} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} a^{k}x^{m-k} + \dots + a^{m}.$$

Это и есть знаменитая Ньютонова формула бинома; пока она доказана нами для случая возвышенія бинома въ какую угодно степень итлаго положительного порядка. Вторая часть ея называется разложеніемо первой.

- 731. Свойства формулы бинома. Формула бинома обладаетъ следующими замечательными свойствами:
- I. Члены ея расположены по убывающимъ степенямъ буквы x и по возастающимъ буквы a, причемъ показатели буквы x идутъ последовательно

уменьшаясь на 1, начиная отъ m и до нуля (въ послёднемъ членѣ), а показатели буквы и идутъ, послёдовательно увеличиваясь на 1, отъ 0 (въ первомъ членѣ) до m; сумма же показателей при x и a постоянна и равна, въ каждомъ членѣ, показателю m степени бинома.

II. Число членовъ равно m+1, т. е. единицею больше показателя бинома: это непосредственно видно изъ закона показателей.

III. Коэффиціенты бинома суть:

1, 
$$m$$
,  $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ ,  $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ,  $\cdots$ ,  $\frac{m(m-1)...(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k}$ , ...,  $m$ , 1,

т. в. коэффицієнть перваю члена равень 1, а коэффицієнты членовь, начиная со втораго, суть числа сочетаній изъ т элементовь порядка, равнаго числу предшествующихь членовь.

IV. Обыкновенно (k+1)-ый членъ, формула котораго есть

$$T_{k+1} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \cdot \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot (k-1)k} a^k x^{m-k},$$

называется общимъ членомъ разложенія, потому-что изъ него можно подучить всѣ члены разложенія, начиная со 2-го, полагая k равнымъ послѣдовательно  $1,2,3,4,\ldots,m$ . Въ самомъ дѣлѣ, полагая

k=1, находимъ  $T_2=\frac{m}{1}ax^{m-1}$ , а это есть второй членъ;

$$k=2$$
, «  $T_3=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2}$ , т. е. третій членъ;

$$k=3$$
,  $T_4=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3}$ , т. е. четвертый членъ;

$$k=m,$$
 с  $T_{m+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot \dots (m-1)\cdot m}a^mx^0=a^m,$  а это — послящий члень.

Такимъ образомъ для полученія изъ общаго члена — какого угодно члена разложенія нужно только положить k = числу членовъ, предшествующихъ опредъямемому.

V. Коэффиціенты членов крайних и равно—удаленных от крайних равны между собою.—Въ самомъ дѣлѣ, коэф-ты 1-го и послѣдняго члена равны 1. Затѣмъ, возьмемъ члены: k+1-й отъ начала и k+1-й отъ конца. По свойству III, коэффиціенть перваго изъ этихъ членовъ равенъ числу сочетаній k го порядка изъ m элементовъ, т. е.  $C_m^k$ . Замѣтивъ, что отъ послѣдняго до k+1-го члена отъ конца, включительно, имѣется k+1 членъ, а всѣхъ членовъ m+1, заключаемъ, что (k+1) му члену отъ конца предшествуетъ (m+1)-(k+1) или m-k членовъ, а потому его коэф., по пунк. III, равенъ  $C_m^{m-k}$ . Но мы знаемъ, что  $C_m^k=C_m^{m-k}$  (§ 721, I).

VI. Если показатель m есть число четное u=2p, то число членовъ разложенія будетъ нечетное 2p+1, n потому въ срединѣ разложенія будетъ коэофиціентъ не повторяющійся, съ объихъ сторонъ котораго коэффиціенты равны

и расположены въ обратномъ порядкъ. Очевидно, въ этомъ случаъ придется вычислить p+1 коэффиціентъ.

Если же показатель m есть число нечетное, напр. 2p+1, то число членовъ будетъ четное и =2p+2; коэффиціенты второй половины будутъ тѣже, что и въ первой, но расположены въ обратномъ порядкѣ, а въ средянѣ разложенія находятся рядомъ два равныхъ коэффиціента. Вычислить придется половину, (p+1), всѣхъ коэффиціентовъ.

VII. Вычисленіе членовъ разложенія следуєть вести по следующему правилу. Подставивъ въ формулу k+1-го члена

$$T_{k+1} = \frac{m(m-1)\cdot \cdot \cdot \cdot (m-k+2)(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdot \cdot \cdot (k-1)\cdot k} a^k x^{m-k} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

k-1 вмъсто k, на основаніи п. ІV, найдемъ к-ый членъ

$$\mathbf{T}_{k} = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)} a^{k-1} x^{m-k+1} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (2)$$

Раздъливъ (1) на (2), получимъ

$$\frac{\mathbf{T}_{k+1}}{\mathbf{T}_k} = \frac{m-k+1}{k} \times \frac{a}{x}$$
, откуда  $\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k \times \frac{m-k+1}{k} \times \frac{a}{x} \cdot \cdot \cdot (3)$ 

Итакъ: чтобы изъ k-10 члена вывести (k+1)-й членъ, надо коэффиціентъ k-10 помножить на показателя m-k+1 буквы x въ этомъ членъ и раздълить на число k членовъ, предшествующихъ опредъллемому; затъмъ показателя буквы a увеличить на 1, a показателя буквы x уменьшить на 1.

 $\Pi$  Римъры. 1) Pазложить  $(x+a)^7$ .

Число членовъ = 7+1=8; поэтому, вычисляемъ 4 коэффиціента, а для другой половины разложенія ставимъ тъже коэф-ты въ обратномъ порядкъ. Найдемъ, примъняя правило VII, первые четыре члена:  $x^7+7ax^6+\frac{7\cdot6}{2}a^2x^5$ 

$$+\frac{7}{2 \cdot 3}a^3x^4$$
, или  $x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4$ . Все разложение будетъ:  $(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7$ .

2) Разложить  $(x + a)^8$ .

Всёхъ членовъ 9; вычисляемъ 5 первыхъ:  $x^8 + 8ax^7 + \frac{8.7}{2}a^2x^6 + \frac{8.7}{2.3}a^3x^5 + \frac{8.7 \cdot 6.5}{2.3 \cdot 4}a^4x^4$ , или  $x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 + 70a^4x^4$ . Все разложение будетъ.

$$(x+a)^{8} = x^{8} + 8ax^{7} + 28a^{2}x^{6} + 56a^{3}x^{5} + 70a^{4}x^{4} + 56a^{5}x^{3} + 28a^{6}x^{2} + 8a^{7}x + a^{8}$$

VIII. — Коэффиціенты идуть увеличиваясь до средины разложенія, а затьмь уменьшаются.

Соотношеніе (3) пунк. VII показываеть, что коэффиціенть k+1-го члена нолучается изь коэф-та k-го члена умноженіемь на дробь  $\frac{m-k+1}{k}$  · Слъд., когда этоть множитель >1, коэффиціенть (k+1)-й будеть больше k-го; когда  $\frac{m-k+1}{k}$  будеть =1, оба коэф-та будуть равны; наконець, при  $\frac{m-k+1}{k} < 1$ ,

послѣдующій коэф-тъ будеть < предшествующаго. Опредѣленіе, при какихъ k множитель  $\frac{m-k+1}{k}$  будеть > 1, приводится къ рѣшенію, относительно k, неравенства

$$\frac{m-k+1}{k} > 1$$
, откуда, замъчая, что  $k > 0$ , имъемъ:  $k < \frac{m+1}{2} \dots$  (1)

Различаемъ два случая: m — число четное, m — нечетное.

Первый случай. — Пусть m число четное и =2p. Всёхъ членовъ въ разложении будетъ 2p+1; одинъ изъ нихъ занимаетъ среднее мёсто: тотъ, передъ которымъ находится p членовъ, и за которымъ слёдуетъ p членовъ, т. е. p+1-й. Подставявъ въ нер. (1) 2p вмёсто m, найдемъ

$$k$$

 $k = 0,1,2,3,\ldots,p$ : т. е. коэффиціенты возрастають отъ начала до p+1-го включительно, т. е. до *средня*ю, который и будеть *наибольшій*. Изъ п. У заключаемь, что дальнѣйшіе коэф-ты будуть идти уменьшаясь до конца разложенія. Итакъ, въ срединѣ разложенія находится одинъ членъ съ наибольшимъ коэффиціентомъ.

Второй случай. — Пусть m — число нечетное и =2p+1. Число членовъ разложенія будеть 2p+2, такъ что оно распадается на двъ половины по p+1 коэффиціенту въ каждой. Неравенство (1) даетъ

$$k$$

откуда слёдуеть, что для полученія возрастающихь коэффиціентовь надо давать k значенія  $0,1,2,\ldots,p$ ; т. е. коэффиціенты идуть возрастая въ первой половинь строки. Если затёмь дадимь k значеніе p+1, для вычисленія перваго коэф-та второй половины разложенія, то множитель  $\frac{m-k+1}{k}$  обратится въ 1; слёд. (p+2)-й коэф. = (p+1)-му (что слёдуеть и изъ пун.  $\gamma$ ).

Итакъ, при т нечетномъ, въ срединъ разложенія находятся два равные коэффиціента рядомъ, большіе остальныхъ.

IX. Сумма вспхъ поэффиціентово разложенія  $(x+a)^m$  всегда  $= 2^m$ . Въ самомъ дълъ, положивъ въ формулъ бинома x=a=1, замътимъ, что первая часть обратится въ  $2^m$ ; а во второй части всъ степени буквъ a и x обратятся въ 1, такъ-что въ этой части останется сумма коэффиціентовъ; именно:

$$2^{m} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + 1.$$

Примпианіе. Заметивъ, что коэффицівнты, начиная со втораго, суть числа сочетаній изъ т элементовъ порядковъ 1-го, 2-го, ..., т-го, и перенеся 1 въ первую часть, можемъ предыдущее равенство написать въ виде:

$$2^{m}-1=C_{m}^{1}+C_{m}^{2}+C_{m}^{3}+\ldots+C_{m}^{m}$$

Это значить, что подное число сочетаній изъ m элементовъ, порядковъ отъ 1-го до m-го, равно  $2^m$ —1.

Х. Раздоженіе  $(x-a)^m$  подучается изъ  $(x+a)^m$  подстановкою (-a) вмъсто a; такимъ образомъ

$$(x-a)^{m} = [x + (-a)]^{m} = x^{m} + m(-a)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(-a)^{2}x^{m-2} + \dots + (-a)^{m}$$

$$= x^{m} - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{3}x^{m-2} - \dots \pm a^{m} \dots (a).$$

Очевидно, всъ члены съ четными степенями (— a) дадутъ знакъ +, съ нечетными же знакъ -; поэтому знаки разложенія чередуются. Послъднему члену при m четномъ предшествуетъ (+), при m нечетномъ (-). Общій членъ будетъ

$$T_{k+1} = \pm \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} a^k x^{m-k},$$

гдѣ нужно брать знакъ + при k четномъ, и - при k нечетномъ. Но если замѣтимъ, что -a = -1.a, откуда  $(-a)^k = (-1)^k.a^k$ , и что это произведеніе само собою принимаетъ знакъ (+) при k четномъ и (-) при нечетномъ k, то, очевидно, цѣлесообразнѣе дать общему члену видъ

$$T_{k+1} = + (-1)^k \cdot \frac{m(m-1) \cdot \cdot \cdot \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot k} \cdot a^k x^{m-k},$$

подъ которымъ онъ самъ собою принимаетъ надлежащій знакъ соотвътственно всякому частному значенію k. — Подобно этому и послъднему члену  $\pm a^m$  цълесообразнъе дать видъ:  $+(--1)^m$ .  $a^m$ .

Такъ, общій членъ разложенія  $(1-x)^{\bullet}$  будеть

$$T_{k+1} = (-1)^k \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (10-k)}{1 \cdot 2} x^k.$$

XI. Если въ формулъ (а) положить x=a=1, то она дастъ

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

или, собравъ положительные члены въ одной части, а отриц. въ другой:

$$1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

т. в. сумма коэффиціентов нечетных мысть равна суммы коэффиціентов четных мысть.

arpiримъчанie. Написавъ пос**л**arpiднее равенство въ видarpi

$$1 + C_m^2 + C_m^4 + C_m^6 + \dots = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \dots$$

заключаемь: если изъ *m* предметовь составить сочетанія всёхъ порядковь отъ 1-го до *m*-го включительно, то число сочетаній, въ составъ которыхъ входить нечетное число предметовъ, единицею больше числа сочетаній четнаго порядка.

732. ПРИМЪРЪ. — Разложить  $(7a^2b - 3ab^2)^5$ .

Положивъ  $7a^2b = u$ ,  $3ab^2 = v$ , имбемъ:

$$(u-v)^5 = u^5 - 5vu^4 + \frac{5\cdot 4}{2}v^2u^3 - \frac{5\cdot 4}{2}v^3u^2 + 5v^4u - v^5.$$

Подставивъ витсто u и v ихъ величины и выполнивъ вс $\bar{s}$  вычисленія, найдемъ:

$$(7a^2b - 3ab^2)^5 = 16807a^{10}b^5 - 36015a^9b^6 + 30870a^8b^7 - 13230a^7b^8 + 2835a^6b^9 - 243a^5b^{10}$$

733. Степень полинома. Практическій пріємъ для разложенія степени полинома заключаєтся въ томъ, что въ выраженіи  $(a+b+c\dots)^m$  разсматривають  $b+c+\dots$  какъ одну букву, и но формулѣ бинома разлагають  $[a+(b+c+\dots)]^m$ . Въ разложеніе войдуть различныя степени  $(b+c+\dots)$ ; надъ этимъ выраженіемъ оперирують такимъ же точно образомъ, разсматривая  $(c+d+\dots)$  какъ одну букву; продолжая такимъ образомъ, получають требуемое разложеніе.

Отыщемъ общій членъ разложенія  $(a+b+c+d+\dots)^m$ . Положивъ  $b+c+d+\dots=x$ , имѣемъ  $(a+b+c+d+\dots)^m=(a+x)^m=(x+a)^m$ . Обозначивъ этотъ общій членъ буввою X, имѣемъ:

$$X = \frac{m(m-1)...(m-r+1)}{1.2.3...r} a^r x^{m-r}, \text{ finh } X = \frac{1.2.3...m}{1.2...(m-r)} a^r x^{m-r}.$$
 (1)

Здёсь 
$$x^{m-r} = (b+c+d...)^{m-r} = (b+y)^{m-r} = (y+b)^{m-r}$$
, полагая  $c+d+...=y$ .

Разложеніе  $(y+b)^{m-r}$  содержить m-r+1 членовь; назвавь общій члень его, содержащій  $a^{r'}$ , буквою У, можемь этому члену, согласно (1), дать видь

Подставивь въ (1) на мѣсто  $x^{m-r}$  общій члень У этого выраженія, найдемь

$$\mathbf{X} = \frac{1.2...m \cdot 1.2...(m-r)}{1.2...r \cdot 1.2...(m-r) \cdot 1.2....(m-r-r')} \cdot a^r b^{r\prime} y^{m-r-r\prime},$$

или, сокративъ коэффиціентъ на 1.2....(m-r):

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots m}{1 \cdot 2 \cdot \dots r \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots r' \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots (m - r - r')} \cdot a^r b^{r'} y^{m - r - r'} \cdot \dots \cdot (2)$$

Выраженіе это представляєть всё тів члены искомаго разложенія, которыя содержать  $a^r$  и  $b^{r'}$ . Въ немъ  $y^{m-r-r'}=(c+d+e+\dots)^{m-r-r'}=(z+e)^{m-r-r'}$ , полагая  $s=d+e+\dots$ 

Разложеніе  $(z-c)^{m-r-r'}$  им'веть m-r-r'+1 членовь; назвавь общій его члень, тоть, передь которымь находится r'' членовь, буквою Z, получимь

$$Z = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-r-r')}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r'' \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-r-r'-r'')} a^r b^{r} z^{m-r-r'-r''}.$$

Замъннъъ во (2) выражение  $y^{m-r-r'}$  его общимъ членомъ Z, имъемъ

$$\mathbf{X} = \frac{1.2...m \cdot 1.2...(m-r-r')}{1.2...r.1.2...r'.1.2...(m-r-r').1.2...r''.1.2...(m-r-r'-r'')} \cdot a^r b^{r'} c^{r''} z^{m-r-r'-r''}$$
 или, по сокращения:

$$\mathbf{X} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots r' \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots r'' \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots (m - r - r' - r'')} \ a^r b^{r'} c^{r''} z^{m - r - r' - r''}$$

Если бы полиномъ имѣлъ только 4 члена, то былъ бы z=d, и если обозначить m-r-r'-r'' буквою r''', то общій членъ разложенія  $(a+b+c+d)^m$  былъ бы

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots m}{1 \cdot 2 \cdot \dots r' \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots r'' \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots r'''} a^r b^{r'} c^{r''} d^{r''},$$

гдѣ r''' = m - r - r' - r'', нли r + r' + r'' + r''' = m.

Условивщись произведеніе 1.2...k принимать =1, когда k=0, можемь изъ X получить всё члены разложенія  $(a+b+c+d)^m$ , подставляя вмёсто r, r', r'', r''' послёдовательно всё положительныя цёлыя числа, удовлетворяющія условію r+r'+r''+r''=m.

Для полученія перваго члена, полагаемь r = m, и сльд. r' = r'' = r''' = 0, всльдствіе чего всь произведенія 1.2....r', 1.2....r'' и 1.2....r'' обратятся въ 1; найдемъ

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^m b^0 c^0 d^0 = a^m.$$

Желая найти члены, содержащіе  $a^{m-1}$ , нужно положить r=m-1 и слѣд. r'+r''+r'''=1. Приэтомъ получится столько членовъ, сколькими способами можно удовлетворить ур-нію r'+r''+r'''=1 цѣлыми положительными числами, со включеніемъ нуля. Очевидно этому ур-нію удовлетворимъ, полагая поочередно каждое слагаемое = 1, и приэтомъ каждое изъ остальныхъ двухъ равнымъ 0. Такимъ образомъ

1. При r = m - 1 беремъ r' = 1 и r'' = r''' = 0, что дасть

$$X = \frac{1 \quad 2 \cdot \dots m}{1 \cdot 2 \cdot \dots (m-1) \cdot 1 \cdot 1} a^{m-1} b^1 c^0 d^0 = m a^{m-1} b;$$

2. При r = m - 1 беремъ r'' = 1 и r' = r''' = 0, отвуда,

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots m}{1 \cdot 2 \cdot \dots (m-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-1} b^{0} c^{1} d^{0} = m a^{m-1} c;$$

3. Наконецъ, при r = m - 1, взявъ r'' = 1 п r' = r'' = 0, имѣемъ

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots m}{1 \cdot 2 \cdot \dots (m-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-1} b^{0} c^{0} d^{1} = m a^{m-1} d.$$

Желая найти члены, содержащіе  $a^{m-2}$ , должны въ общемъ членѣ положить r = m-2, и слѣд. r' + r'' + r''' = 2. Послѣднему ур-нію можно удовлетворить 6 способами:

- 1. r'=2 H r''=r'''=0;
- 2.  $r'' = 2 \pi r' = r''' = 0$ .
- 3.  $r''' = 2 \pi r' = r'' = 0$ .
- 4. r'=1, r''=1  $\pi$  r'''=0.
- 5.  $r' = r''' = 1 \pi r'' = 0$ .
- 6.  $r'' = r''' = 1 \pi r' = 0$ .

Такимъ образомъ найдемъ члены:

1. 
$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots m}{1 \cdot 2 \cdot \dots (m-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-2} b^2 c^0 d^0 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2.$$

2. 
$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} a^{m-2} b^{0} c^{2} d^{0} = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} c^{2}.$$

3. 
$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-2} b^{0} c^{0} d^{2} = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} d^{2}.$$

4. 
$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-2} b^{1} c^{1} d^{0} = m(m-1) a^{m-2} bc.$$

5. 
$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-1} b^1 c^0 d^1 = m(m-1) a^{m-2} b d.$$

6. 
$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots m}{1 \cdot 2 \cdot \dots (m-2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-2} b^{0} c^{1} d^{1} = m(m-1) a^{m-2} cd.$$

# Ариометическій треугольникъ Паскаля.

**734.** Возвысивъ биномъ a+b послѣдовательно въ степени нулевую, первую, въ квадратъ, въ вубъ, . . . , въ p-го степень, выпишемъ коэффиціенты этихъ

	— разложеній въ горизон-
1. $(a+b)^0$ 1 2. $(a+b)^1$ 1.1	тальныя строки. Полу- чится таблица, содержа- щая въ строкъ нумера
3. $(a+b)^2$ 1.2.1 4. $(a+b)^3$ 1.3.3.1 5. $(a+b)^4$ 1.4.6.4.1	$(p\!+\!\!-\!\!\!-\!\!\!\!-\!\!\!\!-\!\!\!\!-\!\!\!\!\!-\!\!\!\!\!\!\!\!\!$
6. $(a+b)^5$ 1.5.10.10.5.1	Числа этой таблицы составляють аривмети- ческій треугольникь Пас- каля; они обладають раз-
$(p+1)$ $(a+b)^p$ 1. $C_p^1$ . $C_p^2$ . $C_p^3$ $C_p^p$	-
1 manton i manoon de dimparontinons	

I. Первое свойство: Число, находящееся въ m-й горизонтальной строко и въ k-й вертикальной колонню, равно

$$\frac{(m-1)(m-2)...(m-k+1)}{1.2.3...(k-1)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по самому построенію Паскалева треугольника, числа m-й строки суть числа сочетаній изъ m-1 элементовъ всѣхъ порядковъ отъ 1 до m-1-го, причемъ въ k-й колониѣ этой строки стоитъ число сочетаній k-1-го порядка; слѣд. разсматриваемо число есть  $C {k-1 \atop m-1}$  или  $(m-1)(m-2)\ldots (m-k+1) \atop 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (k-1)$ .

*Примпчаніе*. Когда k>m, формула  $\operatorname{C}^k_m$  не имфетъ смысла; но можно условиться, что въ этомъ случат  $\operatorname{C}^k_m=0$ .

И. Второв свойство. Если взять въ Паскалевомъ треугольникъ три числа А, В, Н, расположенныя такъ,

что A находится непосредственно влюво от B, a H непосредственно внизг от B, то H = A + B.

Въ самомъ дътъ, если  $A = C_p^q$ , то  $B = C_p^{q+1}$ ,  $H = C_{p+1}^{q+1}$ ; но мы знаемъ(§721, II), что  $C_{p+1}^{q+1} = C_p^q + C_p^{q+1}$ ; саъд. H = A + B.

III. ТРЕТЬЕ СВОЙСТВО. Если взять дви послидовательныя колонны Паскалева треугольника I B B' C C' . . . . K K' L L'

то U=1+A+B+C+...+K+L, т. е. сумма п первых чисель порядка р равна n-my числу порядка p+1.

Въ самомъ дълъ, по второму свойству имъемъ:

$$U = L + L', L' = K' + K, \dots, C' = B' + B, B' = 1 + A;$$
 складывая и упроцая, находимъ

$$U = 1 + A + B + \dots K + L$$

Примичаніе. Числа одной и той же волонны Паскалева треугольника встрѣчаются въ нѣкоторыхъ вопросахъ анализа. Ихъ называють фигурными числами. Числа n+1-й колоны называются фигурными числами n-го порядка. Такимъ образомъчисла 2-й колонны:  $1, 2, 3, \ldots$  суть фигурныя числа 1-го порядка; ихъ называютъ также натуральными. Числа 3-й колонны  $1, 3, 6, 10 \ldots$  т. е. фигурныя числа 2-го порядка называють треугольными, такъ какъ ихъ числа единицъ можно расположить треугольниками:

ит. д.

Числа четвертой колонны 1, 4, 10, . . . . или 3-го порядка называють *пира-мидальными*, ибо они выражають числа точекъ, которыя можно расположить въ трегранномъ углъ на параллельныхъ плоскостяхъ. Числа интой колонны или 4-го порядка называются *треугольно-треугольными*.

735. Приложеніе. Найти число сочетаній съ повтореніями изъ т буквъ р-го порядка.

$$a+b+c+d+...$$
 $a+b+c+d+...$ 
 $aa+bb+cc+dd+...$ 
 $+ab+bc+cd+dd+...$ 
 $+abb+bcc+dd+...$ 
 $+abb+acc+bdd+...$ 
 $+bbc+add$ 
 $+abc+ccd$ 
 $+acd+bbd$ 
 $+add+acd+bdd$ 
 $+add+acd+bdd$ 
 $+add+acd+bdd$ 
 $+add+acd+bdd$ 
 $+add+acd+bdd$ 
 $+add+acd+bdd$ 
 $+add+acd+bdd$ 
 $+add+acd+bdd$ 
 $+add+add$ 
 $+add+add$ 
 $+add+add$ 
 $+add$ 

Для составленія сочетаній множимь  $a+b+c+\ldots$  самого на себя нѣскольво разь, причемь за множимое принимаемь только члены, находящієся надъ членомъ множителя и лѣвѣе его. Такимъ образомъ, въ послѣдовательныхъ произведеніяхъ получимъ сочетанія съ повтореніями 2-го, 3-го, и т. д. порядковъ.

Каждый столбецъ любаго произведения содержить столько членовъ, сколько ихъ находится въ верхнемъ столбцѣ и въ столбцахъ съ лѣвой стороны предыдущаго произведения. Такимъ образомъ изъ способа составления произведений видно, что если 1, а, β, γ, . . . . суть числа членовъ въ столбцахъ какого-либо произведения, то числа членовъ въ столбцахъ слѣдующаго

произведенія будуть  $1,1+\alpha,1+\alpha+\beta,1+\alpha+\beta+\gamma,\ldots$ ; а это есть рядь чисель, выводимых в изъ предыдущаго по закону фигурных чисель. Такъ для сочетаній 2-го порядка последовательные столбцы содержать 1, 2, 3, . . . . членовь, или рядь фигурных чисель перваго порядка; для сочетаній по 3 столбцы содержать 1, 3, 6,  $10,\ldots$  членовь, или рядь фигурных чисель втораго порядка. Вообще для сочетаній по p числа членовь въ столбцахъ представляють рядь фигурных чисель p-1-го порядка. Полное число сочетаній или членовь всего произведенія есть сумма ряда, доведеннаго до стольких столбцовь, сколько дано буквь. Поэтому, чтобы найти число сочетаній изъ m буквь по p., нужно взять сумму m фигурных чисель p-1-го порядка, или, по свойству III, m-ое фигурное число p-го порядка. Фигурныя числа p-го порядка находятся въ (p+1)-мь столбць, который начинается съ (p+1)-й строки. Начиная съ этой строки надо спуститься на m строкь, получимь (p+m)-ко строку, въ которой беремь p+1-й члень. Этоть члень будеть (§ 734, Св. I).

$$\frac{(m+p-1)(m+p-2)\ldots m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots p}$$

Такимъ образомъ находимъ прежде доказанную формулу для числа сочетаній съ повтореніями.

736. Примъчаніе. Теоріей соединеній занимались уже индійскіе математики; въ алгебрѣ Баскары раны праввльныя формулы для опредѣленія числа различныхъ соединеній. Ариеметическій треугольникъ былъ извѣстенъ уже китайскимъ математикомъ XI столѣтія, а затѣмъ вновь найденъ былъ Паскалемъ въ XVII столѣтіи. Формула бинома дана Ньютономъ въ 1676 году. Она вырѣзана на гробницѣ Ньютона въ Вестминстерскомъ аббатствѣ.

#### 737. Задачи.

- 1. Найти патый членъ разложенія  $(a^5-2b^4)^{13}$ .
- 2. Найти восьмой и девятый члены разложенія  $(rac{2x^2}{y^3} + rac{y^2 z}{4})^{13}$  .
- 3. Pasiomete  $(2-i)^6$ .
- 4. Найти шестой члень разложенія  $(a + bi)^{16}$ .
- 5. Найти коэффиціенть при  $ab^3c^5$  въ разложеніи  $(a+b+c)^9$ .
- 6. Найти средніе члены разложенія  $(5a-2b)^{19}$ .
- 7. Показать, что средній члень разложенія  $(1+x)^{2n}$  равень

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot 2^{n} x^{n}.$$

- 8. Найти коэффиціенть при  $x^{2r+1}$  въ разложеніи  $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ .
- 9. Найти r-й членъ отъ начала, r-й членъ отъ конца и средній членъ разложенія  $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{3n}$ .
- 10. Доказать, что разность между коэффиціентами при  $x^{r+1}$  и  $x^r$  въ разложеніи  $(1+x)^{n+1}$  равна разности между коэффиціентами при  $x^{r+1}$  и  $x^{r-1}$  въ разложеніи  $(1+x)^n$ .

# отдълъ пятый.

# теорія рядовъ и логариомовъ.

#### ГЛАВА XLIV.

Прогрессія ариометическая.—Общій членъ.—Сумма членовъ.—Вставка среднихъ ариометическихъ. — Безконечная прогрессія. — Опредёленіе суммы одинаковыхъ степеней членовъ ариометической прогрессіи. — Задачи.

- 738. Опредъленіе. Ариеметической прогрессіей наз. рядъ чисель, изъ которыхъ каждое получается изъ предыдущаго прибавленіемъ постояннаго, положительнаго или отрицательнаго, количества, называемаго разностью прогрессіи. Очевидно, что когда разность положительна, члены будутъ возрастать, и прогрессія наз. возрастающею; когда разность отрицательна, члены идутъ уменьшаясь, и прогрессія наз. убывающею. Слово прогрессія обозначается знакомъ

  —; члены прогрессіи отдѣляются одинъ отъ другаго точкою. Такъ:
- -5.8.11.14.17... есть прогрессія возрастающая; разность ея = 3.
- $\div 5.2. -1. -4. -7...$  есть прогр. убывающая; разность ея = -3.

Для полученія разности надо изъ какого-ниб. члена вычесть предшествующій. Когда число членовъ прогрессіи ограниченное, она наз. конечною; при неограниченномъ числѣ членовъ—безконечною.

739. Каждые три смежные члена арием. прогрессіи составляють непрерывную ариеметическую пропорцію. Пусть дана прогрессія въ общемъ видѣ

-a. b. c. d. e. . . . , a разность ен r.

По опредъленію прогрессіи: c-b=r и d-c=r, откуда

$$d-c=c-b$$
:

смежные члены b,c,d составляють непрерывную ариометическую пропорцію.

740. Теорема. Общий членъ.—п-й членъ прогрессіи называется общимъ членомъ. Пусть дана прогрессія

 $-a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot r \cdot s \cdot t \cdot u \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot (1)$ 

въ которой u есть n-й членъ, а разность— $\delta$ . Но опредъленію прогрессіи имѣемъ:  $b=a+\delta$ ,  $c=b+\delta$ ,  $d=c+\delta$ , . . . ,  $s=r+\delta$ ,  $t=s+\delta$ ,  $u=t+\delta$ . Складывая эти равенства, находимъ:

 $b+c+d+\dots+s+t+u=a+b+c+\dots+r+s+t+(n-1)\delta;$  н отнявь оть объихъ частей по  $b+c+\dots+s+t$ , получаемъ:

$$u=a+(n-1)\delta$$
.

Итакъ: общій члент прогрессіи равент первому, сложенному ст разностью, помноженною на число предшествующих членовъ.

Примвры: 1. Найти двадцатый члень прогрессіи.

$$\div$$
 7.3.—1...

Здёсь a=7,  $\delta=-4$ , n=20. Слёд.  $u=7+(20-1)\cdot (-4)=7+19\cdot (-4)=-69$ .

2. Найти величину п-го нечётного числа.

Нечетныя числа образують арием. прогрессію, въ которой a=1,  $\delta=2$ ; слъд. n-е нечетное число =1+(n-1) . 2=2n-1.

3. Пространства, проходимыя свободно-падающимъ тъломъ въ первую, вторую, . . . . секунду, образуютъ аривметич. прогр., первый членъ которой  $=\frac{1}{2}g$ , а разность =g. Найти пространство, пробъгаемое въ п-ю секунду?

Это пространство 
$$=\frac{1}{2}g+(n-1)g=(2n-1)\cdot \frac{g}{2}$$

741. ТЕОРЕМА. Во всякой конечной аривметической прогрессіи сумма крайних членовь равна суммь двух других, равноудаленных от крайних.

Пусть имжемъ прогрессію объ п членахъ:

$$\dot{a}$$
 a.b.c.d...x...y...k.r.t.u,

разность которой  $= \delta$ ; пусть, кром' того, членъ x им' того передъ собою p членовъ, и пусть p членовъ сл' дуютъ за y. По формул' тобщаго члена им' темъ:

Написавъ прогрессію въ обратномъ порядкъ:

$$\vdots$$
  $u.t.r.k...y...x...d.c.b.a$ ,

замѣчаемъ, что ея разность будетъ (—  $\delta$ ); въ ней передъ членомъ y находится p членовъ, и потому

$$y=u+p.(-\delta)...$$
 (2)

Спладывая равенства (1) и (2), получаемъ:

$$x+y=a+u$$
.

IIримъчаніе. Можно бы было членъ y выразить и изъ начальной прогрессіи, принявъ въ ней y за первый членъ; въ такомъ случав члену u пред-

шествовало бы p членовъ, и потому  $u=y+p\delta$ , откуда:  $y=u-p\delta$ , выраженіе, одинаковое съ (2).

742. ТЕОРЕМА. Сумма членов конечной аривметической прогрессии равна полусуммъ крайних, помноженной на число членов.

Взявъ прогрессію -a.b.c.d. . . . . . . . . . . . . . . . . и объ n членахъ, и назвавъ ен сумму буквою S, имъемъ

$$S = a + b + c + d + \dots + h + k + i + u + \dots + (1)$$

Написавъ слагаемыя въ обратномъ порядкъ, имъемъ:

$$S = u + i + k + h + \dots + d + c + b + a \dots$$
 (2)

Спладывая (1) съ (2), получаемъ:

$$2S = (a+u) + (b+i) + (c+k) + (d+h) + \dots + (h+d) + (k+c) + (i+b) + (u+a).$$

Во вторыхъ, третьихъ и т. д. скобкахъ имѣемъ суммы членовъ, равноотстоящихъ отъ крайнихъ; по предыдущей теоремѣ, каждая такая сумма=(a+u), слъд. вторая часть равенства содержитъ слагаемое (a+u), повторенное n разъ, а потому

$$2S = (a + u) \cdot n$$
, otryga  $S = \frac{(a+u) \cdot n}{2}$ .

IIримпианіе. Подставивъ вмѣсто и выраженіе  $a+(n-1)\delta$ , можемъ этой формулѣ дать видъ

$$S = \frac{2a + (n-1) \cdot \delta}{2} \cdot n$$
.

Примъры: І. Найти сумму п первых натуральных чисел. Эти числа образують прогрессію  $\div$  1.2.3... (n-1). n, въ которой первый члень =1, разность =1, число членовъ =n; а потому

$$S = \frac{(1+n) \cdot n}{2}.$$

II. Найти сумму первых п нечетных чисель.

Выше мы видъли, что n-ое нечетное число =2n-1; потому вопросъ приводится къ нахожденію суммы членовъ прогрессіи

$$-1.3.5...(2n-1),$$

въ которой первый членъ =1, разность =2, последній членъ =2n-1, число членовъ =n. Такимъ образомъ

$$S = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$$
.

Итакъ: сумма п первыхъ нечетныхъ чиселъ равна квадрату числа этихъ чиселъ.

Донажемъ, что обратно: если сумма членовъ аривметической прогрессіи равна квадрату числа этихъ членовъ, каково бы оно ни было, то прогрессія есть рядъ нечетныхъ чиселъ.

Въ самомъ дълъ, каково бы ни было п, должно быть

$$\frac{2u+(n-1)\hat{\sigma}}{2} \cdot n = u^2,$$

нли, располагая по степенямъ n:

$$(2-\delta)n^2+(\delta-2a)n=0.$$

Такъ какъ полиномъ первой части долженъ быть тождественно равенъ нулю, то должны имъть:

$$2-\hat{\delta}=0$$
 if  $\delta-2a=0$ , otryge  $\delta=2$ ,  $2a=\hat{\delta}$ ;

nlu:

$$a=1$$
 и  $\delta=2$ , т. е. рядъ будетъ  $\div 1.3 5.7...$ 

#### 743. Вставка среднихъ ариометическихъ между двумя данными числами.

Между двуми данными числами a и b вставить m среднихъ ариеметическихъ значитъ составить ариеметическую прогрессію объ m+2 членахъ, которой a и b были бы крайними членами. Очевидно, вопросъ приводится къ нахожденію разности  $\delta$  прогрессіи. Такъ какъ члену b предшествуєтъ m+1 членовъ, то

$$b = a + (m+1)$$
.  $\delta$ , откуда  $\ddot{c} = \frac{b-a}{m+1}$ .

Такимъ образомъ прогрессія будетъ

$$-a \cdot \left(a + \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot \left(a+2 \cdot \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot \left(a+3 \cdot \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(a+m \frac{b-a}{m+1}\right) \cdot b.$$

Примъръ. Между 5 и 32 вставить 8 средних аривметических.

Разность будеть  $\frac{32-5}{9}$ , пли 3; слъд. имъемъ прогрессію:

$$\div$$
 5 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 . 32.

744. Теорема.—Если въ прогрессіи  $\div$  а . b . c . d . . . . r . t . и между каждымъ членомъ и слъдующимъ вставить одинаковое число т среднихъ аривметическихъ, то данные члены вмъстъ съ вставленными составять одну сплошную прогрессію

$$\stackrel{\cdot}{\longrightarrow} a.\alpha.\beta...\lambda.b.\alpha'.\beta'...\lambda'.c.\alpha''.\beta''...\lambda''.d...t.\alpha^{(n)}.\beta^{(n)}...\lambda^{(n)}.u.$$

Въ самомъ дълъ, вет частныя прогрессія, такимъ образомъ составленныя  $-a.a.\beta...\lambda.b; -b.a'.\beta'...\lambda'.c; ... t.a^{(n)}.\beta^{(n)}...\lambda^{(n)}.u$ 

последовательно имеють разности

$$\frac{b-a}{m+1}$$
,  $\frac{c-b}{m+1}$ ,  $\frac{d-c}{m+1}$ ,  $\dots$   $\frac{u-t}{m+1}$ ;

745. Теорема.—Во всякой безконечной возрастающей аривметической прогрессіи члены приближаются къ  $+\infty$ , а въ убывающей къ  $-\infty$ .

1. Если буквою и обозначимь n-й членъ, то требуется доказать, что всегда можно найти такое цълое число n, что и будеть больше всякаго произвольно взятаго количества M, т. е. что для n всегда можно найти цълое значеніе, удовлетворяющее неравенству:  $\alpha + \delta(n-1) > M$ . . . (1). Въ самомъ дълъ, перенеся  $\alpha$  во вторую часть и дъля на положит. число  $\delta$ , имъемъ

$$n-1>rac{\mathrm{M}-a}{\delta},$$
 откуда  $n>1+rac{\mathrm{M}-a}{\delta}.$ 

Каково бы ни было M, всегда  $\frac{M-a}{\delta}$  можно выразить цёлымъ или дробнымъ числомъ; найдя цёлую часть формулы  $1+\frac{M-a}{\delta}$  и взявъ для n цёлое число, большее ея, тёмъ самымъ удовлетворимъ неравенству (1).

 $\Pi$ Римвръ. — Съ какого мъста члены прогрессіи  $\div$  5 . 8 . 11 . . . . . становятся больше 10000?

По предыдущему должно быть  $n>1+\frac{10000-5}{3}$ , или  $n>3332\,\frac{2}{3}$ ; слёд. члены становятся больше 10000, начиная съ 3333-го.

2. Если прогрессія будеть убывающая, т. е.  $\delta < 0$ , то всегда можно найти въ прогрессіи такой члень u, который быль бы меньше произвольно взятой величины M, т. е, всегда можно найти цълое число n, удовлетворяющее неравенству  $a+(n-1)\delta < M$ . Въ самомъ дълъ, неравенство даеть  $(n-1)\delta < M-a$ , откуда, раздъливъ на  $\delta$  и перемънивъ смыслъ неравенства, имъемъ

$$n-1>rac{\mathrm{M}-a}{\delta},$$
 а отсюда  $n>1+rac{\mathrm{M}-a}{\delta}.$ 

Взявъ для n цёлое число, большее  $1 + \frac{\mathbf{M} - a}{\delta}$ , удовлетворимъ неравенству.

746. Рѣшеніе нѣноторыхъ задачъ, относящихся нъ ариеметическимъ прогрессіямъ.

Во всякой ариеметической прогрессім фигурируєть 5 количествь  $a, u, \delta, n, s$ , связанных в двумя уравненіями:

$$u = a + (n-1) \cdot \delta \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$
  $s = \frac{(a+u)n}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$ 

Слъдовательно, всегда можно найти два изъ этихъ количествъ, когда остальным три будутъ даны; а потому можно предложить столько различныхъ вадачъ, сколько существуетъ сочетаній изъ пяти элементовъ по два, т. е.  $C_5^2$  или 10 задачъ. Эти сочетанія суть: au,  $a\delta$ ,  $an_s$ , as,  $u\delta_s$ -un, us,  $\delta n$ ,  $\delta s$ , ns; а слъд. задачь таковы:

	Данныя.	Искомыя.
1.	$a, \delta, n$	u, s
2.	$u, \delta, n$	a, s
3.	a, u, n	$\delta$ , $s$
4.	$a, u, \delta$	u, s
5.	$s, \delta, n$	a, u
6.	s, u, n	a, \$

7. 
$$s, a, n$$
  $u, \delta$   
8.  $s, u, \delta$   $a, n$   
9.  $s, a, \delta$   $u, n$   
10.  $s, a, u$   $\delta, n$ .

Изъ числа этихъ задачъ только 8-я и 9-я приводятъ къ квадратному ур-нію, остальныя ръшаются ур-ми 1-й степени.

747. ЗАДАЧА І. Сколько нужно взять членовь въ аривметической прогрессіи, которой 1-й членъ есть 16, а разность 8, чтобы сумма членовъ составила 1840?

Имъемъ ур-нія

$$u = 16 + (n-1)$$
. 8 m  $1840 = \frac{(16+u)n}{2}$ .

Исключая изъ этихъ ур-ній и, находимъ ур-ніе

(1) 
$$1840 = \frac{[2.16 + (n-1).8]n}{2}, \quad \text{или} \quad n^3 + 3n - 460 = 0.$$

Ръшая это ур-ніе, находимъ корни: n'=20, n''=-23. Заключаемъ, что нужно взять 20 членовъ. Прогрессія будетъ

 $\div$  16.24.32.40.48.56.64.72.80.88.96.104.112.120.128.136.144.152.160.168.

0 трицательный корень. — Подставивь въ ур. (1) — n вибсто n, получимъ:

$$1840 = \frac{[2 \cdot 16 - (n+1)8] \cdot -n}{2}, \quad \text{или} \quad 1840 = \frac{[2 \cdot (-16) + (n+1) \cdot 8]n}{2}, \quad \text{или}$$

$$1840 = \frac{[2 \cdot (-8) + (n-1) \cdot 8]n}{2},$$

ур·ніе, положительный корень котораго = 23. Заключаемъ, что, взявъ первымъ членомъ прогрессіп (— 8) вмъсто 16, разность сохранивъ ту-же, и число членовъ увеличивъ на 3, получимъ сумму, равную 1840. И дъйствительно, сумма 23 членовъ прогрессіи

$$-8.0.8.16.24.....168$$

равна 1840, ибо эта прогрессія сравнительно съ предъидущей имъетъ три лишнихъ члена: — 8,0 и +8, дающихъ въ сумиъ 0, и остальные члены—тъже, что и въ предъидущемъ рядъ.

748. ЗАДАЧА II.—Изъ A выпъзмаетъ курьеръ и пропъзмаетъ въ первый день 10 миль, a въ каждый слодующій  $\frac{1}{4}$ -ью мили больше. Спустя 3 дня, другой курьеръ, юдущій по тому же пути какъ и первый, выпъзжаетъ изъ города B, расположеннаго передъ городомъ A, въ 40 миляхъ отъ послодняго. Онъ пропъзжаетъ въ первый день 7 миль, a въ каждый слъдующій день  $\frac{2}{3}$  мили болье. Черезъ сколько дней посль выпъзда перваго оба курьера встрътятся?

P в ш е и і е Ш т у р м а. — Пусть искомое число дней будеть x. Путь, пройденный 1-мъ курьеромъ, есть сумма членовъ арием. прогр., которой крайніе

члены суть 10 и 10  $+\frac{x-1}{4}$ , т. е.  $\left(20+\frac{x-1}{4}\right)\cdot\frac{x}{2}$ , или  $\frac{(79+x)x}{8}$ . Второй курьеръ находится въ дорогъ, до встръчи съ первымъ, x-3 дня, и про-тажаетъ  $\left[14+\frac{(x-4)\cdot 2}{3}\right]\cdot\frac{x-3}{2}$ , или  $\frac{(17+x)(x-3)}{3}$  миль.

Ур-ніе задачи есть

(1) 
$$\frac{(79+x)x}{8} - \frac{(17+x)(x-3)}{3} - 40 = 0$$
, или (2)  $5x^2 - 125x + 552 = 0$ . Рёмивъ ур-ніе, найдемъ:  $x' = 5.72 \dots$ ,  $x'' = 19.27 \dots$ .

Но, приводя задачу къ ур-нію, мы предполагали, что x — число цѣлое; сл. найденныя рѣшенія не отвѣчаютъ на предложенный вопросъ. Тѣмъ не менѣе, можно показать, что цѣлыя части 5 и 19 корней означаютъ, что были двѣ встрѣчи, первая по истеченіи 5, вторая 19-ти дней.

Во-первыхъ замѣтимъ, что если буквою  $\alpha$  обозначить путь, сдѣданный первымъ куръеромъ, и буквою  $\beta$  — пусть, пройденный вторымъ, увеличенный на 40 миль, полагая, что первый курьеръ находится въ пути цѣлое число x, а второй — цѣлое число x—  $\beta$  дней, то имѣемъ тождественно

(3) 
$$5x^2 - 125x + 552 = 24 (\beta - \alpha)$$
.

Это, очевидно, слъдуетъ изъ того, что ур. (2) было выведено изъ (1) перемъною знаковъ у всъхъ членовъ и умножениемъ ихъ на 24.

Подставимъ теперь въ 1-ую часть ур. (2) вмёсто x сперва 5, потомъ 6; такъ какъ меньшій корень 5.72 . . . . содержится между этими числами, то результать первой подстановки будеть положительный, второй — отрицательный. Но въ силу тождества (3), разность  $\beta - \alpha$  всегда имёсть одинаковый знакъ съ триномомъ  $5x^2 - 125x + 552$ ; слёд. въ концё пятаго дня  $\alpha < \beta$ , а въ концё шестаго  $\beta < \alpha$ . Итакъ, перван встрёча, какъ и было сказано, имёла мёсто между пятымъ и шестымъ днемъ. Подобнымъ образомъ докажемъ, что вторая встрёча имёла мёсто черезъ 19 дней. Возможность этой второй встрёчи легко понять, ибо второй курьеръ, увеличивая свою скорость болёе перваго, встрётитъ его, будучи сначала перегнанъ первымъ. Это подтверждается изслёдованіемъ, въ концё сколькихъ дней оба курьера имёютъ одинаковую скорость: найдемъ число дней 13, содержащееся между 5 и 19.

Можно, далже, опреджлить дроби, которыя слждуеть придать къ числамъ 5 и 19, для нахожденія точнаго времени встркчь, предполагая, что скорость курьеровь не изміняется въ теченіи цілаго дня. Опредвлимъ, напр., время второй встрічи.

Чтобы найти промежутовъ, раздѣляющій курьеровъ по истеченіи 19 дней, достаточно, въ силу тождества (3), подставить въ первую часть ур. (2) 19 вмѣсто x и раздѣлить результатъ на 24. Найдемъ  $\left(-\frac{3}{4}\right)$ ; знакъ (—) показываетъ, что въ началѣ 19-го дня курьеръ В не догналъ еще курьера А. Но скорости А и В въ теченіи 19 го дня суть  $10+\frac{18}{4}$  и  $7+\frac{15\times2}{3}$ , или  $\frac{29}{2}$  и 17; слѣд. если обозначимъ буквою y искомую часть дня, то для опредѣленія y получимъ

ур-ніе  $17y = \frac{3}{4} + \frac{29}{2}y$ , откуда y = 0.3; сявд. вторая встрвча имвла мвсто въ концв  $19^{8}.3$ .

749. ЗАДАЧА III. — Въ двухъ аривметическихъ прогрессіяхъ

$$-2.5.8.11...$$
  $\pi -3.7.11.15...$ 

заключающих, каждая, по 100 членов, сколько находится общих членовь? Членъ порядка x въ первой прогрессіи есть 2+3(x-1), или 3x-1; членъ порядка y во второй равенъ 3+4(y-1), или 4y-1; чтобы эти члены были равны, необходнио, чтобы было 3x=4y. Вопросъ приводится къ нахожденію цёлыхъ положительныхъ рёшеній, меньшихъ 100, удовлетворяющихъ неопредёленному ур-нію 3x=4y. Выводя изъ него x, находимъ  $x=y+\frac{1}{3}y$ ; слёд.  $\frac{y}{3}$  должно равняться нёкоторому цёлому k, откуда y=3k, и слёд. x=4k. Но какъ x должно быть не болёе 100, то k можетъ получать только значенія:

1,2,3,..., 25. Закиючаемъ, что объ прогрессін содержать 25 общихъ членовъ. 750. Задача IV. — Найти условіє, необходимоє и достаточноє для того, чтобы три данныя числа A,B,C были членами порядка т,p,q одной

и той же ариометической прогрессии. Обозначая буквами x и y первый члень и разность прогрессии, о которой

говорится въ условія, необходимо и достаточно, чтобы ур-нія
$$A = x + (m-1)y, \quad B = x + (p-1)y, \quad C = x + (q-1)y$$

удовлетворялись одними и тъми же значеніями x и y; другими словами, искомое условіе есть результать исключенія x и y изъ этихъ трехъ ур-ній. Имъемъ

$$A - B = (m - p)y$$
,  $B - C = (p - q)y$ ,

а исключивъ у, найдемъ

$$(A - B)(p - q) = (B - C)(m - p)$$
, when  $(p - q)A + (q - m)B + (m - p)C = 0$ : это и есть искомое условіе.

751. Задача V. — Найти сумму одинаковых степеней членовъ аривметической прогрессіи.

Пусть имѣемъ прогрессію  $\stackrel{\cdot}{\longrightarrow} a.b.c.d...k.l$ , разность которой  $\stackrel{\cdot}{\Longrightarrow} \delta$ , и число членовъ n+1, и пусть требуется найти сумму m-хъ степеней ея членовъ. — По свойству прогрессіи ниѣемъ:

$$b=a+\delta$$
,  $c=b+\delta$ ,  $d=c+\delta$ , ...,  $l=k+\delta$ .

Возвышая всё эти равенства въ m + 1-ю степень, по формулё бинома Ньютона имъемъ:

$$b^{m+1} = (a+\delta)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m\delta + \frac{(m+1) \cdot m}{1 \cdot 2}a^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-2}\delta^3 + \dots + \delta^{m+1}$$

$$c^{m+1} = (b+\delta)^{m+1} = b^{m+1} + \frac{(m+1)b^m\delta + \frac{(m+1) \cdot m}{1 \cdot 2}b^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^{m-2}\delta^3 + \dots + \delta^{m+1}$$

$$d^{m+1} = (c+\delta)^{m+1} = c^{m+1} + (m+1)c^m\delta + \frac{(m+1) \cdot m}{1 \cdot 2}c^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}c^{m-2}\delta^3 + \dots + \delta^{m+1}$$

$$l^{m+1} = (k+\delta)^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m\delta + \frac{(m+1) \cdot m}{1 \cdot 2}k^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^{m-2}\delta^3 + \dots + \delta^{m+1}$$

Складывая эти равенства, замѣчая при этомъ, что члены  $b^{m+1}$ ,  $c^{m+1}$ ,  $d^{m+1}$ , ...,  $k^{m+1}$  общіе объимъ частямъ, взанино уничтожаются, и полагая для краткости  $a^m + b^m + c^m + \ldots + k^m = S_m$ ;  $a^{m-1} + b^{m-1} + \ldots + k^{m-1} = S_{m-1}$ ;  $a^{m-2} + b^{m-2} + \ldots + k^{m-2} = S_{m-2}$ ; ...;  $a + b + c + \ldots + k = S_1$ , найдемъ

$$l^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)\delta \cdot S_m + \frac{(m+1)m}{1-2}\delta^2 \cdot S_{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1-2}\delta^3 \cdot S_{m-2} + \dots + (m+1)\delta \cdot S_1 + n\delta^{m+1} \cdot (1)$$

Выражая отсюда S,, находимъ:

$$S_{m} = \frac{l^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\delta} - \frac{m}{2} \cdot \delta \cdot S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3} \delta^{2} \cdot S_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \delta^{3} \cdot S_{m-3} - \dots - S_{1} - \frac{n}{m+1} \delta \cdot \dots (2)$$

Помощію этой формулы можно найти  $S_m$ , если будуть изв'єстны суммы  $S_{m-1}$ ,  $S_{m-2}$ , . . . ,  $S_1$ . Прилагая эту формулу, нужно помнить, что число членовъ второй части равно m+2.

 $S_1$  есть сумма членовъ самой прогрессіи и выраженіе ея изв'єстно. Зная  $S_1$  и полагая m=2, найдемъ  $S_2$ . Зная  $S_1$  и  $S_2$ , и полагая m=3, найдемъ  $S_3$ , и т. д.

Сумма одинаковых степеней натуральнаго ряда. — Положивъ a=1,  $\delta=1$ , l=n+1, обратимъ нашу прогрессію въ рядъ первыхъ n+1 натуральныхъ чиселъ: -1.2.3...n (n+1). Въ этомъ рядъ будетъ:

$$S_{m} = 1^{m} + 2^{m} + 3^{m} + \dots + n^{m}; \quad S_{m-1} = 1^{m-1} + 2^{m-1} + 3^{m-1} + \dots + n^{m-1};$$

$$S_{2} = 1^{2} + 2^{2} + \dots + n^{2}; \quad S_{1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Формуда (2) приметъ видъ

$$S_{m} = \frac{(n+1)^{m+1}-1}{(m+1)} - \frac{m}{2}.S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3}.S_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}S_{m-3} - \dots - S_{1} - \frac{n}{m+1}...(3).$$

1. Положивъ m=1, и заметивъ, что рядъ будетъ иметь 3 члена, получимъ:

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{2}.S_0$$
. Ho  $S_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$ ; cx.

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \dots (A)$$

результать, найденный нами въ § 742.

2. Положивъ m=2, находимъ:

$$S_2 = \frac{(n+1)^3-1}{3} - S_1 - \frac{1}{3}$$
  $S_0$ . Подставляя величины, найденныя для  $S_0$  и  $S_1$ ,

$$S_{2} = \frac{(n+1)^{3}-1}{3} - \frac{(n+1)n}{2} - \frac{n}{3} = \frac{(n+1)^{3}-(n+1)}{3} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)^{2}-1]}{3}$$

$$-\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \dots (B)$$

Такова формула суммы квадратовъ первыхъ п натуральныхъ чиселъ.

3. Положивъ т = 3, найдемъ:

$$S_3 = \frac{(n+1)^4-1}{4} - \frac{3}{2} S_2 - S_1 - \frac{1}{4} S_0$$
. Подставляя выраженія, найденныя для  $S_2, S_1, S_0$ , получимъ:

Такимъ образомъ: сумма кубовъ п первыхъ натуральныхъ чиселъ равна квадрату суммы тъхъ же чиселъ

4. Подобнымъ образомъ нашли бы

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \cdot (D)$$

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \cdot (E)$$

ит. д.

752. Предълъ  $\frac{S^m}{n^{m+1}}$ . — Положивъ въ равенствъ (1) a=1,  $\delta=1$ , l=n, имъемъ  $n^{m+1}=1+(m+1)S_m+\frac{(m+1)m}{1+2}.S_{m-1}+\frac{(m+1)m(m-1)}{1+2+3}S_{m-2}+...+(m+1)S_1+n$ 

Если бы перенесли всѣ члены, нсключая втораго, въ первую часть, то напли-бы въ ней полиномъ m+1-й степени относительно n, тавъ-что сумма  $\mathbf{S}_m$  m-хъ степеней первыхъ n чисель есть цѣлая функція m+1-й степени относительно n, разсматриваемаго, какъ перемѣнное. Такимъ образомъ, полиномы  $\mathbf{S}_{m-1}$ ,  $\mathbf{S}_{m-2}$ , . . . . суть функціи отъ n степени m-й, m-1-й, . . . . Слѣд., раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на  $n^{m+1}$ , замѣтимъ, что всѣ дроби

$$\frac{S_{m-1}}{n^{m+1}}$$
,  $\frac{S_{m-2}}{n^{m+1}}$ ,  $\frac{S_{m-3}}{n^{m+1}}$ , . . . . .

обрататся въ ноль при  $n=\infty$ , ибо степень числителя отн. и каждой изъ нихъ ниже степени знаменателя.

Значить, въ предвив, при  $n=\infty$ , равенство дасть

$$1=(m+1)$$
 .  $\lim \frac{S_m}{n^{m+1}}$ , отвуда  $\lim \frac{S_m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$ .

Напр., по этой теорем's имбемъ:  $\lim \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3}$ ,  $\lim \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}$ , и т. д.

- 753. Приложеніе І.— Вычисленіе кучь ядерь. Въ настоящее время въ артиллерін употребляются ядра двухъ родовъ: сферическія—для гладкихъ орудій, и цилиндро— коническія—для нар'єзныхъ. Тѣ и другія складывають въ арсеналахъ въ кучи различныхъ формъ; займемся вычисленіемъ числа ядеръ, заключающихся въ такихъ кучахъ.
- Опредълить число ядерт пирамидальной кучи съ квадратнымъ основаніемъ. —
   Сферическія ядра въ этого рода кучахъ свладываютъ слёдующимъ образомъ. На землё владутъ ядра рядами, образующими квадратный слой, въ каждой сторонё котораго п

ядеръ; на немъ помѣщаютъ въ промежуткахъ между ядрами другой квадратный слой, содержащій n-1 ядеръ въ каждой своей сторонѣ; и т. д. до верхняго слоя, въ которомъ находится одно ядро. Такимъ образомъ число ядеръ въ кучѣ будетъ =

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$$
,

т. е. суммъ квадратовъ п первыхъ натуральныхъ чиселъ, или, по формулъ (В):

Усписная пвадратная пирамида. — Если съ этой кучи снять нѣсколько ядеръ, взявъ сперва верхнее ядро, затѣмъ ядра (4) слѣдующаго слоя и т. д., то если снято будетъ p слоевъ, получитси квадратная усѣченная пирамида, въ основанін которой  $n^2$  ядеръ, а въ верхнемъ слоѣ  $(p+1)^2$ . Число снятыхъ ядеръ получится изъ ( $\alpha$ ), гдѣ надо n замѣнить буквою p. Число ядеръ оставшихся

$$X' = \frac{n(n+1)(2n+1) - p(p+1)(2p+1)}{6} = \frac{(n-p)[2p^2 + p(2n+3) + (n+1)(2n+1)]}{6}.$$

Положивь p=0, найдемь формулу ( $\alpha$ ).

II. Найти число ядеръ пирамиды съ треуюльнымъ основаніемъ. — Основаніемъ кучи служить равносторонній  $\triangle$ ; въ промежутки его положены ядра, образующія другой равносторонній  $\triangle$ , котораго каждая сторона содержить однимъ ядромъ менѣе; и т. д.; наконецъ, верхній слой состонть изъ одного ядра.

Пусть нижній слой содержить въ наждой сторонь n ядерь; онь будеть состоять изъ n рядовь, изъ которыхь въ нервомь будеть 1 ядро, во второмь 2, въ третьемь  $3, \ldots,$  въ n-мь n ядерь. Сивд. число всёхъ ядеръ нижняго слоя  $=1+2+3+\ldots+n$ , или, по формуль (A),  $\frac{n(n+1)}{2}$ , или  $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$ . Полагая въ этой формуль n последовательно равнымь  $1, 2, 3, \ldots, n$ , найдемь:

число ядеръ 1-го слоя 
$$=$$
  $\frac{1}{2} + \frac{1^2}{2}$ 

" " 2-го "  $\frac{2}{2} + \frac{2^2}{2}$ 

" " 3-то "  $\frac{3}{2} + \frac{3^2}{2}$ 

n , n-го ,  $\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}$ ; слъд. число всъхъ ядеръ вучи  $Y=\frac{1}{2}\left(1+2+3+\ldots+n\right)+\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right);$  нли, но формуламъ (A) и (B):

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \cdot \cdot \cdot (\beta).$$

Успоченная треугольная куча. Снявъ p слоевъ сверху, получимъ усѣченную треугольную пирамиду, содержащую въ верхнемъ ребрѣ (p+1) ядро. По формулѣ  $(\beta)$  найдемъ число ядеръ въ ней

$$Y' = \frac{(n-p)[p^2 + p(n-3) + (n+1)(n+2)]}{6}.$$

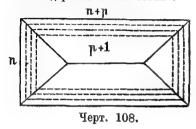
III. Найти число ядерь пучи съ прямоугольным основанием. Пусть меньшая сторона основания содержить n ядерь, большан n+p. Замѣтимь, что число ядерь

въ измѣреніяхъ слоевъ будетъ всегда уменьшаться на 1, при переходѣ отъ однаго слоя въ другому. Слѣд. разность между числами шаровъ въ двухъ сторонахъ каждаго слоя всегда будетъ p. Верхній слой состоитъ изъ одного ряда, имѣющаго  $p \dotplus 1$  ядро.

Число ядеръ нижняго слоя будетъ

$$n(n+p)$$
, Haif  $n^2+pn$ 

Полагая n посл'ядовательно равнымъ 1, 2, 3, . . . . . . n, найдемъ числа ядеръ во вс'ять слояхъ:



слъд, число всъхъ ядеръ кучи

$$Z = (1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + (n-1)^{2} + n^{2}) + p(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n), \text{ или}$$

$$Z = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + p \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6} \cdot \cdot \cdot (7).$$

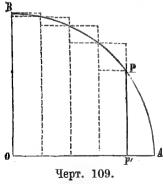
Обывновенно дають число ядерь сторонъ основанія; пусть n + p = m; формула приметь видъ:

$$Z = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6} \cdot$$

IV. Куча чилиндро-конических ядерь. Въ основанія вучи находится прямоугольникь, въ одноя стороні котораго (меньшей) n ядерь, въ другой p. Въ виду формы ядерь, надъ этимъ основаніемъ можно расположить прямоугольный слой съ p ядрами въ одной строві, (n-1) въ другой, и т. д. Число U ядерь, будеть:

$$U = pn + p(n-1) + p(n-2) + \dots + p \cdot 2 + p \cdot 1 = p \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

**754.** Приложение II. Опредъление объема шара и его частей. Разсмотримъ шаровой слой, котораго одно основание пусть совпадаетъ съ большимъ кругомъ; такой слой мы получимъ, взявъ на дугъ АВ квадранта точку Р, опустивъ изъ нея перпенди-



вулярь РР' на радіусь ОА и заставивь фигуру ОВРР' сдѣлать полный обороть около ОА, какъ оси. Раздѣлимь ОР' — h на произвольное число n равныхъ частей, изъ точекъ дѣленія проведемъ перпендивуляры къ ОА до встрѣчи съ дугою, и на каждомъ изъ нихъ и на отрѣзкахъ построимъ прямоугольники: получимъ рядъ описанныхъ и рядъ вписанныхъ прямоугольниковъ. При обращеніи фигуры около ОА, первые образують тѣло, состоящее изъ n цилиндровъ, объемъ котораго будетъ больше объема слоя; вторые составятъ тѣло, котораго объемъ меньше слоя.

Для вычисленія объемовъ обонхъ тълъ, описаннаго и вписаннаго, обозначимъ радіусь шара буквою R, радіусы основаній описанныхъ цилиндровъ будутъ

$$\mathbf{R}, \sqrt{\mathbf{R}^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2}, \quad \sqrt{\mathbf{R}^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2}, \quad \sqrt{\mathbf{R}^2 - \left(\frac{3h}{n}\right)^2}, \quad \dots \quad , \quad \sqrt{\mathbf{R}^2 - \left[\frac{(n-1)h}{h}\right]^2}$$

Радіусы основаній вписанных цилиндровь будуть:

$$\sqrt{\mathbb{R}^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2}$$
,  $\sqrt{\mathbb{R}^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2}$ ,  $\sqrt{\mathbb{R}^2 - \left(\frac{3h}{n}\right)^2}$ , . . .  $\sqrt{\mathbb{R}^2 - \left(\frac{nh}{n}\right)^2}$ 

Объемъ описаннаго тела будеть:

W= $\pi$ R<sup>2</sup>.  $\frac{h}{n} + \pi \left[ R^2 - \left( \frac{h}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \pi \left[ R^2 - \left( \frac{2h}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \dots + \pi \left[ R^2 - \left[ \frac{(n-1)h}{n} \right]^2 \right] \cdot \frac{h}{n}$ , или, въ виду того, что число слагаемыхъ есть n:

$$W = \pi R^2 h - \pi \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} \cdot h^3.$$

Для объема вписаннаго тыла такимъ же образомъ найдемъ:

$$w = \pi \left[ \mathbb{R}^2 - \left( \frac{h}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \pi \left[ \mathbb{R}^2 - \left( \frac{2h}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \pi \left[ \mathbb{R}^2 - \left( \frac{3h}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} + \dots + \pi \left[ \mathbb{R}^2 - \left( \frac{nh}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{h}{n} ,$$

$$w = \pi \mathbb{R}^2 h - \pi \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} \cdot h^3 .$$

Отсюда находимъ:  $W = w = \frac{1}{n}$ .  $h^3$ , слъд. при неограниченномъ увеличеніи n разность между обоими объемами м. б. сдълана безконечно малою; а потому на осн. Теоремы I, § 194, заключаемъ, что объемъ слоя есть общій предъль церемѣнныхъ W и w. Итакъ, назвавъ объемъ слоя буквою W, имѣемъ

$$U = lim. \left\{ \pi R^2 h - \pi \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} \cdot h^2 \right\}.$$

Такъ какъ первый членъ  $\pi R^2 h$  есть величина постоянная, то задача сводится къ опредѣленію  $\lim \left[\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}\right]_n = \infty$ , который, какъ извѣстно, равенъ  $\frac{1}{3}$ .

Итавъ: 
$$U = \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h^3 = \pi h \left[ R^2 - \frac{h^2}{3} \right]$$
 . . . (1).

При помощи этой формулы можно опредълить и объемъ такого слоя, котораго ни одно изъ основаній не есть большой кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ центра опустимъ перпендикуляры h' и h'' на основанія такого слоя, то, полагая h' > h'', можемъ разсматривать данный слой U' какъ разность двухъ слоевъ перваго рода; поэтому

$$U' = \pi \left[ R^2 - \frac{1}{3} h'^2 \right] h' - \pi \left[ R^2 - \frac{1}{3} h''^2 \right] h'',$$

что легко привести (введя радіусы основаній и высоту слоя) къ обыкновенной формул'в объема слоя.

Если въ формулѣ (1) положимъ h=R, найдемъ объмъ полушара  $U''=\frac{2}{3}$   $\pi R^3$ , в отсюда объемъ цълаго шара  $\frac{4}{3}$   $\pi R^3$ .

Вычтя изъ объема полушара объемъ слоя (1), найдемъ объемъ сферическаго сегмента:  $\frac{2}{3}\pi R^3 - \pi[R^2 - \frac{1}{3}h^2]h$ ... (2). Отсюда получимъ обыкновенно даваемую въ геометріп формулу объема сегмента, если введемъ его высоту H = R - h; отсюда h = R - H, а подставивъ во (2), найдемъ  $\pi H^2\left(R - \frac{H}{2}\right)$ .

Для вычисленія объема шароваго сектора, разсматриваемъ его какъ сумму сегмента и конуса; назвавъ высоту сегмента буквою H, находимъ для высоты конуса R-H, а для радіуса его основанія  $\sqrt{R^2-(R-H)^2}$ ; такъ что объемъ сектора будеть  $=\pi\left(R-\frac{H}{3}\right)H^2+\frac{\pi}{3}\left[R^2-(R-H)^2\right](R-H)$ , или, по упрощеніи,  $\frac{2}{3}\pi R^2H$ .

Такимъ образомъ формула (1) ръшаетъ вполнъ вопросъ о вычислении объемовъ шара и его частей.

755. Задачи. 1. Найти последній члень и сумму членовь въ прогрессіяхь:

- $\stackrel{\bullet}{\cdot}$ 1. 1, 1. 1, 2.....(200 чл);  $\stackrel{\bullet}{\cdot}$ 63. 58. 53 ..... (8 член.);  $\stackrel{\bullet}{\cdot}$ 2m. (2m+4n).....(14 чл).
- 2. Найти разность и сумму членовъ прогрессій, въ которыхъ давы: 1) a = 169, u = 8, n = 24; 2) a = 7, u = -3.5, n = 36; 3)  $a = 2b^2$ ;  $u = 2b^2 + 17a^3$ , n = 35.
  - 3. Вставить: 1) 7 среднихъ между 7 и—9; 2) 15 среднихъ между 36a<sup>2</sup> и 4a<sup>2</sup>.
  - 4. Даны: s = 2640,  $\delta = -20$ ; u = 15; найти n.
  - 5. Даны: a=21,  $\delta=-2$ , s=120; найтн n.
- 6. Раздёлить 85 на части, составляющія арием. прогр., въ воторой было-бы a=7,  $\delta=\frac{4}{3}$ . Опредёлить число членовъ и послёдній членъ.
  - 7.  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\delta = \frac{3}{2}$ , s = 7475. Найти и и л.
  - 8. a=2, 5;  $\delta=0$ , 3; s=1020. Hauth n?
- 9. Сколько членовъ нужно взять въ прогрессіи 5. 9. 13 . . . чтобы ихъ сумма равнялась 12877.
  - 10. Найти сумму п первыхъ четныхъ чиселъ.
- 11. Найти стороны прямоугольнаго треугольника, если извёстно, что они составляють ариемет. прогр., которой разность = 25.
- 12. Найти ариеметическую прогр., въ которой сколько бы ни взять членовъ, всегда ихъ сумма равна утроенному квадрату числа этихъ членовъ.
- 13. Углы выпуклаго многоугольника составляють ариометическую прогрессію, которой разность  $=4^{\circ}$ , а наибольшій уголь  $=172^{\circ}$ . Найти число сторонь.
- 14. Углы прямоугольнаго △ образують ариеметич. прогрессію; периметръ △ равенъ 24 футамъ. Найти стороны.
- 15. Угам многоугольника объ n сторонахъ образують ариемет. прогр., которой первый членъ = a; найти разность. Приложить къ случаямъ: n = 3; n = 4; n = 9; и n = 15.
- 16. При какомъ условін сумма двухъ какихъ угодно членовъ ариометической прогрессіи составляєть членъ этой же самой прогрессіи?
- 17. Вставить между 1 и 31 столько среднихъ арием., чтобы ихъ сумма была вчетверо больше суммы двухъ наибольшихъ изъ нихъ.
- 18. Показать, что квадраты выраженій  $x^2-2x-1$ ,  $x^2+1$ ,  $x^2+2x-1$  составляють ариеметическую прогрессію.
- 19. Если  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  образують ариом. прогрессію, то п  $\frac{1}{b+c}$ ,  $\frac{1}{c+a}$ ,  $\frac{1}{a+b}$  также образують ариом. прогрессію.

20. Найти сумму п первыхъ членовъ каждаго изъ слёдующихъ рядовъ:

a) 
$$\frac{n-1}{n}$$
,  $\frac{n-2}{n}$ ,  $\frac{n-3}{n}$ , ...

b) 
$$(a+b)$$
,  $(a^2+b^2)$ ,  $(a-b)^2$ , . . .

c) 
$$\frac{a-b}{a+b}$$
,  $\frac{3a-2b}{a+b}$ ,  $\frac{5a-3b}{a+b}$ , ...

d) 
$$1^2+3^2+5^2+7^2+\dots$$

e) 
$$2^2 + 5^2 + 8^2 + \dots$$

f) 
$$1.2+2.3+3.4+4.5+...$$

g) 
$$3.8+6.11+9.14+...$$

21. Изъ нечетныхъ чисель образують группы

такъ, что группа п-ая содержить п членовъ; вычислить сумму чисель п-й группы.

- 22. Найти такую прогрессію, чтобы сумма n членовъ, начиная отъ перваго, равнялась бы (n+1) разъ взятой половинѣ члена, на которомъ останавливаются?
- 23. n-й членъ арием. прогрессіи равенъ  $\frac{3n-1}{6}$ ; найти первый членъ, разность и сумму первыхъ n членовъ.
- 24. Если въ арием. прогрессіи 10-й членъ есть среднее пропорціональное между 4-мъ и 15-мъ, то 12-й чл. есть ср. проп. между 9-мъ и 16-мъ.
- 25. Даны члены M и N порядковъ m-го и n-го арием. прогрессін; вычислить членъ P порядка p-го. Прим'връ: 3-й чл. = -1; 7-й = 1; найти двадцатый членъ?
- 26. Найти ариеметич. прогрессію, въ которой 7 и 5 были бы соотв'єтственно 5-мъ и 7-мъ членомъ.
- 27. m и n суть членъ порядковъ (p+q)-го и (p-q)-го арвем. прогр.; найти p-й и q-й члены.
- 28. Если  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , . . . . ,  $S_n$  суть суммы n первых членов n ариеметических прогрессій, начинающихся съ 1, и имфющих соответственно разности 1, 2, 3, . . . , n; то доказать, что эти суммы также составляють ариеметич. прогрессію, и что сумма этой прогрессіи  $=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ .
- 29. Пусть  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , . . . . ,  $S_p$  означають суммы p прогрессій, им'ьющихъ, каждая, n членовъ; пусть ихъ первые члены суть: 1, 2, 3, . . . , p; а разности: 1, 3, 5, . . . , (2p-1).

Доказать, что 
$$S_1 + S_2 + \ldots + S_p = \frac{np}{2}$$
  $(np-1)$ .

- 30. Найти ариом. прогрессію, которой сумма членовъ выражается формулою  $3n^2 + 4n$ , каково бы ни было число n членовъ?
- 31. Ариемет. прогр. такова, что отношение суммы n первыхъ членовъ въ суммъ слъдующихъ 2n членовъ независить отъ n.

Найти отношение разности къ первому члену.

32. Даны: первый члень a и разность r прогрессіи ариом.; зная, что эта разность r, число x членовь и сумма ихъ составляють сами ариометич. прогрессію, вычислить x и разность этой новой прогрессіи. Изслѣдовать.

- ' 33. Крайніе члены одной прогрессіи суть a и b; крайніе члены другой суть a' и b'; первал им'єєть n членовь. Каково должно быть число членовь второй, чтобы члень порядка p первой равнялся члену порядка q второй?
- 34. Опредѣлить коэффиціенты p и q ур-нія  $x^4 + px^2 + q = 0$  такъ, чтобы корни составляли ариометич. прогрессію.
- 35. При какомъ значеніи m корни ур-нія  $x^4 (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$  составляють ариеметическую прогрессію. Вычислить соотв'єтствующіе корни.
- 36. На прямой намечено *п* равноотстоящих точек A, B, C, D, . . . ; разстояніе между крайними точками *а*. Движущаяся точка выходить изъ A и, дойдя до B, возвращается въ A; затемъ изъ A достигаеть до C и снова возвращается въ A, и т. д., проходя дважды разстояніе отъ A до каждой изъ остальных точекъ. Найти длину всего пройденнаго пути?
- 37. Два курьера, выбажая одновременно изъ двукъ мѣстъ, отстоящихъ другъ отъ друга на 1190 верстъ, ѣдутъ на встрѣчу другъ другу. Первый пробажаетъ въ первый день 20 верстъ, во второй 30, въ третій 40 и т. д.; второй курьеръ въ первый день пробажаетъ 90 в., во второй 82, въ третій 74 и т. д. Черезъ сколько дней они встрѣтатся?
- 38. Два тѣла М и М' выходять одновременно изъ точекъ А и В, разстояніе между которыми 75 метр. и движутся отъ А къ В, причемъ цервое догоняетъ второе. М пробѣгаетъ въ первую минуту 1 м., во вторую 3, въ третью 5 и т. д. въ арием. прогрессіи. М' пробѣгаетъ въ первую минуту 3 м., во вторую 4, въ третью 5 и т. д. (въ арием. прогр.). Черезъ сколько минутъ они встрѣтятся?
- 39. Метеорологъ замѣтилъ, что отъ 8-го до 19-го іюня термометръ ежедневно поднимался на  $\frac{1}{2}$  градуса, и что ариеметическая средина этихъ 12 показаній термометра составляла  $18\frac{3}{4}$  градусовъ. Сколько градусовъ показываль термометръ 8 іюня?
- 40. По новъйшимъ изслъдованіямъ относительно внутренней теплоты земли оказывается, что при углубленіи на каждые 100 фут. температура возрастаеть на 1°С. Если на поверхности земли температура == 10°С, то какова она на глубинъ 1000 ф., 10000 ф., 1 мили (24000 ф.), и какова въ центръ земли, полагая, что сказанный законъ не измъняется до самаго центра земли, и зная, что радіусъ земли == 858 милямъ. Затъмъ указать, на какой глубинъ температура достигаетъ кипънія воды (100°), плавленія свинца (334°), плавленія желъза (1200°).
- 41. Кубическій сосудъ, наполненный водою, обращень поверхностью своей къ небу. Температура воздуха равна 30° въ первый день, и въ каждый слёдующій день увеличивается на 1°. Положимъ, что при температурё въ 15° въ одинъ день испаряетси одинъ дюймъ (въ глубину), и при другихъ температурахъ въ такой же пропорціи. Каждый вечеръ идутъ дожди, въ первый вечеръ выпало на 3 дюйма, а въ каждый слёдующій вечеръ глубина выпадающаго дождя убывала въ ариометической прогрессіи, разность которой равна  $\frac{1}{90}$  количества воды, выпавшаго въ 1-й день. Въ концё 41 дня нашли, что сосудъ опорожнился. Какова его вмёстимость?
- 41. Корабль со 175 пассажирами имѣлъ запасъ воды, достаточный для окончанія путешествія. Спуста 30 дней, вслѣдствіе скорбута, ежедневно умирало по 3 человѣка. Вслѣдствіе бури путешествіе продлилось лишнихъ 3 недѣли. Когда корабль доститъ гавани, весь запасъ воды не былъ истощенъ. Какъ долго продолжалось путешествіе?

- 43. Отецъ даритъ каждому изъ своихъ смновей въ день его рожденія столько книгъ, сколько сыну лётъ. Лёта 5-ти сыновей составляютъ ариометич. прогрессію, разность которой = 3. Каковы были ихъ лёта, когда у нихъ составилась библіотека въ 375 томовъ?
- 44. Вывести формулу площади треугольника, раздѣливъ его высоту на равныя части, проведя чрезъ точки дѣленія параллели основанію и построивъ на каждой параллели и на каждомъ основаніи прямоугольники, содержащієся между двумя послѣдовательными параллелями.
- 45. Подобнымъ же образомъ вычислить объемъ пирамиды. Параллели замънятся здъсь параллельными илоскостями, а прямоугольники призмами.

### ГЛАВА XLV

Прогрессія геометрическая. — Общій членъ. — Вставка среднихъ геометрическихъ. — Сумма членовъ конечной прогрессіи. — Леммы о степеняхъ и корняхъ. — Суммированіе безконечныхъ геометрическихъ прогрессій. — Задачи.

756. Опредъленіе. — Геометрической прогрессіей наз. рядъ часелъ, изъ которыхъ каждое равно предыдущему, умноженному на постоянное количество, называемое знаменателем прогрессіи. Когда абсолютная величина членовъ идетъ увеличиваясь, прогрессія называется возрастающею; если же абсолютная величина членовъ идетъ убывая, прогрессія наз. убывающею. Очевидно, въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей она меньше единицы. Для полученія знаменателя прогрессіи надо какой нибудь членъ раздѣлить на предыдущій. Слово прогрессія обозначается знакомъ ...; между членами прогрессіи ставятъ знакъ : . Такъ

 $\frac{\cdots}{\cdots}$  2 : 6 : 18 : 54 : . . . . есть возрастающая прогр. съ знаменателемъ 3;  $\frac{1}{\cdots}$  1 :  $\frac{1}{3}$  :  $\frac{1}{9}$  :  $\frac{1}{27}$  : . . . есть убывающая прогрессія съ знаменателемъ  $\frac{1}{3}$ .

Общій видъ геометрической прогрессіи будеть

$$\therefore$$
  $a:b:c:d:\ldots r:t:u:\ldots \ldots (1)$ 

знаменатель обыкновенно обозначають буквою q.

Каждые три смежные члена прогрессіи составляють непрерывную кратную пропорцію. Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію геометрической прогрессіи: c = bq и d = cq, откуда, раздѣливъ первое равенство на второе, имѣемъ c: d = b: c.

757. Теорем А. Общій (n-й) членъ.—Пусть въ прогрессій (1) § 756 членъ и будегъ n-й; по опредъленію прогрессіи, имъемъ;

$$b = aq$$
,  $c = bq$ ,  $d = cq$ , . . . ,  $t = rq$ ,  $u = tq$ .

Перемножая почленно эти (n-1) равенствъ и сокращая объ части на b . c . . . .  $\ell$ , найдемъ

$$u = aq^{n-1}$$
,

т. е. каждый членг прогрессіи равенг первому, помноженному на знаменателя прогрессіи въ степени числа предшествующих членовъ. Такъ, найдемъ, что 9-й чл. прогрессіи  $\stackrel{...}{=} 1:3:9:27:\ldots$  будетъ  $=1\times3^{3}$ , пли 4374. Восьмой членъ  $\stackrel{...}{=} 3:\frac{3}{2}:\ldots$  равенъ  $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{3}{128}$ 

758. Задача. Найти условіє, при котором три данныя числа А, В. С представляют члены порядков т, п, р одной и той же геометрической прогрессіи?

Обозначивъ первый членъ этой прогрессіи буквою x, а знаменателя буквою y, имѣемъ ур-нія

$$A = xy^{m-1}$$
,  $B = xy^{n-1}$ ,  $C = xy^{p-1}$ .

Три ур-нія вообще не могуть быть удовлетворены однѣми и тѣми же значеніями x и y; поэтому, чтобы найти искомое условіе, нужно выразить, что существуеть общее этимь ур-мь рѣшеніе, т. е. исключить x и y. Для исключенія x дѣлимъ почленно первое ур. на второе, а второе на третье:

$$\frac{A}{B} = y^{n-n}, \quad \frac{B}{C} = y^{n-p}$$
.

Возвышая первое изъ этихъ ур-ній въ степень n-p, а второе въ степень m-n, нитемъ:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n-p} = y^{(m-n)(n-p)}, \quad \left(\frac{B}{C}\right)^{m-n} = y^{(m-n)(n-p)},$$

откуда

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n-p} = \left(\frac{B}{C}\right)^{m-n}$$
, han  $A^{n-p} \times B^{p-m} \times C^{m-n} = 1$ :

это и есть требуемое условіе.

759. Вставка среднихъ геометрическихъ между двумя данными числами.

Вставить т средних геомерических или пропорціональных между двумя данными числами a и b значить найти m таких чисель, которыя между собою и съ данными составляли бы геометрическую прогрессію. Пусть q будеть неизвъстный знаменатель этой прогрессіи; послъднему члену b предшествуєть m + 1 члень, а потому

$$b=aq^{m+1}$$
, откуда  $y=\sqrt[m+1]{\frac{\overline{b}}{a}}$ .

Такимъ образомъ искомая прогрессія будетъ

$$\therefore a: a \sqrt[m+1]{\frac{\overline{b}}{a}}: a \sqrt[m+1]{\frac{\overline{b}^2}{a^2}}: a \sqrt[m+1]{\frac{\overline{b}^3}{a^3}}: \ldots : b.$$

Примъръ. Вставить 3 среднихъ геометрич. между 4 и 64. Знаменатель  $q=\sqrt[4]{\frac{64}{4}}=\sqrt[4]{16}=2;$  искомые средніе члены суть:  $4\times 2$ ,  $4\times 2^2$  и  $4\times 2^3$ , или 8, 16 и 32.

760. ТЕОРЕМА.—Если между послыдовательными членами геометрической прогрессіи вставить одинановое число средних, то полученныя частныя прогрессіи составять одну сплошную прогрессію.

Пусть данная прогрессія будеть  $\vdots$   $a:b:c:\ldots:r:t:u$ , п пусть между каждыми двумя послідовательными членами вставлено m среднихъ

геометрическихъ; отдъльныя прогрессіи  $\vdots$   $a:\alpha:\beta:\ldots:\lambda:b$ ;  $b:\alpha':\beta':\ldots:\lambda':c$ ;  $\ldots:\lambda':c$ ;  $\ldots:\lambda^{(n)}:u$  имъютъ соотвътственно знаменателей

$$\sqrt[m+1]{\frac{\overline{b}}{a}}$$
,  $\sqrt[m+1]{\frac{\overline{c}}{b}}$ , ...,  $\sqrt[m+1]{\frac{\overline{u}}{t}}$ ;

но  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \cdots = \frac{u}{t} = q$ , гдѣ q—знаменатель данной прогрессіи; слѣд, всѣ эти прогрессіи имѣютъ общаго знаменателя; и какъ послѣдній членъ одной служитъ первымъ членомъ слѣдующей, то всѣ прогрессіи въ совокупности составляютъ одну сплошную прогрессію.

761. Теорем A.-Bо всякой геометрической прогрессіи произведеніе крайних членов равно произведенію двух других, равно удаленных от крайних.

Пусть въ прогрессіи  $\begin{subarray}{l} : & a : b : ... : x : ... : y : ... : t : u \$  члену x предшествуєть и за членомь y слѣдуєть p членовь; въ такомь случаѣ:  $x = aq^p$ . . . . . (1). Въ прогрессіи, начинающейся членомь y и кончающейся членомь u, имѣемъ  $u = yq^p$ , откуда  $y = \frac{u}{q^p} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$  (2). Перемноженіе (1) и (2) даеть xy = au, что и т. д.

762. Сумма членовъ конечной геометрической прогрессіи.

Пусть дана прогрессія  $\vdots$   $a:b:c:d:\ldots:r:t:u$ , содержащая n членовъ, съ знаменателемъ q; сумму членовъ назовемъ S. По свойству геом. прогр. имъемъ

$$b = aq, c = bq, d = cq, \dots, t = rq, u = tq.$$

Складывая почленно эти равенства, находимъ:

$$b+c+d+...+t+u=(a+b+c+...+r+t)q.$$

Первая часть этого равенства есть сумма S безъ перваго члена a, т. е. S --a, выражение въ скобкахъ есть сумма членовъ безъ послъдняго, т. е. S --u; слъд, равенству можно дать видъ

$$S-a=(S-u)q$$
, when  $S-a=Sq-uq$ ;

ръшивъ это ур. относительно S, найдемъ

т. в. чтобы найти сумму членовь геометрической прогрессіи, нужно: послыдній члень умножить на знаменателя, изъ произведенія вычесть первый члень, и раздплить остатокь на разность между знаменателемь и единицей.

Если въ формулъ (1) замънить и его величиною  $aq^{n-1}$ , то S приметь видъ

Въ этой формъ справедливость формулы очевидна; въ самомъ дълъ, по закону частнаго отъ дъленія  $x^m-a^m$  на x-a, имъемъ

$$\frac{q^{n}-1}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \cdots + q+1,$$

а умноживъ объ части на a, найдемъ въ первой части формулу (2), а во второй:  $a+aq+\cdots+aq^{n-3}+aq^{n-2}+aq^{n-2}$ ; но эта сумма есть ничто иное какъ сумма членовъ самой прогрессіи.

Другой пріемь. Называя суммую членовъ прогрессіи буквою S, имбемъ

$$S = a + b + c + \dots + r + t + \mathbf{u} + \dots$$
 (3)

Умноживъ объ части этого равенства на q, находимъ:

$$Sq = aq + bq + cq + \dots + rq + tq + uq \dots (4)$$

Но, по опредъленію прогрессіи, b = aq, c = bq, . . . , t = rq, u = tq; слъд. (3) можно написать въ видъ:

$$S = a + aq + bq + \dots + rq + tq \dots$$
 (5)

Вычитая (5) изъ (4) замѣчаемъ, что всѣ члены уничтожаются, за исключеніемъ члена uq въ (4) и и въ (5); такъ что

$$Sq - S = uq - a$$
, when  $S(q-1) = uq - a$ ,

откуда

$$S = \frac{uq-a}{q-1}$$
.

 $\Pi$ РИМВРЫ: І. Найти сумму 6 членовъ прогрессіи, которой первый члень = 7, а послъдній 700000?

Знаменатель q опредъляется изъ ур-нія 700000=7.  $q^3$ , откуда q=10; слъд.  $S=a\cdot \frac{q^n-1}{q-1}=7\cdot \frac{10^6-1}{10-1}=7\cdot \frac{1000000-1}{10-1}=7\cdot \frac{999999}{9}=777777$ .

II. Найти сумму 10 первых зчленов пеометрической прогрессіи, которой первый члень  $=\frac{1}{2}$ , а знаменатель  $\frac{1}{10}$ ?

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{10} - 1}$$
, или, помноживъ числителя и знам. на  $(-10^{10})$ :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{10} - 1}{10^{9}(10 - 1)} = \frac{1}{2} \cdot 1$$
, 111 111 111 = 0,555 555 555 5.

# Безконечныя геометрическія прогрессіи.

763. Изученіе безкоцечных геометрических прогрессій требуеть предварительнаго доказательства слёдующих теоремь о степеняхь; къ нимъ присоединяемъ и соотвётственныя теоремы о корняхъ.

764. ЛЕММА І.— Послыдовательныя цылыя положительныя степени положительнаго числа, большаго 1, возрастають съ увеличеніемь показателя и могуть быть сдыланы больше всякой данной величины.

Пусть будеть a>1; смыслъ неравенства не измѣнится отъ умноженія неравенства на положительное число; такимъ образомъ послѣдовательно найдемъ:

$$a^2 > a$$
,  $a^3 > a^2$ ,  $a^4 > a^3$ , in t. i., boodine  $a^{m+1} > a^m$ :

откуда видно, что степени въ самомъ дѣлѣ возрастають, съ увеличеніемъ показателя. Но если доказано, что количество идетъ возрастая, то отсюда еще нельзя заключить, что оно можетъ быть сдѣлано какъ угодно большимъ: это еще должно быть доказано. Очевидно, будетъ доказано, что  $a^m$  м. б. сдѣлано какъ угодно большимъ, если докажемъ, что для показателя m всегда можно найти такую величину, при которой будетъ  $a^m > K$ , гдѣ K— заданное количество. Пусть a превышаетъ единицу на a, т. е. a— 1 = a. Такъ какъ a > 1, то умноженіе на a поведетъ къ увеличенію, и получится рядъ неравенствъ

$$a-1 = \alpha$$

$$a^{2}-a > \alpha$$

$$a^{3}-a^{2} > \alpha$$

$$\vdots$$

$$a^{m-1}-a^{m-2} > \alpha$$

$$a^{m}-a^{m-1} > \alpha$$

откуда, складывая, найдемъ

$$a^m-1>\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha+\alpha$$
, with  $a^m-1>m\alpha$ ,  $a^m>1+m\alpha$ .

Очевидно отсюда, что  $a^m$  будеть больше K, если будеть

$$1 + m\alpha > K,$$

$$m > \frac{K-1}{2};$$

откуда

откуда

но очевидно, что каково бы ни было  $\alpha$ , всегда можно найти для m такое значеніе, которое будеть больше  $\frac{K-1}{\alpha}$ .

Примъръ. — При какомъ значеніи m количество  $(1,001)^m$  будетъ больше 1000?

При 
$$m > \frac{1000-1}{0.001}$$
, т. е. при  $m > 999000$ .

785. ЛЕММА II. Послыдовательныя цилыя положительныя степени числа а, меньшаго 1, идуть уменьшаясь съ увеличеніемъ показателя и могуть быть сдыланы какь угодно близкими къ нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства a < 1, подучаемъ:  $a^2 < a$ ,  $a^3 < a^2$ , ...,  $a^{m+1} < a^m$ , т. е. степени становятся тѣмъ меньше, чѣмъ показатель больше. Затѣмъ, число меньшее 1 можно представить въ видѣ  $\frac{1}{1+\alpha}$ ; желая опредълить степень, въ которую нужно возвысить  $\frac{1}{1+\alpha}$ , чтобы эта степень была меньше заданнаго числа  $\delta$ , полагаемъ

$$\frac{1}{(1+\alpha)^m} < \delta$$
, откуда  $(1+\alpha)^m > \frac{1}{\delta}$ ,

а по предыдущей лемив, это неравенство всегда м. б. удовлетворено.

766. ЛЕММА III. Корни цълаго положительнаго порядка изг числа большаго 1 уменьшаются ст возрастаніем показателя и могуть быть

сдъланы какъ угодно близкими къ 1, оставаясь, однако же, всегда большими 1, и никогда не дълаясь равными ей или меньшими ея.

Пусть a > 1; надо доказать, что

- 1.  $\sqrt[8]{a} < \sqrt{a}$ ;  $\sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}$ ;  $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a}$ ; . . . ;  $\sqrt[m+1]{a} < \sqrt[m]{a}$ .
- 2.  $\sqrt[m]{a}$  не можеть быть ни =, ни <1.
- 3. Разность  $\sqrt[m]{a}-1$  м. б. сдълана < всякой, какъ угодно малой, величины.

Для доказательства первой части теоремы приведемъ корни  $\sqrt[m+1]{a}$  и  $\sqrt[m]{a}$  къ общему показателю; найдемъ:  $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$ , и  $\sqrt[m+1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$ . По первой лемиъ,  $a^{m+1} > a^m$ , а слъд. и  $\sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}} > \sqrt[m(m+1)]{a^m}$  или  $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m+1]{a}$ .

Затемъ, положивъ  $\sqrt[m]{a}=1$  и возвысивъ объ части въ m-ую степень, нашли-бы a=1, что противно условію a>1. Допустивъ, что  $\sqrt[m]{a}<1$ , нашли бы такимъ же образомъ: a<1, что опять противоръчимъ условію. Итакъ,  $\sqrt[m]{a}>1$ .

Докажемъ теперь, что для m всегда можно найти такое значеніе, при которомъ  $\sqrt[m]{a}$  будетъ какъ угодно мало разниться отъ 1. Обозначивъ буквою  $\delta$  очень малое положительное число, будемъ имѣть биномъ  $1+\delta$  весьма мало разнящійся отъ 1, но все таки большій ея. Въ леммѣ І мы доказали, что всегда можно найти такое значеніе для m, при которомъ будетъ  $(1+\delta)^m > K$ , гдѣ K какъ угодно велико; слѣдъ какую бы величину ни имѣло a, всегда можно дать m значеніе, при которомъ будетъ  $(1+\delta)^m > a$ , откуда  $1+\delta > \sqrt[m]{a}$ . Съ другой стороны доказано, что  $\sqrt[m]{a} > 1$ , такъ-что  $\sqrt[m]{a}$  заключается между двумя количествами 1 и  $1+\delta$ , разность между которыми  $\delta$  м. б. какъ угодно мала; а потому и разность  $\sqrt[m]{a} - 1$  тѣмъ болѣе м. б. сдѣлана какъ угодно малою.

767. ЛЕММА IV. Корни цилаго положительнаго порядка изг числа меньшаго 1 увеличиваются ст увеличением показателя, оставаясь всегда <1, къ которой они могуть быть сдиланы какт угодно близкими.

Для доказательства, что  $\sqrt[m+1]{a} > \sqrt[m]{a}$ , приведемъ эти корни въ общему по-казателю; найдемъ:  $\sqrt[m+1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a}$ ,  $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a}$ . Но a < 1, слъд.  $a^m > a^{m+1}$  (лем. II), а потому  $\sqrt[m(m+1)]{a}$  нли  $\sqrt[m+1]{a}$  больше  $\sqrt[m(m+1)]{a}$  или  $\sqrt[m]{a}$ : т. е. корни увеличиваются съ увеличеніемъ показателя. — Затъмъ, допустивъ, что  $\sqrt[m]{a} = 1$ , нашли бы, что a = 1; допустивъ, что  $\sqrt[m]{a} > 1$ , нашле-бы, что a > 1: тотъ и другой выводъ противоръчитъ условію a < 1. — Но, оставаясь всегда < 1,  $\sqrt[m]{a}$  м. б. сдъланъ какъ угодно близкимъ въ 1. Въ самомъ дълъ, означивъ буквою  $\delta$  какъ угодно малое положит. количество, будемъ имъть:  $1 - \delta < 1$ . Поэтому можно выбрать для m такое значеніе, при которомъ, въ силу леммы II, будетъ  $(1 - \delta)^m < a$ , откуда  $1 - \delta < \sqrt[m]{a}$ , или  $1 - \sqrt[m]{a} < \delta$ , какъ бы  $\delta$  ни было мало.

768. Теорема. В безконечно возрастающей геометрической прогрессіи абсолютная величина членов приближается к  $\infty$ , а в убывающей—к 0.

Будемъ разсматривать абсолютныя величины членовъ прогрессіи, (условившись обозначать абсол. значеніе количества x знакомъ [x]):

$$a : aq : aq^3 : aq^3 : \dots : aq^n : \dots$$

Пусть [q] будеть >1. Въ силу леммы I, съ приближеніемъ n къ  $\infty$  и  $[q^n]$  нриближается къ  $\infty$ , поэтому для n всегда можетъ быть найдено такое значеніе, при которомъ будетъ  $[q^n] > \left[\frac{A}{a}\right]$ , гдё A какъ угодно большое число; и изъ этого неравенства:  $[aq^n] > [A]$ , т. е. съ приближеніемъ n къ  $\infty$ , абсолютная величина членовъ прогрессіи приближается къ  $\infty$ .

Если теперь q будетъ положительно, то и  $q^n$  будетъ положительно, слёд. при a>0 всё члены прогрессіи положительны, а потому величина ихъ приближается къ  $+\infty$ ; при a<0, они отрицательны и приближаются къ  $-\infty$ .

Пусть, затъмъ, будетъ [q] < 1; на основаніи леммы II, при возрастаніи n до  $\infty$ ,  $[q^n]$  приближается въ 0, поэтому всегда можно дать n такое значеніе, что будетъ  $[q^n] < \left[\frac{\alpha}{a}\right]$ , гдъ  $\alpha$  вавъ угодно мало; а отсюда  $[aq^n] < \alpha$ , т. е.  $[aq^n]$ , съ приближеніемъ n въ  $\infty$ , приближается въ 0.

Если, теперь, q>0, то и  $q^n>0$ , слёд.: если a>0, то члены прогрессіи приближаются къ 0, оставаясь положительными; при a<0 они приближаются къ 0, будучи отрицательны.

769. Теорема. Сумма членовъ возрастающей прогрессіи, при неограниченномъ возрастаніи числа членовъ, приближаєтся къ  $\pm \infty$ , а убывающей—къ постоянной величинь  $\frac{a}{1-q}$ .

Для суммы n членовъ мы имѣемъ формулу  $S = \frac{aq^n - a}{q-1}$ , которую можно представить въ видѣ

I. q>I. — Первый членъ, какъ функція n, измѣняется съ измѣненіемъ числа членовъ, второй же, не содержа n, есть количество постоянное; измѣненіе суммы зависитъ, поэтому, отъ перваго члена. Мы доказали, что въ возрастающей прогрессіи съ положительнымъ знаменателемъ, величина  $aq^n$ , съ приближеніемъ n къ  $\infty$ , приближается къ  $+\infty$  при a>0, и къ  $-\infty$  при a<0; а потому и первый членъ, знаменатель котораго конеченъ и положителенъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и S, приближается къ  $+\infty$  при a>0, и къ  $-\infty$  при a<0.

II. Если q<1, то при  $n=\infty$  количество  $aq^n$ , а сл. и  $\frac{aq^n}{q-1}$  имѣетъ предъломъ 0, а слъд. сумма S имѣетъ предъломъ  $-\frac{a}{q-1}$  или  $\frac{a}{1-q}$ . Итакъ, при q<1,

$$\lim S = \frac{u}{1 - \varrho}$$

т. в. предълг суммы членовъ безконечно — убывающей прогрессіи равны первому члену, дъленному на 1 безъ знаменателя прогрессіи.

Это предложение можно доказать обратнымъ способомъ, раздёливъ и на 1—q: частное будетъ имъть неограниченное число членовъ, ибо одночленъ не дълится безъ остатка на многочленъ, а члены его будутъ следовать закону геометрической прогрессіи. Въ самомъ дълъ:

$$\begin{array}{c|c}
a & 1-q \\
\hline
 & a+aq+aq^2+aq^3+\ldots \\
\hline
 & +aq^2 \\
\hline
 & +aq^3+
\end{array}$$

III. Пусть q=+1. Взявъ конечную (объ n членахъ) прогрессію, имѣемъ  $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1};$  положивъ q=+1, найдемъ  $S=\frac{0}{0}$ .

Для раскрытія неопределенности, замечаемь, что

$$q^{n}-1=(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1),$$
 сявд. 
$$S=\frac{a(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1)}{q-1};$$

отсюда видно, что неопредёленность — кажущаяся и зависить отъ присутствія въ числ. и знамен. общаго множителя q-1, обращающагося въ 0 при q=1. Сокративъ на q-1, и положивъ потомъ q=1, получимъ:

$$S = a(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ p a b } x}) = an.$$

Этотъ результать можно было предвидёть; въ самомъ дёль, при q=1 сумма  $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}$  обращается въ  $a+a+a+\ldots+a$ , или въ an.

Если теперь положить  $n=\infty$ , то будеть:  $S=a.\infty$ , т. е.  $S=+\infty$  при a>0, и  $S=-\infty$  при a<0.

IV. q — отрицательное. — Если въ равенствъ

$$a + aq + aq^{2} + \dots + aq^{n-1} = \frac{aq^{n} - a}{q-1}$$

перемънить q на -q, отъ чего только нечетныя степени q перемънять знакъ, то получится выражение для суммы прогрессии съ отрицательнымъ знаменателемъ:

$$a - aq + aq^{2} - aq^{3} + \dots \pm aq^{n-1} = \frac{\pm aq^{n} - a}{-q - 1} = \frac{aq^{n}}{q + 1} + \frac{a}{q + 1}$$

Заключаемъ, что:

- 1) При q большемъ 1, по абсолютной ведичинъ, и при  $n=\infty$  членъ  $=\frac{aq^n}{q+1}=\pm\infty$ , слъд. и  $S=\mp\infty$ .
- 2) При q < 1, по абсолютной величинь, и при  $n = \infty$ , будеть  $aq^n = 0$ , и сльд.  $S = \frac{a}{1+q}$ .

- 3) При q=1, по абс. вел.,  $S=\frac{\pm a+a}{2}$ , и слъ. S равно или 0 (при четномъ числъ членовъ), или a (при нечетномъ числъ членовъ). Въ этомъ случаъ прогрессія представляеть  $p n d \tau$  колеблюційся.
- 770. Ръшеніе нъкоторыхъ задачъ, относящихся къ геометрическимъ прогрессіямъ.

Такъ какъ между пятью количествами a, u, n, q, s фигурирующими во всякой геометрич. прогрессіи, существуеть только 2 различныхъ соотношенія

$$u = aq^{n-1}$$
. . . . . (1)  $S = \frac{uq - a}{q - 1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$ 

то, какъ скоро даны 3 изъ этихъ количествъ, остальныя опредълятся изъ указанныхъ ур-ній. Какъ и въ случат ариометической прогрессіи, можно предложить здёсь 10 задачъ, изъ которыхъ рёшимъ только 2 слёдующія:

ЗАДАЧА І.-Вычислить и и по даннымо я, q и п.

Исключая и изъ ур-ній (1) и (2), находимъ:

$$\mathbf{S} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}, \quad \text{otryga} \quad a = \mathbf{S} \times \frac{q-1}{q^n-1};$$

подставляя эту величину въ ур. (2), получаемъ:

$$u = S \cdot \frac{q-1}{q^n-1} \cdot q^{n-1}.$$

3 адача II.—Вычислить q и s, зная a, u, n.

Изъ (1) находимъ:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{\overline{u}}{a}};$$

подстановка во (2) даетъ:

$$S = \frac{u\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - 1} = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$$

ЗАДАЧА III. - Найти женератрису данной періодической дроби.

1. Пусть чистая періодическая дробь  $f = 0,3737\dots$ ; ее можно представить въ вид $\mathfrak b$ 

$$f = \frac{37}{100} + \frac{37}{100^2} + \frac{37}{100^3} + \dots$$

След. f есть предель суммы членовь безконечно-убывающей геометрической прогрессіи, которой  $q=\frac{1}{100}$  и  $a=\frac{37}{100}$ . Потому

$$f = \frac{\frac{37}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{37}{99};$$

результать, извъстный изъ ариометики.

2. Возымемъ смѣшанную періодическую дробь f = 0.32(745). Ее можно написать въ формѣ

$$f = \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 1000} + \frac{745}{100 \times 1000^2} + \frac{745}{100 \times 1000^3} + \cdots$$

$$= \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 1000} \left[ 1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \cdots \right]$$

Рядъ въ скобкахъ есть сумма членовъ безконечно-убывающей геометрич. прогр., въ которой  $\alpha=1,\ q=\frac{1}{1000}$ ; рядъ этотъ равенъ, слъдовательно,  $\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{1000}{999}\,;$  а потому

$$f = \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 999} = \frac{32 \times 999 + 745}{1000 \times 999}.$$

Замънивъ въ числителъ 999 разностью 1000-1, находимъ

$$f = \frac{32000 - 32 + 745}{100 \times 999} = \frac{32745 - 32}{99900},$$

откуда прямо слёдуетъ извёстное изъ ариеметики правило.

ЗАДАЧА IV. Часовая и минутная стрълки показывають полдень. Въ которомь часу встрътятся они снова?

Примемъ за единицу времени часъ, а за 1 длины окружность циферблата. Черезъ часъ минутная стрълка возвратится къ цифръ XII, а часовая пройдетъ  $\frac{1}{12}$  циферблата; слъд. минутная стрълка должна пройти эту  $\frac{1}{12}$  циферблата, но въ это время часовая, движущаяся въ 12 разъ медленнъе минутной, пройдетъ  $\frac{1}{12}$  отъ  $\frac{1}{12}$  циферблата, или  $\frac{1}{12^2}$  его. Слъд. минутная стрълка должна пройти эту послъднюю долю циферблата, но въ теченіи этого времени часовая пройдетъ еще  $\frac{1}{12^3}$ ; и т. д. Итакъ, минутная стрълка, чтобы догнать часовую, должна отъ полудня пройти путь:  $1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\cdots$ , представляющійся подъ видомъ безконечно-убывающей геом. прогрессіи, первый членъ которой = 1, а знаменатель  $\frac{1}{12}$ . Предълъ этой суммы есть  $\frac{1}{1-\frac{1}{12}}$ , или  $\frac{12}{11}$ .

Такъ какъ минутная стрълка единицу пути (циферблатъ) проходитъ въ 1 часъ, то  $\frac{12}{11}$  этого пути пройдетъ въ  $1^{q_*} \times \frac{12}{11} = 1^{q_*} \cdot 5^{q_*} \cdot 27^{c_*} \cdot \frac{3}{11}$ .

ЗАДАЧА V. Соединяя средины сторонь квадрата, получають вписанный квадрать; въ этоть квадрать, соединяя средины его сторонь, вписывають новый квадрать, и т. д. Предполагая, что эта операція продолжается неограниченное число разь, найти предъль суммы площадей вспяль этихъ квадратовь. Пусть сторона даннаго квадрата будеть a; илощади последовательных в квадратовъ будуть:  $a^2$ ,  $\frac{a^2}{2}$ ,  $\frac{a^2}{4}$ ,  $\frac{a^2}{8}$ , · · · · Сумма ихъ будетъ

$$S = a^{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots)$$

Предълъ суммы прогрессіи въ скобкахъ  $=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2;$  слъд.  $S=2a^2.$ 

ЗАЦАЧА VI.— Число 195 раздълить на 3 части, которыя составляли бы геометрическую прогрессію, которой третій члень быль бы больше перваго на 120.

Пусть первый членъ будеть x, а знаменатель прогрессіи q; имѣемъ два ур-нія

$$x + xq + xq^2 = 195, \qquad xq^2 - x = 120,$$

которыя можно представить въ видъ

$$x(1+q+q^2)=195, \quad x(q^2-1)=120.$$

Раздёливъ первое на второе, исключимъ x, и получимъ квадратное уравненіе  $5q^2-8q-21=0$ , откуда: q'=3,  $q''=-\frac{7}{5}$ . Подставля вмёсто q въ ур.  $x(q^2-1)=120$  сперва 3, потомъ  $-\frac{7}{5}$ , найдемъ: x'=15, x''=125. Искомыя рёшенія будутъ:

$$\div$$
 15: 45: 135;  $\div$  125: -175: +245.

771. Задачи.—1. Найти последній члень и сумму членови прогрессій:

a) 
$$\frac{1}{100}$$
 56 : 28 : 14 : . . . . (12 чл.); b)  $\frac{100}{100}$  2 :  $\frac{2}{7}$  : . . . . (10 чл.);

c) 
$$\frac{...}{...}$$
 3 : 2 :  $\frac{4}{3}$  : . . . . (*n* чл.); d)  $\frac{...}{...}$   $\frac{2}{3}$  :  $\frac{1}{2}$  :  $\frac{3}{8}$  : . . . . (*n* чл.)

e) 
$$\frac{...}{...}$$
  $m^3: m^3n: m^3n^2 \dots (7 \text{ чл.});$  f)  $\frac{...}{...}$   $a: a(1+x): a(1+x)^2 \dots (8 \text{ чл.})$ 

g) 
$$\frac{\dots}{\dots}$$
  $a: \frac{a}{a^2-1}: \frac{a}{(a^2-1)^2}: (10 \text{ q.s.});$  h)  $\frac{\dots}{\dots}$   $b(1+x)^{n-1}: b(1+x)^{n-2}: \dots (n \text{ q.s.})$ 

2. Указать порядокъ члена, превосходящаго 1000, въ прогрессіи

$$\therefore$$
 1:1,01:1,01<sup>2</sup>:1,01<sup>3</sup>:...

- 3. Указать порядовъ члена прогрессіи  $\frac{..}{..}$   $\frac{5}{4}$  :  $\frac{25}{16}$  :  $\frac{125}{64}$  : . . . . , который нав'єрное больше 10.
- 4. Указать порядокъ члена въ ряду  $\frac{...}{...}$   $1:\frac{11}{12}:\left(\frac{11}{12}\right)^3:\ldots$ , навърное меньшаго 0,001.
- 5. Вставить: а) между 3 и  $\frac{16}{2187}$  три среднихъ геометрическихъ; b) между 18 и 13122 иять среднихъ геометрическихъ.
  - 6. Четвертый членъ геом. прогр. есть 9, седьмой = 15; найти прогрессію?
- 7. Даны члены М и N порядковъ m и n въ иткоторой геометрической прогрессіи. Показать, что членъ P порядка p равенъ  $\sqrt{\frac{M^{p-n}}{N^{p-m}}}$ .

8. Если  ${\bf A}$  и  ${\bf B}$  суть члены порядковь p+k и p-k нёкоторой геометрич. прогрессіи, то показать, что

$$p$$
-ый членъ  $= \sqrt{\mathrm{AB}}$  , а  $k$ -ый чл.  $= \mathrm{A} \sqrt[2k]{\left( \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} \right)^p}$  .

9. Найти предѣлъ суммы каждой изъ слѣдующихъ безконечно-убывающихъ прогрессій:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \dots ; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{2}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots$$

- 10. Углы прямоугольнаго треугольника составляють геометрическую прогрессію; вычислить ихъ съ точностью до 1".
- 11. Показать, что если въ геометрич. прог. вычесть каждый членъ изъ предыдущаго, то полученныя разности составять также геометрич. прогрессію.
- 12. Доказать, что въ геом. пр. сумма нечетнаго числа членовъ всегда дёлить сумму ихъ квадратовъ.
- ` 13. Сумма членовъ безконечно-убывающей г. п. вдвое больше суммы ея первыхъ n членовъ; показать, что знаменатель  $=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ .
- 14. Если a, b, c, d . . . . суть n+1 комичествъ, составляющихъ г. п., то показать, что обратныя комичествъ  $a^2-b$ ,  $b^2-c^2$ , . . . . составляють также г. п., и что ихъ сумма =

$$\frac{1}{b^{2n-2}} \times \frac{a^{2n} - b^{2n}}{(a^2 - b^2)^2} \cdot \\$$

15. Показать, что если среднее арием. между а и b вдвое больше средняго геометрич. между этими же числами, то

$$\frac{a}{b} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

- 16. Повазать, что если второй членъ арием. прогр. есть среднее пропорц. между первымъ и четвертымъ, то шестой будетъ среднимъ пропорціональнымъ между четвертымъ и девятымъ.
  - 17. Если  $S_n$  означаеть сумму n первыхъ членовъ г. п., то показать, что

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n = \frac{aq(q^n - 1)}{(q - 1)^2} - \frac{na}{q - 1}$$

- 18. Показать, что въ безконечно-убывающей г. п. каждый членъ всегда находится въ постоянномъ отношени къ суммъ всехъ слъдующихъ членовъ. Каковъ долженъ быть знаменатель, чтобы каждый членъ равнялся р разъ взятой суммъ всехъ слъдующихъ?
- 19. p геометрических прогрессій имбють общаго знамен. q. Первые члены ихъ находятся въ ариометической прогрессіи a, 2a, 3a, . . . , pa. Если въ каждой изъ p данныхъ прогрессій назовемъ сумы первыхъ p членовъ соотвётственно буквами  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $\cdots$ ,  $S_p$ , то доказать, что

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_p = \frac{ap(p+1)}{2} \times \frac{q^p - 1}{q - 1}$$

20. p безвонечно-убывающих  $\mathbf r$ .  $\mathbf n$ .  $\mathbf n$ м  $\mathbf s$ м  $\mathbf r$  первыми членами 1; а знаменателями соотв  $\mathbf r$  технический  $\mathbf r$  суть пред  $\mathbf r$  технический  $\mathbf r$  технически

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S^p} = p - \frac{q(1-q^p)}{1-q}.$$

21. Если  $S_1$  означаетъ предълъ суммы членовъ безконечно-убывающей г. п. съ знаменателемъ q, а  $S_2$  предълъ суммы квадратовъ членовъ той же прогрессіи, то:  $S_2(1+q) = S_1^{\ \ q}(1-q)$ .

22. Пусть 
$$S = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots$$
  
 $s = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ 

будуть суммы членовь двухь безконечно-убывающихь прогрессій. Показать, что предъль суммы  $1+Qq+Q^2q^2+Q^3q^3+\cdots$  равень  $\frac{Ss}{S+s-1}$  .

23. Если положить

$$S=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}+\dots$$
 до безк.,  $S'=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\frac{9}{16}-\dots$  до безк., то  $S=27S'$ .

- 24. Пусть a, q, и s', означають соотвѣтственно-первый члень, знаменателя и предѣль суммы безконечно-убывающей г. п; S'q, q и S'' первый члень, знам., и предѣль суммы второй прогрессіи; S'' q, q и S'''—первый члень, знам. и предѣль суммы третьей; и т. д. Полагая, что  $q < \frac{1}{2}$ , доказать:
- $1^0$ ) что количества a, S'q, S''q, S''q, . . . образують убывающую геометрич. прогр.;  $2^0$ ) вычислить предѣль суммы членовь этой прогрессіи, полагая что она безконечна.
- 25. Соединяють средины A', B', C' сторонь треугольника ABC; затёмь средины сторонь треуг-ка A'B'C', и т. д. до безконечности. Доказать, что предёль суммы площадей всёхь этихь треугольниковь (включая и данный) равень  $\frac{4}{3}$  S, гдё S площадь даннаго  $\triangle$ -ка.
  - 26. Та-же задача, замъняя треугольникъ параллелограммомъ площади m2.
- 27. Въ кругъ радіуса R вписывають квадрать; въ этоть квадрать вписывають кругъ, въ который снова вписывають квадрать и т. д. до безконечности. Найти предёль суммы площадей всёхъ этихъ квадратовъ.
  - 28. Таже задача, замъняя круги шарами, а квадраты кубами.
- 29. Въ шаръ радіуса R вписывають равнобочный цилиндръ, въ этотъ цилиндръ вписывають шаръ и т. д. Найти: 1) предёлъ суммы поверхностей всёхъ шаровъ; 2) предёлъ суммы ихъ объемовъ.
- 30. Данъ 🛆; строять второй 🛆, имѣющій сторонами медіалы перваго; и т. д. до безконечности. Найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ этихъ треугольниковъ.
- 31. Въ прямоугольномъ 🛆 ABC опускають высоту AD на гипотенузу BC; затъмъ проводять перпендикуляръ DE на AC, затъмъ EF на BC, и т. д. безъ конца. Найти предълъ длины ломаной ADEF . . . ? Указать построеніе этого предъла?
- 32. Въ правильный  $\triangle$  ABC (сторона  $\equiv$  a) вписывають кругь, къ которому проводять касательную A'B' параллельно AB. Въ  $\triangle$  CA'B' вписывають второй кругь п т. д. безъ конца. Найти пред $^{1}$ аль суммы площадей вс $^{1}$ ахь круговъ, т. о. построенныхъ.
- 33. Данъ прямой круглый конусъ, котораго сѣченіе по оси представляеть правильный △ со стороною = а. Въ конусъ вписывають шаръ, къ которому проводятъ касательную плоск. нараллельно основанію конуса; въ полученный малый конусъ снова вписывають шаръ, и т. д. безъ конца. Найти предѣлъ суммы объемовъ всѣхъ этихъ шаровъ?

- 34. Въ правильный △ вписывають кругъ; въ этотъ кругъ вписывають правпльный △, въ который снова вписывають кругъ, п т. д. до безконечности. Найти: 1) предѣль суммы сторонъ всѣхъ полученныхъ треугольниковъ; 2) предѣлъ суммы радіусовъ, всѣхъ круговъ; 3) предѣлъ суммы площадей всѣхъ круговъ; 4) пред. суммы площадей всѣхъ треуг-въ; 5) обернувъ каждый △ около одной изъ его высотъ, найти предѣлъ суммы всѣхъ полученныхъ объемовъ.
- 35. Даны два равные полукруга, извив касающеся другь къ другу. Къ нимъ проводять общую касательную и вписывають первый кругь, касательный къ этой прямой и къ даннымъвкругамъ; затвиъ второй кругъ, касательный къ этому кругу и къ обоимъ даниымъ, и т. д. Найти сумму радіусовъ всёхъ этихъ круговъ.

Вывести отсюда тождество

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots = 1,$$

гат число пробей безконечно.

- 36. Построить треугольникь ABC, зная его высоту AD = h, и зная, что эта высота, стороны AB, AC, ее заключающія, и третья сторона BC образують, въ сказанномъ порядкb, геометрическую прогрессію.
  - 37. Найти три числа въ г. п., зная ихъ сумму 126 и произведение 13824.
- 38. Найти четыре числа, составляющія г. п., зная ихъ сумму 40 и сумму ихъ квадратовъ 820.
- 39. Найти четыре числа, образующія г. п., зная, что ихъ сумма = 30, а отношеніе суммы двухъ среднихъ къ послѣднему равно  $\frac{3}{4}$ .
  - 40. Доказать, что корни возвратнаго ур-нія

$$x^4 - bx^3 + ax^2 - bx + 1 = 0$$

могутъ составлять г. п. При какомъ соотношении между а и в это имъетъ мъсто?

- 41. Три цълмя числа образують г. п.; если второе увеличить на 8, прогрессія сдълается ариеметическою; но если послъ этого увеличить послъдній члень на 64, прогрессія снова сдълается геометрическою. Найти эти числа?
  - 42. Доказать тождество

$$x^{4n+2} + y^{4n+2} = [x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - \dots \pm 2xy^{2n}]^2 + [y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x^4 - \dots \pm 2yx^{2n}]^2.$$

### ГЛАВА XLVI.

- О рядахъ вообще; опредъленія. Суммированіе конечныхъ рядовъ. Суммированіе безконечныхъ рядовъ. О сходимости рядовъ. Перемноженіе рядовъ. Задачи.
- 772. Опредъленія. Рядомъ называется рядъ количествъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предшествующаго по одному и тому же закону. Такъ, ариометическая прогрессія есть рядъ, законъ котораго состоитъ въ томъ, что каждое количество составляется изъ предшествующаго приложеніемъ къ нему постояннаго количества.

Геометрическая прогрессія есть рядь, законъ котораго состоить въ томъ, что каждый членъ образуется изъ предшествующаго умноженіемъ на постоянное количество.

Количества, составляющія рядъ, называются *членами* ряда; ихъ обозначають въ общемъ видѣ такъ:  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , . . . ,  $u_n$ , . . . Членъ, которому предшествуетъ n-1 членовъ, т. е. n—ий членъ,  $u_n$ , называется общимъ членомъ ряда. Давая въ алгебранческомъ выраженіи общаго члена  $u_n$  буквѣ n значенія 1, 2, 3, . . . . получимъ послѣдовательно всѣ члены ряда, начиная съ перваго.

Сумму п членовъ ряда обозначають буквою Sa; т. е.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

Рядъ называется конечнымъ, если онъ состоитъ изъ конечнаго числа членовъ; п безконсинымъ, если число членовъ безконечно. Если сумма n членовъ ряда, по мѣрѣ приближенія n къ  $\infty$ , стремится къ опредѣленному конечному предѣлу S, то безконечный рядъ называется сходящимся, а S его суммою; если же сумма  $S_n$ , по мѣрѣ приближенія n къ  $\infty$ , сама приближается къ безконечности, то безконечный рядъ назърасходящимся; само собою разумѣется, что о суммѣ такого ряда не можетъ быть и рѣчи. Можетъ, наконецъ, случиться, что по мѣрѣ приближенія n къ  $\infty$ , сумма ряда не возрастаетъ до  $\infty$ , но и не стремится ни къ какому опредѣлсиному предѣлу; такіе ряды называютъ полусходящимися или колеблющимися; ихъ причисляютъ къ расходящимся.

Тавъ, мы видѣли, что безконечная геометрическая прогрессія, которой знаменатель q есть положительная или отрицательная правильная дробь (-1 < q < +1), имѣетъ конечную и опредѣленную сумму  $\frac{a}{1-q}$ ; такая прогрессія представляетъ, поэтому, примѣръ cxodnuarocn ряда. Если же знаменатель безк. геом. прогрессіи, по абсолютной величинѣ, больше 1, т. е. если q > +1, или q < -1, то сумма прогрессіи будетъ равна  $\pm \infty$ , и сл. прогрессія представляетъ въ этомъ случаѣ рядъ pacxodnuiŭcn. При q = +1, прогрессія также есть рядъ расходящійся. Наконецъ, если q = -1, то прогрессія беретъ видъ

$$\vdots a:-a:+a:-a:$$
.

Сумма ея въ этомъ случат равна или 0, или a, смотря по тому, беремъ ли четное, или нечетное число членовъ; такъ что, по мтрт приближения n въ  $\infty$ , сумма членовъ не стремится ни къ какому опредъленному предълу; однимъ словомъ, при q——1, прогрессия есть рядъ колеблюшийся.

Одинъ изъ важнѣйшихъ вопросовъ, представляющихся въ теоріи рядовъ, относится къ суммированію рядовъ. Суммировать рядо значитъ найти сумму его членовъ, не вычисляя въ отдѣльности каждаго члена. Для рѣшенія этого вопроса не существуеть общихъ правилъ, и самая задача возможна лишь въ исключительныхъ случаяхъ. Въ предшествующихъ главахъ мы имѣли примѣры суммированія членовъ ариеметической и геометрической прогрессіи и одинаковыхъ степеней членовъ первой. Приводимъ еще нѣскољько примѣровъ.

773. Суммированіе конечныхъ рядовъ.—Когда рядъ разлагается на прогрессіи, то формулы суммы прогрессій и дадутъ возможность суммировать рядъ.

Примъръ I.—Найти сумму п членовъ ряда 6 + 66 + 666 + 6666 + . . .

$$1$$
-й членъ =  $6 \times 1$ 

$$2-8$$
 " =  $6 \times 10 + 6$ 

3-
$$\ddot{n}$$
 , =  $6 \times 10^{2} + 6 \times 10 + 6$ 

4-ii  $= 6 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 6 \times 10 + 6$ 

n-й члень  $= 6 \times 10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + 6 \times 10^{n-3} + \dots + 6 \times 10 + 6$ 

Суммируя вертикальные столбцы, какъ геометрическія прогрессін, находимъ

$$S = \frac{6(10^{n} - 1)}{10 - 1} + \frac{6(10^{n-1} - 1)}{10 - 1} + \frac{6(10^{n-2} - 1)}{10 - 1} + \dots + \frac{6(10 - 1)}{10 - 1}$$

$$= \frac{6}{10 - 1} [10^{n} + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10] - \frac{6n}{10 - 1}$$

$$= \frac{60}{(10 - 1)^{2}} \cdot (10^{n} - 1) - \frac{6n}{10 - 1}.$$

Ряды геометрические. — Пусть даны числа α, β, γ, δ, ε, . . . Вычтя каждое число изъ следующаго за нимъ, получимъ числа

$$\beta - \alpha$$
,  $\gamma - \beta$ ,  $\delta - \gamma$ ,  $\varepsilon - \delta$ , . . .

называемыя *первыми разностиями* данныхъ чисель. Обозначая эти разности буквами  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$ , . . . . , вычтемъ каждое число изъ следующаго за нимъ; найдемъ

$$\gamma' - \beta'$$
,  $\delta' - \gamma'$ ,  $\epsilon' - \delta'$ , . . . .

Числа эти называются вторыми разностями данныхъ чиселъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , . . . . Обозначая эти новыя разности буквами  $\gamma'$ ,  $\delta''$ ,  $\epsilon''$ , . . . . составинъ третии разности:

$$\delta'' - \gamma''$$
,  $\varepsilon'' - \delta''$ , . . . .

и т. д. Если первыя разности  $\beta = \alpha$ ,  $\gamma = \beta$ , . . . . постоянны, то говорять, что числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , . . . . образують прогрессію перваю порядка: таковы прогрессіи аривметическія. Если только вторыя разности дѣлаются постоянными, прогрессія называются—втораю порядка. Вообще, прогрессіей т-го порядка называють рядь чисель, которыхь т-ыя разности постоянны.

Напр., числа 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 образують прогрессію 3-го порядка, потому что третьи разности постоянны. Въ самомъ дёлё:

 Первыя разности суть
 3, 6, 10, 15, 21, 28;

 вторыя разности
 3, 4, 5, 6, 7;

 третьи разности
 1, 1, 1, 1.

Геометрическим рядом называють рядь чисель, получаемых оть почленнаго перемноженія геометрической прогрессіи на прогрессію опредёленнаго порядка.

ПРИМВРЪ П.—Суммировать п членовь ряда

Это есть рядь геометрическій, полученный отъ почленнаго перемноженія геомеческой прогрессіи 1, a,  $a^3$ ,  $a^3$ , . . . на прогрессію 1-го порядка 1, 2, 3, 4, . . .

Помноживъ объ части равенства (1) на а, имъемъ

 $aS = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + \cdots + (n-1)a^{n-1} + na^n \dots$ Buth his (2) parented (1), humbers:

$$(a-1)S = -[1+a+a^2+a^3+a^4+\cdots+a^{n-1}]+na^n,$$

HLH

$$(a-1)S = na^n - \frac{a^n-1}{a-1}$$

откуда

Приложение. — Положивъ а = -1 въ предложенномъ рядъ, имъемъ

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots \pm n$$

Формула (3) прямо даетъ

$$S = \pm \frac{n}{2} + \frac{(1 \pm 1)}{4}$$

причемъ верхній знакъ относится къ случаю п нечетнаго, нижній къ случаю п четнаго.

ИРИМЪРЪ III. Суммировать рядь (п членовъ):

$$S = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + \dots + \frac{n}{2}(n+1)a^{n-1}$$

Умноживъ объ части на а и вычтя предложенный рядъ, имъемъ

$$(a-1)S = \frac{n}{2}(n+1)a^n - [1+2a+3a^2+4a^3+\cdots+na^{n-1}] \dots (1)$$

Положивъ  $S' = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + na^{n-1}$ , по предыдущему имѣемъ  $S' = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n-1}{(a-1)^2}$ . Замѣнивъ въ (1) S' его величиною, находимъ

$$(a-1)S = \frac{n}{2}(n+1)a^n - \frac{na^n}{a-1} + \frac{a^n-1}{(a-1)^2},$$

откуда

$$S = \frac{n(n+1)a^n}{2(a-1)} - \frac{2na^n}{2(a-1)^2} + \frac{2(a^n-1)}{2(a-1)^3}.$$

Приложение.—Положивъ a = -1, получинъ

$$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - \cdots \pm \frac{n}{2}(n+1),$$

и формула суммы даеть для этого ряда

$$S = \frac{\pm n(n+1)}{4} \pm \frac{n}{4} + \frac{(1\pm 1)}{8}$$

Изъ приведенныхъ примъровъ видно, что всегда можно найти сумму даннаго числа членовъ геометрическаго ряда порядка m, полагая, что знаменатель геометрической прогрессіи есть  $a^r$ .

Если вев члены положительны, достаточно вычесть сумму S этого ряда изъ произведенія  $a^r$ . S; остатокь  $(a^r-1)S$  будеть содержать новый гоометрическій рядь S' порядка m-1. Вычтя эту сумму S' изъ произведенія  $a^rS'$ , получимь остатокъ  $(a^r-1)S'$ , который будеть содержать новый геометрическій рядь S'' порядка m-2. Продолжають такимь образомь до тёхь порь, нока дойдуть до геом. ряда, котораго разности постоянны,  $\tau$ . е. до геометрической прогрессіи въ собственномъ смысль, сумма которой изв'ястна. Это дасть возможность опред'ялить сумму S'' ряда перваго порядка, а слёд, сумму S' втораго порядка и, наконець, S.

Приводимъ еще примъры суммированія некоторыхъ рядовъ.

Примвръ IV. -- Суммировать п членовъ ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Зам'тивъ, что п-ый членъ м. б. представленъ въ вид'в

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

полагаемъ въ этомъ равенстве  $n=1, 2, 3, \ldots, n$ ; такимъ образомъ все члены разложимъ на разности, и дадимъ ряду видъ:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Замъчая, что второй членъ каждой разности уничтожается съ первымъ членомъ слъдующей, найдемъ, что останутся только крайніе члены; а потому

$$S = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Примъръ V. - Найти сумму п членовъ ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Понытаемся разложить общій членъ на 2 члена, употребляя для этого способъ пеобредёленных коэффиціентовъ; для этого полагаемъ тождество

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{A}{n(n+1)} - \frac{B}{(n+1)(n+2)},$$

въ которомъ A и B независять отъ n. Освободивъ отъ знаменателя, получаемъ тождество 1 = (n+2)A + nB, или

$$(A+B)n+(2A-1)=0$$
, отвуда:  $A=\frac{1}{2}$  и  $B=-\frac{1}{2}$  Слёд.
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Полагая здёсь послёдовательно  $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ , представимъ каждый членъ въ формё разности и дадимъ ряду видъ:

$$S = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right] + \dots + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right],$$

откуда, какъ п въ предыдущемъ примъръ, имъемъ:

$$S = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

ПРИМЪРЪ VI. — Суммировать п членовъ

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}$$

Общій члень  $\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right]$ . Подагая послідователь-

но  $n=1,\,2,\,3,\,\ldots\,,\,n$ , дадимъ первому члену видъ  $\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\Big]$ , второму видъ

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]$$
. третьему видь  $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]$ , и т. д. Сумма ряда будеть

$$S = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right].$$

Члены, начиная съ  $\frac{1}{3}$ , до  $\frac{1}{n}$ , взаимно уничтожаются; такъ-что

$$S = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right]$$

Примьръ VII. — Дана аривметическая прогрессія съ разностью r:

$$-a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot h \cdot k \cdot l$$

1. Найти сумму  $\frac{1}{a \cdot b} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \cdots + \frac{1}{hk} + \frac{1}{kl}$ , или  $\Sigma \frac{1}{ab}$ ?

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} = \frac{r}{ab}$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{c - b}{bc} = \frac{r}{bc}$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{l - k}{bc} = \frac{r}{bc}$$

Складывая эти равенства, находимъ:  $\frac{1}{a} - \frac{1}{l} = r \Sigma \frac{1}{ab}$ , откуда

$$\Sigma \frac{1}{a\overline{b}} = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{l} \right].$$

Эта формула даетъ простое средство суммированія ряда примъра IV; стоптъ тольво положить a=1, r=1, l=n+1, и тотчасъ находимъ

$$S = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2. Найти сумму  $\frac{1}{abc} + \frac{1}{bcd} + \cdots + \frac{1}{hkl}$ , нап, короче,  $\Sigma \frac{1}{abc}$ ? Имфемъ:

$$\begin{split} &\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} = \frac{bc - ba}{ab^2c} = \frac{2r}{abc} \\ &\frac{1}{bc} - \frac{1}{cd} = \frac{cd - bc}{bc^2d} = \frac{2r}{bcd} \\ &\frac{1}{bk} - \frac{1}{kl} = \frac{kl - hk}{hk^2l} = \frac{2r}{kkl}. \end{split}$$

Складывая, найдемъ:  $\frac{1}{ab} - \frac{1}{kl} = 2r\Sigma \frac{1}{abc}$ , откуда

$$\Sigma \frac{1}{abc} = \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{ab} - \frac{1}{kl} \right).$$

По этой формул'в легко суммировать рядъ прим'вра  $\nabla$ ; положивъ  $a=1,\ b=2,\ k=n+1,\ l=n+2,$  тотчасъ им'вемъ:

$$S = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right].$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\Sigma \frac{1}{abcd} = \frac{1}{3r} \left[ \frac{1}{abc} - \frac{1}{hkl} \right]$$
, it t. i.

3. Можно вывести аналогичныя формулы для суммы произведеній посл'єдовательныхъ членовъ ариометической прогрессіи.

Называя  $a_0$  членъ, предтествующій a, п  $l_0$  — слѣдующін за l, нмѣемъ:

Сложеніе даеть:  $ll_0 - aa_0 = 2r$ S, откуда

$$S = \frac{n_0 - aa_0}{2r}.$$

Такъ, взявъ рядъ натуральныхъ чиселъ:  $1+2+3+\cdots+n$ , и положивъ  $a_0=0, a=1, l=n, l_0=n+1, r=1$ , получимъ

$$S = \frac{n(n+1)-1\cdot 0}{2\cdot 1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Такимъ же образомъ:

Сложивъ, получимъ:  $\Sigma ab = \frac{k l l_0 - a_0 ab}{3r}$ .

Такъ, чтобъ суммировать

$$S=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)$$

подагаемъ  $a_0 = 0$ , a = 1, b = 2, k = n, l = n + 1,  $l_0 = n + 2$ , r = 1, п находимъ  $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .

Такимъ же образомъ найдемъ:  $\Sigma abc = \frac{hkll_0 - a_0 abc}{4r}$  а отсюда  $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ .

774. Суммирование безконечныхъ рядовъ. — Если удастся сумму п первыхъ членовъ безконечнаго ряда представить въ видъ функціи отъ п, то вопрось о сумми-

рованія ряда будеть приведень къ вопросу о нахожденій преділа сказанной функцін

при  $n = \infty$ .

,

Такъ, если взять безконечный рядъ

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

то, какъ указано въ примърт IV, сумма n первыхъ его членовъ равна  $1-\frac{1}{n+1}$ ; положивъ здъсь  $n=\infty$ , находимъ въ результатъ 1. Заключаемъ, что предълъ суммы членовъ даннаго ряда есть конечная величина 1. Отсюда видно, что данный рядъ есть сходящися.

Но такой методъ суммированія безконечныхъ рядовъ примѣнимъ лишь въ рѣдкихъ случаяхъ; высшій анализъ показываетъ, что обыкновенно легче дать формулу суммы для всего безконечнаго ряда, чѣмъ для его первыхъ п членовъ. Но какъ скоро данъ безконечный рядъ и поставленъ вопросъ о его суммированіи, то предварительно долженъ быть разрѣшенъ вопросъ о томъ, существуетъ-ли искомая сумма, что бы не пришлось потратить время и трудъ на опредѣленіе такой величины, которая не м. б. опредѣлена; иначе говоря, нужно предварительно изслѣдовать — сходяшійся данный рядъ, или расходяшійся.

775. Условіе сходимости. — Для того, чтобы рядь быль сходяшимся, необходимо, чтобы члены его, начиная съ нъкотораго мьста, болье или менье удаленнаго отъ начала ряда, стремились къ нумо.

Въ самомъ дѣдѣ, если рядъ  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 - u_{n+1} + u_{n+1} + \dots$  есть сходящійся, то онъ имѣеть конечную сумму S. Въ такомъ случаѣ, назвавъ черезъ  $S_{n-1}$  и  $S_n$  суммы первыхъ n-1 и n членовъ, замѣчаемъ, что по мѣрѣ приближенія n въ  $\infty$ , обѣ суммы стремятся къ предѣлу S, т. е.

$$\lim S_n = S, \qquad \lim S_{n-1} = S,$$

откуда, вычитая, находимъ:  $\lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$ ; или, какъ разность предѣловъ равна предѣлу разности перемѣнныхъ, то  $\lim (S_n - S_{n-1}) = 0$ ; но  $S_n - S_{n-1} = u_n$ ; слѣд. въ сходящемся рядѣ

$$\lim (u_n) = 0.$$

Иначе: если въ ряду положительныхъ членовъ члены, котя и уменьшаются, но не стремятся къ нулю, такой рядъ никогда не можетъ быть сходящимся. Въ самомъ дълъ, если всъ члены будутъ больше нъкоторой конечной величины є, то

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots > \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots$$

Вторая часть, содержа безконечное число конечныхъ слагаемыхъ, безконечно велика; тъмъ болъе, свойство это принадлежитъ лъвой части, которая больше правой; слъд. рядъ  $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$  расходится.

Итакъ необходимое условіе сходимости ряда состоить въ томъ, чтобы члены его неограниченно уменьшались, приближаясь въ нулю. Но одного этого условія, по врайней мъръ, для рядовь съ ноложительными членами, еще недостаточно. Въ самомъ дълъ, есть такіе ряды, члены которыхъ хотя и приближаются къ нулю, но сумма ряда не имъетъ конечной величины. Это можно видъть изъ слъдующихъ примъровъ.

1. Члены ряда 
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$
 стремятся въ нулю,

ибо при  $n=\infty$ ,  $\lim u_n=\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\infty}}=0$ . Не смотря на это данный рядъ— расходящійся; въ самомъ дѣлѣ, назвавъ сумму n членовъ его черезъ  $S_n$ , имѣемъ

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

т. е.  $S_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ , или  $S_n > \sqrt{n}$ , откуда, при  $n = \infty$ , имбемъ lim  $S_n = \infty$ : значить, рядь—расходящійся.

2. Для другаго примъра возьмемъ такъ называемый *гармоническій* рядъ, члены котораго суть обратныя величины чиселъ натуральнаго ряда:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

Числы его стремятся въ нулю, ибо  $\lim \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\infty} = 0;$  и однако, это—рядъpacxo-

дишійся. Въ самомъ дѣлѣ, если взять n членовъ за n-мъ, то сумма  $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots$ 

 $\cdots + \frac{1}{2n}$  больше  $\frac{1}{2n}$ , взятой n разь, т. е. больше  $\frac{1}{2}$ . Савд. если сгруппировать члены ряда такъ:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{8}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\cdots$$
то видво, что эта сумма больше

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots;$$

но последняя сумма = 00, след. и гармонич. рядь — безспорно расходящійся.

И такъ, одного приближенія членовъ къ нулю недостаточно для сходимости ряда. Отсюда—необходимость указанія признаковъ, по которымъ можно бы было отличать сходящіеся ряды отъ расходящихся. Укажемъ простібшіе изъ этихъ признаковъ, различая случан: 1) рядовъ, члены которыхъ имінотъ оданаковый знакъ: 2) рядовъ, у которыхъ знаки членовъ міняются

### Признаки еходимости знакопостоянныхъ рядовъ.

776. ТЕОРЕМА В'АЛАМБЕРА.-І. Если вт ряду положентельных членовт

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$$

съ возрастанієм и члень  $u_n$  приближаєтся къ нулю, а отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  къ предълу  $\alpha$ , меньшему 1, то рядь будеть сходяшійся.

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ правильную дробь q, которая заключалась бы между  $\alpha$  и 1 ( $\alpha < q < 1$ ). По условію, отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  приближается къ такому предѣлу  $\alpha$ , который меньше q; но это возможно не иначе, какъ только тогда, когда съ нѣкотораго мѣста ряда отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  сдѣлается и будетъ оставаться < q. Значить, съ этого мѣста будуть справедливы неравенства

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < q, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < q, \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} < q, \quad \cdots$$

Умножая объ части каждаго неравенства на положительного знаменателя, мы этимъ не измънимъ смысла неравенствъ и найдемъ

$$u_{n+2} < q \cdot v_{n+1}; \quad u_{n+3} < q \cdot u_{n+2}; \quad u_{n+4} < q \cdot v_{n+3}; \cdot \cdot \cdot$$

замѣняя во второмъ неравенствѣ  $u_{n+2}$  большею величиною  $qu_{n+1}$ , въ третьемъ  $u_{n+3}$  большимъ количествомъ  $q^2$  .  $u_{n+1}$ , . . . . мы не нарушимъ смысла неравенствъ, и найдемъ

$$u_{n+2} < q \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+3} = q^2 \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+4} < q^3 \cdot u_{n+1}; \dots$$

Сложивъ эти неравенства и прибавляя къ объимъ частямъ и "\_ , имъемъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \cdots < u_{n+1} (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots).$$

Первая часть есть сумма ряда, сл'єдующая за n-мъ членомъ и называемая ocmam-комъ ряда; обозначимъ ее чрезъ  $r_n$ ; безкопечный рядъ въ скобкахъ есть сумма членовъ безконечно-убывающей геометрич. прогрессіи (ибо q < 1), равная копечной величинъ  $\frac{1}{1-q}$ ; такимъ образомъ получаемъ

$$r_n < rac{u_{n+1}}{1-q}$$

Сумма S даннаго ряда состоить изъ  $S_n + r_n$ , гдѣ и  $S_n$  есть конечная величина, какъ сумма конечнаго числа конечныхъ слагаемыхъ. Значить

$$S < S_n + \frac{u_{n+1}}{1-q},$$

е. е. сумма даннаго ряда меньше конечной положительной величины, а потому сама тсть величина конечная, а данный рядь—сходящійся.

II. Если въ ряду положительних иленовъ отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , съ возрастанісмъ п, приближаєтся къ предълу  $\alpha > 1$ , то рядъ есть расходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ между  $\alpha$  и 1 нѣкоторую неправильную дробь q, т. е.  $\alpha > q > 1$ . По условію, отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  приближается къ такому предѣлу  $\alpha$ , который больше q; но чтобы это было возможно, необходимо, чтобы съ нѣкотораго мѣста ряда сказанное отношеніе сдѣлалось и оставалось больше q. Съ этого мѣста, слѣд., возникнуть отношенія, большія q, а потому будуть имѣть мѣсто неравенства

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > q; \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > q; \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} > q, \quad \cdots$$

Изъ нихъ имфемъ

$$u_{n+2} > q \cdot u_{n+1}; \quad u_{n+3} > q \cdot u_{n+2}; \quad u_{n+4} > q \cdot u_{n+3}; \dots$$

а отсюда

$$u_{n+2} > q \cdot u_{n+1}; \qquad u_{n+3} > q^2 \cdot u_{n+1}; \qquad u_{n+4} > q^3 \cdot u_{n+1}; \ldots$$

Складывая и придавая къ объимъ частямъ  $u_{n+1}$ , вивемъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots > u_{n+1} (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$$

Обозначивъ сумму первыхъ n членовъ ряда чрезъ  $S_n$ , и придавъ къ объимъ частямъ это количество, получимъ

$$S_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots > S_n + u_{n+1} (1 + q + q^2 + \cdots)$$

Первая часть представляеть сумму всего ряда; затъмъ, q>1, и слъд.  $1+q++q^2+\ldots=\infty$ ; неравенство означаеть, такимъ образомъ, что данный рядърасходящійся.

Примѣняя эту теорему, должно: составить отношеніе общаго члена къ предыдущему и найти предѣль этого отношенія при  $n=\infty$ . Если окажется, что этоть предѣль <1, заключаемь, что данный рядь есть сходящійся; если предѣль  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  при  $n=\infty$  бу-

деть > 1, рядь будеть расходящійся. Если же окажется, что  $\lim_{n\to \infty} \left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n=\infty}=1$ , наши теоремы ничего не рѣшають относительно сходимости ряда, пбо нервь доказательства—въ томъ, что съ опредѣленнаго мѣста отношеніе  $u_{n+1}:u_n$  должно *оставаться* меньше или больше 1; это предположеніе уже не находить себѣ мѣста, когда сказанное отношеніе имѣеть предѣломъ самую 1, и потому въ послѣднемъ случаѣ рядъ м. б. какъ сходящимся, такъ и расходящимся. Вопросъ рѣшается въ этомъ случаѣ другими признаками.

777. ПРИМЪРЫ. І. Изслюдовать въ отношеніи сходимости ряди

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} + \cdots$$

въ которомъ предполагается х > 0. Имбенъ

$$u_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}, \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)};$$

слёд.  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x}{n+1}$ ; но при всякомъ конечномъ x дробь  $\frac{x}{n+1}$  обращается въ 0 при  $n = \infty$ . Заключаемъ, что рядъ сходится при всякомъ опредъленномъ конечномъ x. Но не лишнее — прямо удостовърнться въ сходимости ряда, ибо съ нерваго

взгляда можеть показаться, что при ивсколько значительной величинь x, напр. при x=10, рядь—какъ будто бы расходящійся, ибо имвемъ:  $1+10+50+\frac{500}{3}+\cdots$ 

Но хотя вначаль члены ряда идуть возрастая, все-таки поздные наступить сходимость, какь въ этомъ можно убъдиться слъдующимъ разсмотрынемъ. Въ § 361, ч. I, мы имъли:

$$\frac{x^k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdot \cdot \cdot k} < \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k.$$

Произвольное цёлое положительное число k выберемъ такъ, чтобы  $\sqrt{k}>x$ , или  $k>x^2$ , и разложимъ рядъ на двё части:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^{2}}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)} + \frac{x^{k}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \frac{x^{k+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k+1)} + \frac{x^{k+2}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k+2)} + \cdots$$

Первая часть есть конечный рядь и имбеть конечную сумиу; вторая часть меньше

$$\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k} + \left(\frac{x}{\sqrt{k+1}}\right)^{k+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{k+2}}\right)^{k+2} + \cdots$$

$$< \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k} + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k+2} + \cdots$$

т. е. меньше суммы геометрич. прогрессіи, представляющей восходящія степени правильной дроби  $\frac{x}{\sqrt{k}}$ . Слёд. данный рядь съ мёста  $k > x^2$  сходится сильнёе сходящейся геометрической прогрессіи, а слёд. есть безспорно сходящійся рядь.

II. Въ рядѣ

$$1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 \cdot x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3x^3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^4 + \dots$$

имѣемъ  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)x$ . Предѣль эгого произведенія, при  $n = \infty$ , безконечень при всякомъ значенія x, отличномъ отъ нуля; если же x = 0, рядъ не существуєть (иб приводится въ 1). Слѣд. если рядъ существуєть, то онъ всегда — расходящійся.

III. Въ рядъ

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots$$

$$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

D'Аламберовой теоремою вопросъ о сходимости ряда не рѣшается; но если замѣтимъ, что члены даннаго ряда соотвѣтственно больше (пачиная со 2-го) членовъ гармоническаго ряда, завѣдомо расходищагося, то расходимость даннаго ряда становится внѣ всякаго сомнѣнія.

IV. Въ рядъ

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

гдѣ x > 0,  $\frac{x^{n-1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = x \cdot \frac{n}{n+1} = x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ ; схѣд. предълъ этого отношенія при

 $n=\infty$ , равень x. Заключаемь, что при x>1 рядь—расходящійся, при x<1 — сходящійся; при x=1 — сомнѣніе. Но, замѣтивь, что въ послѣднемъ случаѣ рядъ обращается въ гармоническій, заключаемь, что п при x=1 опь расходящійся.

778. Въ последнихъ двухъ примерахъ для решения вопроса о сходимости въ сомнительномъ случае, приходилось прибегать къ сравнению даннаго ряда съ другимъ, сходимость или расходимость котораго уже известна.

При сравненін двухъ рядовъ, въ которыхъ члены положительны, можно пользоваться слёдующею теоремою.

Пусть всв члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

положительны и идуть, постепенно уменьшаясь; въ такомъ случав, очевидно, имвемъ соотношенія

$$u_1 = u_1$$
 $2u_2 = 2u_2$ 
 $4u_4 < 2u_3 + 2u_4$ 
 $8u_8 < 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 + 2u_8$ 
 $16u_{16} < 2u_9 + 2u_{10} + 2u_{11} + \cdots + 2u_{16}$ 

Складывая, имфемъ

$$u_1 + 2u_2 + 4u_1 + 8u_8 + 16u_{16} + \cdots + 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots) - u_1$$
. (1)

Если первоначальный рядъ  $u_1+u_2+u_3+\dots$  сходитса, то сумма его конечна, а слъд. правая часть (1) есть также величина конечная; слъд., лъвая и подавно конечна, а потому производный рядъ  $u_1+2u_2+4u_4+\dots$  сходитси, если сходится первоначальный.

Раздѣливъ (1) на 2 и придавъ къ обѣимъ частямъ  $\frac{1}{2}u_1$ , дадимъ неравенству (1) видъ:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots > \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} (u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots).$$

Если производный рядь расходится, то, какъ члены его положительны, сумма его будеть  $=\infty$ , тёмъ болье будеть безконечна сумма первонач. ряда, т. е. если производный рядь — расходящійся, то п начальный таковъ же.

Далье, очевидно, имъють мъсто неравенства

$$u_1 = u_1$$
  
 $2u_2 > u_2 + u_3$   
 $4u_1 > u_4 + u_5 + u_6 + u_7$   
 $8u_8 > u_8 + u_9 + u_{10} + \cdots + u_{13}$   
If T. II.

откуда сложеніемъ паходимъ:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots > u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

Изъ этого неравенства савлючаемъ: 1) если начальный рядъ расходится, то тъмъ болье расходится производный, и 2) если производный сходится, то сходится и начальный.

Результатомъ соединенія этихъ четырехъ предложеній является:

ТЕОРЕМА КОШИ. Два безкопечные ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$
  $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots$ 

сходятся или расходятся одновременно.

Такимъ образомъ о сходимости или расходимости начальнаго ряда можно судить но сходимости или расходимости производнаго.

779. Однимъ изъ замъчательныхъ приложеній этой теоремы является изслъдованіе сходимости ряда

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} \cdots$$

Въ данномъ случав, отношение  $u_{n+1}: u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k;$  предвлъ

его, при  $n=\infty$ , есть 1 : сомнѣніе относительно сходимости ряда. Производный рядъ будетъ:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \cdots = 1 + 2^{1-k} + 4^{1-k} + 8^{1-k} + 16^{1-k} + \cdots$$

$$= 1 + 2^{1-k} + (2^{1-k})^2 + (2^{1-k})^3 + \cdots$$

Но это есть геометрическая прогрессія съ знаменателемъ  $2^{1-k}$ ; для сходимости ея необходимо, чтобы знаменатель быль < 1, т. е. чтобы  $2^{1-k}$  пли  $\frac{2^1}{2^k} < 1$ , т. е. k > 1; во всёхъ другихъ случаяхъ прогрессія расходится. По теоремѣ Коши, и данный рядъ будетъ сходящимся при k > 1, и расходящимся при  $k \le 1$ . Отсюда, напр., прямо видно, что изъ четырехъ рядовъ;

$$\frac{1}{1^{2}} + \frac{1}{2^{2}} + \frac{1}{3^{2}} + \cdots \cdots (1) \qquad \frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$
 (3)  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$  (4)

два первые — сходящієся, послѣдніе два — расходящієся, между тѣмъ какъ для всѣхъ  $\lim (u_{n+1}:u_n)=1$ .

Сомнѣніе, оставляемое теоремою д'Аламбера, можно пногда разрѣшать при помощи слѣдующей теоремы.

**780. Teopena Abstanera.**—Phòs  $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots$  unehu komoparo nocmenehuo уменьшаются, будеть сходящійся, если рядь  $S=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots$  сходящійся, u, начиная съ нъкотораго илена, отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

Hаобороть, первый рядь будеть расходящійся, если второй расходится, и отношенів  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$  .

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ S' сходится, то изъ неравенства  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$  находимъ

$$u_{n+1} < v_{n+1} \cdot \frac{u_n}{v_n} \quad \text{if} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n} \ ;$$

отсюда

$$u_{n+2} < v_{n+2} \cdot \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}, \quad u_{n+3} < v_{n+3} \cdot \frac{v_{n+2}}{v_{n+2}}, \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}, \quad \frac{u_{n+3}}{v_{n+3}} < \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_n}{v_n}, \quad \cdot \quad \cdot$$

Сабдовательно

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots < \frac{u_n}{v_n} (v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \cdots),$$

и это значить, что остатовъ  $R_n$  перваго ряда меньше произведенія остатка  $R'_n$  втораго на  $\frac{u_n}{v_n}$ . Если рядь S' сходяшійся, то  $R'_n$  стремится въ нулю, а потому изъпослёдняго неравенства заключаемъ, что и  $R_n$  стремится въ нулю, и что слёд. рядь S— сходящійся.

Если рядъ S' расходящійся, то условіе  $\frac{u_{n+1}}{v_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$  поведеть къ неравенствамъ, отличающимся отъ вышенацисанныхъ смысломъ; такимъ образомъ, найдемъ, что  $R_n > R'_n \cdot \frac{u_n}{v_n}$ . Но если S' — рядъ расходящійся, то остатокъ  $R'_n$  не стремится къ нулю, а потому н  $R_n$  не стремится къ нулю; слъд. S есть строка расходящаяся. Напр., для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} + \dots$$

найдемъ, что  $u_{n+1}: u_n = \frac{2n-1}{2n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}$ , и слъ. при  $n = \infty$  даетъ 1. Но, срав-

нивая этотъ рядъ съ гармоническимъ, завѣдомо расходящимся, для котораго отношеніе соотвѣтствующихъ членовъ есть  $\frac{n+1}{n+2}$ , находимъ:  $\frac{2n+1}{2n+2} > \frac{n+1}{n+2}$ , а потому заключаемъ, что взятый рядъ — расходящійся.

# Ряды знакоперемѣнные.

**781.** Теорема. Когда знаки иленовъ чередуются  $(+, -, +, -, \ldots)$ , то рядъ будетъ сходящійся, если съ нъкотораго мьста илены сго неопредъленно умень-шаются, приближаясь къ нулю, т. е. если lim  $u_n = 0$  при  $n = \infty$ .

Вь самомъ дѣлѣ, пусть съ опредѣленнаго мѣста n = k, каждый членъ больше слѣдующаго за нимъ, т. е.

$$u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

и кром'в того lim  $u_n = 0$ . Обозначимъ буквами  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , . . . . величины:

$$R_1 = u_k$$

$$R_3 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2})$$

$$R_3 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) - (u_{k+3} - u_{k+3})$$

Замьчая, что всь разности въ скобкахъ положительны, имъемъ

$$R_1 > R_3 > R_5 > R_7$$
 , . . . . . . . . . . . . . . . (1)

Съ другой стороны, положивъ

$$\begin{aligned} & \mathbf{R_2} = (u_k - u_{k+1}) \\ & \mathbf{R_4} = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) \\ & \mathbf{R_6} = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) + (u_{k+4} - u_{k+3}) \end{aligned}$$

имъемъ:  $R_2 < R_4 < R_6 < R_8 \dots (2)$ 

Наконецъ, для неопредъленно возрастающаго т

$$\lim (R_{2m-1}-R_{2m})=\lim u_{k+2m-1}=0.........................(3)$$

Итакъ, если съ мѣста k (съ котораго члены идутъ убывая) брать суммы нечетнаго числа членовъ, и суммы четнаго числа членовъ, то изъ (3) прямо слѣдуетъ, что эти суммы  $R_{2m-1}$  и  $R_{2m}$  приближаются къ нѣкоторому общему предѣлу R; причемъ суммы  $R_{2m-1}$  приближаются къ нему, постепенно уменьшаясь, суммы  $R_{2m}$  постепенно увеличиваясь. Затѣмъ, общій ихъ предѣлъ R, во-первыхъ, положителенъ, какъ непосредстненно ясно изъ неравенствъ (2), а во-вторыхъ, будучи, въ силу неравенства (3), меньше каждой изъ величинъ  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $R_5$ , . . . . , онъ представляетъ опредѣленную вонечную величину. Вслѣдствіе ур-ніа R — lim  $R_{2m-1}$  — lim  $R_{2m}$ :

$$R = u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \cdots$$

а слёд. при данныхъ условіяхъ рядъ  $u_k - u_{k+1} + \cdots$  сходящійся, а потому сходится и первоначальный рядъ

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^{k-1} u_{k-1} + (-1)^k (u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \cdots),$$
II теорема доказана.

Такъ, напр., рядъ  $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$  сходящійся, а сумма его со-держится между слъдующими, болье и болье сближающимися числами

$$1 \quad \pi \quad 1 - \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \pi \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \quad \pi \quad 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$\pi \quad \pi \quad \pi \quad \pi$$

**782.** Теорем А.—Для сходимости ряда, въ которомъ знаки членовъ мъняются по какому угодно закону, достаточно, итобы рядъ оставался сходящимся по перемънъ всъхъ знаковъ на +.

Въ самомъ дѣлѣ, абсолютная величина суммы втораго ряда, очевидно, больше, нежели перваго, такъ какъ во второмъ всѣ члены положительны, а въ данномъ нѣ-которые изъ этихъ членовъ отрицательны. Но, по условію, сумма втораго ряда консчна, слѣд. и сумма даннаго конечна, т. е. данный рядь — сходящійся.

Слёд. о сходимости даннаго ряда можно судить, примёняя въ производному ряду вышенайденные признаки сходимости для рядовъ съ положительными членами.

783. Условная и безусловная сходимость. — Нередко приходится встречаться съ такого рода мивніемъ, что предложеніе, имёющее силу для всякаго вонечнаго числа величинь, должно оставаться вёрнымъ и въ томъ случай, когда число величинь дёлается безконечнымъ. Первый, доказательно убъдившій въ несправедливости такого принцина, быль . Тежень-Дирикле (въ 1837 г.). Онъ ноказаль, что предложеніе о нензмёняемости суммы отъ перемёны мёсть слагаемыхъ, вообще, невёрно для безконечнаго числа слагаемыхъ. Примёръ его быль слёдующій. Возьмемъ рядъ

$$\sigma = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$
 (1)

н сгруппируемъ его члены по четыре:

$$\sigma = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n - 3} - \frac{1}{4n - 2} + \frac{1}{4n - 1} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots$$

гдѣ общая группа есть n-ая. Такимъ образомъ сумма σ равна суммѣ значеній, принимаемыхъ n-ою группою, если въ ней давать n всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до ∞, т. с.

$$\sigma = \sum_{1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\alpha)$$

Затёмъ въ суммё (1) переставимъ члены такъ, чтобы за двумя положительными слёдовалъ отрицательный; получимъ рядъ

$$s = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$
 (2)

и сгруппируемъ его члены по три:

$$s = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{4n - 3} + \frac{1}{4n - 1} - \frac{1}{2n}\right) + \cdots$$

гдъ общая группа есть n-ая. Сумму S можно совращенно представить въ видъ

$$s = \sum_{1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\beta)$$

Наконецъ, сгруппировавъ члены ряда (1) по два, не измѣняя ихъ порядка, получимъ

$$\sigma = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \dots$$

гдъ общая группа есть n-ая. Эту сумму можно представить въ видъ

$$\sigma = \sum_{1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Вычитаніе даетъ:

$$\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Если въ этомъ тождествъ положить послъдовательно  $n=1,\ 2,\ 3,\ldots n,$  сложить результаты и перейти къ предълу  $n=\infty$ , то получится

$$\sum_{1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) - \sum_{1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$$

или  $s=\sigma=\frac{1}{2}\sigma$ , откуда  $s=\frac{3}{2}\sigma$ , т. е. суммы  $\sigma$  и s различны.

Отсюда вытекаетъ необходимость различать два рода сходящихся рядовъ: ряды условно-сходящісся, когда сумма ихъ зависить отъ порядка членовъ, и безусловно-сходящісся, если сумма остается всегда одинаковою, какъ ни переставлять члены. А отсюда задача объ опредъленіи признаковъ безусловной сходимости.

Пусть будеть U<sub>n</sub> сумма нѣкотораго n-членнаго ряда:

и пусть предъль  $U_n$  при  $n=\infty$  будеть опредъленная конечная величина  $U_n$  слъд.

$$U = u_0 - u_1 + u_2 + u_3 + \dots \dots \dots (2)$$

т. е. им'вется рядъ сходящійся. Узнать, будеть-ли новый безконечный рядъ

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \qquad (3)$$

отличающійся отъ перваго только перестановкою членовъ, питть ту же сумму U. Возьмемъ въ новомъ ряду p первыхъ членовъ и положниъ

$$V_p = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{p-1} + \cdots$$
 (4)

Можно взять p настолько большимъ, чтобы всѣ n членовъ суммы  $U_n$  содержались въ суммѣ  $V_p$ . Кромѣ того, пусть въ  $V_p$  будеть еще p-n членовъ, совокупность которыхъ

$$u_a + u_r + u_s + \cdots$$

будеть им'ять индексы  $q, r, s, \ldots$  большіе n-1. Поэтому

$$V_n - U_n = u_n + u_r + u_s + \dots$$

а слъд, при неограниченномъ возрастанін и и р

$$\lim \ \mathbb{V}_p - \mathbb{U} = \lim \ (u_q + u_r + u_s + \dots).$$

Чтобы рядь  $v_0+v_1+v_2+\ldots$  ямёль сумму U, должно быть:  $\lim V_p=U$ , а слёд, должно быть

Это и есть признакъ безусловной сходимости ряда (2).

Можно найти другую форму такимъ путемъ. Если рядъ (2) съ опредъленнаго мъста содержить только положительные члены, то можно п взять на столько большимъ, чтобы въ ур-ніп

$$U - U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

справа находящісся члены всё были положительны; сумма  $u_n + u_{n+1} + \dots$  есть такъ называемый *остатокъ* ряда и имёсть предёломь нуль, ибо при  $n = \infty$  лёвая часть обращается въ  $U = \lim_{n \to \infty} U_n$  т. с. въ ноль.

Далье, что касается суммы  $u_q+u_r+\ldots$ , число членовь которой =p-n, а каждый индексь >n-1, то какъ всь члены положительны, имжемъ

$$0 < u_q + u_r + u_s + \cdots < u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

лед. при n и p приближающихся въ  $\infty$ :

$$\lim (u_q + u_r + u_s + \cdots) = 0;$$

слінд, при взятомъ предположеній рядъ сходится безусловно.

Когда первоначальный рядъ содержить члены, частію положительные, частію отрицательные, и нѣтъ такого мѣста, начиная съ котораго шли бы члены одинаковаго знака, къ такому ряду приведенныя заключенія неприложимы, и сходимость въ этомъ случать возможна только условная.

Но въ частномъ предположенін, что рядъ остаєтся сходящимся, если вмѣсто его членовъ взять ихъ абсолютныя значенія, можно далѣе вести изслѣдованіе. Означая абсолютныя велечины членовъ скобками, пусть рядъ

$$[u_0]+[u_1]+[u_2]+\cdots$$

будетъ сходящійся. По предыдущему

$$\lim \{[u_q] + [u_r] + [u_s] + \cdots \} = 0,$$

т. е. абсолютное значение суммы  $u_q + u_r + \cdots$  м. б. сделано какъ угодно малымъ.

Отсюда же прямо слѣдуеть, что  $u_q + u_r \cdot \cdot \cdot$  также имѣеть предѣломъ нуль, а слѣд. рядъ безусловно сходится. Отсюда

784. Теорем а Шейбнера. — Безконечный рядь сходится безусловно, если сохраняеть сходимость и тогда, когда всь члены его замънимь ихъ абсолютными значеніями.

Этимъ объясняется, почему рядь  $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$  оказался лишь условно сходящимся; въ самомъ дѣлѣ, рядъ изъ абсолютныхъ значеній его членовърасходящійся.

785. Перемноженіе рядовъ.—Теорем А.—Если импемъ два сходящівся рядов  $U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ ,  $V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ 

знакопостоянные, или знакоперемънные, но въ послъднемъ случав такіе, что оба, или, покрайней мъръ, одинъ, напр. U, остается сходяшимся послъ замъны — на +; то доказать, что произведеніе UV выражается безконечнымъ рядомъ

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n + \cdots$$

члены котораго составляются по слыдующему закону:

т. е. что n-ый члент произведенія равент суммю произведеній первых п членовт ряда U на первые n чченовт ряда V, взятых вт обратном порядкю.

Доказать, что UV выражается безконечнымъ рядомъ  $w_1 + w_2 + \cdots$  значитъ доказать, что UV есть предълъ, къ которому приближается сумма n членовъ:

$$W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n$$

при неограниченномъ возрастаніи n. Для этого составимъ разность между суммою  $\mathbf{W}_n$  и произведеніемъ двухъ суммъ

$$U_p = u_1 + u_2 + \cdots + u_p$$
 in  $V_q = v_1 + v_2 + \cdots + v_q$ ,

гдъ p+q=n, причемъ: если n четное, то  $p=q=\frac{n}{2}$ , а при n нечетномъ  $p=\frac{n-1}{2}$  .

 $q=rac{n+1}{2}$ . Всё члены произведенія  $U_pV_q$  содержатся въ суммё  $W_n$ , ибо въ произведеній  $U_pV_q$  индексы при u и v не больше p и q. Вынеся въ  $W_n$  за скобки  $u_1,\ u_2,\ \dots u_n$ , можемъ эту сумму представить въ видё

$$\begin{split} \mathbf{W}_{n} &= u_{1}(v_{1} + v_{2} + \dots + v_{q} + v_{q+1} + \dots + v_{n}) \\ &+ u_{2}(v_{1} + v_{2} + \dots + v_{q} + v_{q+1} + \dots + v_{n-1}) \\ &+ \dots + u_{p}(v_{1} + v_{2} + \dots + v_{q} + v_{q+1}) \\ &+ u_{p+1}(v_{1} + v_{2} + \dots + v_{q}) + \dots + u_{n}v_{1}. \end{split}$$

Составивъ произведеніе  $U_p$   $V_q$  и вынеся также за скобки  $u_1, u_2, \ldots$  имѣемъ:  $U_p$   $V_q = u_1(v_1 + v_2 + \cdots + v_q) + u_2(v_1 + v_2 + \cdots + v_q) + \cdots$ 

$$\cdots + u_n(v_1 + v_2 + \cdots v_a).$$

Вычтя это произведение изъ  $\mathbf{W}_{\mathbf{x}_1}$  находимъ:

$$\begin{aligned} \mathbf{W_n} &- \mathbf{U_p} \mathbf{V_q} = u_1 (v_{q+1} + \dots + v_n) + u_2 (v_{q+1} + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_p v_{q+1} \\ &+ u_{p+1} (v_1 + v_2 + \dots + v_q) + u_{p+2} (v_1 + v_2 + \dots + v_{q-1}) + \dots + u_n v_1. \end{aligned}$$

Ири увеличени n до безконечности, неограниченно возрастають и p и q. Такъ какъ рядъ V сходящійся, то его общій члень  $v_{q+1}$  и суммы  $v_{q+1}+\cdots+v_n$ ,  $v_{q+1}+\cdots+v_n+v_n$ ,  $v_{q+1}+\cdots+v_{n-1},\cdots$  стремятся къ нулю; а суммы первыхъ членовъ:  $v_1+v_2+\cdots+v_q$ ,  $\cdots$ ,  $v_1$  будуть конечны. Подставивъ вмѣсто первыхъ суммъ положительную безконечно-малую величну  $\alpha$ , большую каждой изъ нихъ, а вторыя суммы замѣнивъ положительною величною  $\alpha$ , также большею каждой изъ нихъ, найдемъ, что вторая часть послѣдняго равенства будетъ меньше

$$\alpha(u_1 + u_2 + \cdots + u_p) + \Lambda(u_{p+1} + \cdots + u_n).$$

Но рядъ U сходящійся и, по условію, не теряеть сходимости и послѣ замѣны его членовъ ихъ абсолютными величинами, то сумма  $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ , будучи меньше суммы абсолютныхъ значеній своихъ членовъ, будеть меньше нѣкотораго конечнаго положительнаго количества B, а остатокъ этого ряда  $u_{p+1} + \dots + u_n$  сдѣлается менѣе нѣкоторой положит. безконечно-малой  $\beta$ . Итакъ, при достаточно-большомъ n будеть

$$W_n - U_p V_q < B\alpha + A\beta$$

т. е. наша разность м. б. сдѣлана какъ угодно малою; а потому въ предѣлѣ, при  $n=\infty$ , lim  $(W_n-U_pV_q)=0$ , или W=UV.

#### 786. Задачи.

Суммировать конечные ряды объ и членахъ:

2. 
$$-1+4a^2+9a^4+16a^6+25a^8+\cdots+n^2a^{2n-2}$$
.

3. 
$$-1+5a+12a^{3}+22a^{3}+35a^{4}+\cdots+\frac{n}{2}(3n-1)a^{n-1}$$
.

4. 
$$-1+9a+25a^2+49a^3+\cdots+(2n-1)^2a^{n-1}$$

5. 
$$-1 + 8a + 27a^2 + 64a^3 + 125a^4 + \cdots + n^3a^{n-1}$$

6. 
$$-1+27a+125a^2+343a^3+\cdots+(2n-1)^3a^{n-1}$$

7. 
$$-\frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$$

8. 
$$-1.2^{2}+2.3^{2}+3.4^{2}+\cdots+(n-1).n^{2}$$
.  $(n-1)$  чл.)

9. 
$$-\frac{a}{b} + \frac{a + r}{bq} + \frac{a + 2r}{bq^2} + \frac{a + 3r}{bq^3} + \cdots + \frac{a + nr}{bq^n} \cdot (n + 1 \ \forall x.)$$

10. Суммировать безконечный рядь 
$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \cdots$$

11. — Суммировать безконечное число безконечных прогрессій:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2}} + \frac{1}{2^{3}} + \dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^{2}} + \frac{1}{5^{3}} + \dots + \frac{1}{17^{7}} + \frac{1}{17^{2}} + \frac{1}{17^{3}} + \dots + \frac{1}{4^{n} + 1} + \frac{1}{(4^{n} + 1)^{2}} + \frac{1}{(4^{n} + 1)^{3}} + \dots$$

до безконечности.

Определить сходимость рядовъ:

12. 
$$1+px+\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

гд $^{\pm}$  p и x — положительныя конечныя количества.

13. 
$$\frac{1}{x(x+a)} + \frac{1}{(x+2a)(x+3a)} + \frac{1}{(x+4a)(x+5a)} + \cdots$$

14. 
$$-\frac{3}{2}x + \frac{5}{5}x^2 + \frac{7}{10}x^3 + \frac{9}{17}x^4 + \cdots + \frac{2n+1}{n^2+1}x^n + \cdots$$

15. 
$$-\frac{m+p}{a} + \frac{m+2p}{a^2} + \frac{m+3p}{a^3} + \cdots$$

16. 
$$-(a+1)^2+(a+2)^2x+(a+3)^2x^2+\cdots$$

$$17. -1^2 + 2^2.x + 3^2.x^2 + \cdots$$

$$18 \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{1 + \sqrt{4}} + \cdots$$

19. Первые члены нѣкотораго ряда суть 1, 7 и 19; но забыть законь ряда; извѣстно только, что общій члень  $u_n$  есть цѣлая квадратная функція оть n. Возстановить рядь и доказать, что сумма первыхь n членовь его равна  $n^3$ .

# TABA XLVII.

Распространеніе формулы бинома Ньютона для всякаго д'йствитсльнаго показателя.—
Остатокъ биноміальнаго ряда.— Приложенія.— Задачи.

787. Формула возвышенія бинома въ степень, доказанная для показателя цѣлаго положительнаго, можетъ быть распространена на какой угодно показатель. Замѣтивъ, что  $(a+b)^m$  достаточно разсматривать только при неравныхъ a и b, потому-что при a=b эта степень приводится къ одночлену  $2^m a^m$ , преобразуемъ ее вынесеніемъ a за скобки въ биномѣ a+b; найдемъ  $(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m(1+\frac{b}{a})^m$   $= a^m(1+\frac{b}{a})^m$ , полагая  $\frac{b}{a} = x$ . Вопросъ приводится такимъ образомъ къ разложенію  $(1+x)^m$ .

Когда показатель m — число цёлое и положительное, мы имёли прй всикомъ x конечный рядъ

$$(1+x)^{m} = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{3} + \cdots + \frac{m(m-1) \cdot \cdots \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k}x^{k} + \cdots + x^{m},$$

содержащій m+1 членовъ. Коэффиціенты при степеняхъ x представляли числа сочетаній изъ m элементовъ по 1, по  $2,\ldots$ , по  $k,\ldots$ . Условившись обозначать эти числа буквою m съ индексами 1, 2, 3, . . . . , т. е.

$$\frac{m}{1} = (m)_1; \quad \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = (m)_2; \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = (m)_3, \quad \text{Booding}$$

$$\frac{m(m-1)\cdot\cdot\cdot(m-k+1)}{1} = (m)_k \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

можемъ короче написать разложение въ формъ:

$$(1+x)^{m}=1+(m)_{1}x+(m)_{2}x^{2}+(m)_{3}x^{3}+\cdots+(m)_{k}x^{k}+\cdots+(m)_{m}x^{m}\cdots (2)$$

Спрашивается: если m не есть цѣлое положительное число, то можно-ли представить  $(1+x)^m$  въ видѣ ряда, расположеннаго по восходящимъ степенямъ буквы x, съ коэффиціентами закона, выражаемаго формулою (1)?

Здёсь прежде всего замёчаемь, что коэффиціенть

$$(m)_k = \frac{m(m-1)\cdot \cdot \cdot \cdot (m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdot \cdot \cdot k} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

при m цѣломъ положительномъ можетъ обратиться въ нуль, вслѣдствіе чего рядъ (2) будетъ законченный. Но если m—число отрицательное или дробное, то число членовъ ряда будетъ безконечно. Дѣйствительно, при m отрицательномъ множители m, m-1, m-2, . . . . числителя выраженія  $(m)_k$  будутъ идти увеличиваясь по абсолютной величинѣ, и потому ни одинъ коэффиціентъ ряда не можетъ сдѣлаться нулемъ. Когда m— лробь, то и всѣ множители m-1, m-2, . . . . будутъ дроби, и не могутъ обратиться въ ноль: рядъ биноміальныхъ коэффиціентовъ будетъ безконеченъ. Слѣд., если только возможно разложеніе въ рядъ закона (2) бинома  $(1+x)^m$ , гдѣ m не есть цѣлое положительное число, то такой рядъ долженъ быть безконечный. Это замѣчаніе заставляетъ формулировать нашу задачу окончательно такъ: безконечный рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ буквы x, съ коэффиціентами закона (1), при m не цѣломъ и положительномъ, т. е. рядъ

$$1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \dots + m_k x^k + \dots$$
 (3)

можеть-ин представлять разложение степени бинома  $(1+x)^m$ ? Для рёшения вопроса нужно найти сумму этого ряда; если окажется, что эта сумма  $=(1+x)^m$ , вопрось будеть рёшень въ утвердительномъ смыслё; если окажется, что сумма не равна  $(1+x)^m$ ,—въ отрицательномъ смыслё. Но о суммировании безконечнаго ряда рёчь можеть быть только тогда, когда мы напередъ знаемъ, что это-рядъ сходящійся; поэтому прежде всего необходимо опредълить, при какихъ условіяхъ рядъ (3) будеть сходящимся рядомъ, если сходится рядъ, составленный изъ абсолютныхъ значеній его членовъ. Итакъ, нужно взять предъль отношенія  $m_{n+1}x^{n+1}$ :  $m_nx^n$  при  $n=\infty$ . Имфемъ:

$$\lim \left\{ m_{n+1} x^{n+1} : m_n x^n \left\{ = \lim \frac{m-n}{n+1} \cdot x = \lim \left\{ -x + \frac{m+1}{n+1} x \right\} \right\} \cdot$$

При  $n=\infty$ , при всёхъ конечныхъ значеніяхъ m и x, второй членъ обращается въ ноль, и слёд.

$$\lim \left\{ m_{n+1} x^{n+1} : m_n x^n \right\} = -x.$$

Заключаемъ, что рядъ будетъ еходящимся, когда абсолютная величина — x будетъ <1, т. е. когда -1 < x < +1, или, короче, когда  $x^2 < 1$ ; если же абсолютная величина количества (-x) будетъ >1, рядъ — расходящійся. При  $x=\pm 1$  — сомнѣніе; рѣшенія вопроса въ этомъ случаѣ мы касаться не будемъ, въ виду его сложноств. Итакъ, полагая -1 < x < +1, найдемъ сумму ряда (3). Обозначивъ эту сумму чрезъ  $S_m$ , гдѣ значекъ m показываетъ, что эта сумма зависитъ отъ m, имѣемъ

$$S_m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \cdots$$

Перемънивъ т на другое дъйствительное количество р, получимъ:

$$Sp = 1 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots$$

Такъ какъ оба эти ряда сходятся безусловно при  $x^2 < 1$ , то можно приложить къ нимъ теорему о перемножении рядовъ; найдемъ:

$$S_{n}.S_{p} = 1 + (m_{1} + p_{1})x + (m_{2} + m_{1}p_{1} + p_{2})x^{2} + \cdots + (m_{n} + m_{n-1}p_{1} + m_{n-2}p_{2} + \cdots + m_{n-1}p_{n-1} + p_{n-1}p_{n-1} + p_{$$

Доважемъ, что коэффиціенты его составлены изъ m+p по такому же закону, какъ коэффиціенты рядовъ  $S_m$  и  $S_p$  составлены изъ m п p. Во-первыхъ, такъ какъ  $m_1=m$  п  $p_1=p$ , то  $m_1+p_1=m+p$ . Затъмъ:

$$m_2 + m_1 p_1 + p_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + mp + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} = \frac{m(m+1) - mp}{1 \cdot 2} + \frac{mp + p(p-1)}{1 \cdot 2} = \frac{m(m+p-1) + p(m+p-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(m+p)(m+p-1)}{1 \cdot 2},$$

а это есть ничто иное вакь  $(m+p)_{2}$ .

Чтобы доказать, что

$$m_n + m_{n-1}p_1 + m_{n-2}p_2 + \cdots + m_2p_{n-2} + m_1p_{n-1} + p_n = (m+p)_n$$
. . . . (5) допустимъ, что равенство (5) върно, и докажемъ, что следующій коэффиціентъ есть  $(m+p)_{n+1}$ . Но этотъ следующій коэффиціентъ есть

$$m_{n+1} + m_n p_1 + m_{n-1} p_2 + \cdots + m_2 p_{n-1} + m_1 p_n + p_{n+1}$$

Чтобы онъ былъ равенъ  $(m+p)_{n+1}$ , нужно, чтобы онъ представлялъ произведение предыдущаго воэффиціента, по допущенію, равнаго  $(m+p)_n$ , на  $\frac{m+p-n}{n+1}$ . Составляемъ это произведеніе:

$$(m_n + m_{n-1}p_1 + m_{n-2}p_2 + \cdots + m_2p_{n-2} + m_1p_{n-1} + p_n) \cdot \frac{m+p-n}{n+1} \cdot \cdots (6)$$

Члены этого произведенія им'єють видь  $m_h p_{n-h} \cdot \frac{m+p-n}{n+1}$ , а это выраженіе можно представить въ форм'є

$$m_h p_{n-h} \cdot \frac{m-h}{m+1} + m_h p_{n-h} \cdot \frac{p+h-n}{n+1}$$
;

но  $m_h \cdot \frac{m-h}{h+1} = m_{h+1}$ ; это равенство можно представить въ видъ  $m_h(m-h) = m_{h+1}(h+1)$ ; а на основании этого равенства имъемъ

$$p_{n-h}(p+h-n)=p_{n-h+1}(n-h+1).$$

Саѣд.

$$u_{h}p_{n-h}\cdot\frac{m+p-n}{n+1}=m_{h}p_{n-h+1}\cdot\frac{n-h+1}{n+1}+m_{h+1}p_{n-h}\cdot\frac{h+1}{n+1}$$

Подагая здёсь послёдовательно  $h=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$  получимъ всё члены произведенія (6):

$$p_{n+1} + m_1 p_n \cdot \frac{1}{n+1} + m_1 p_n \cdot \frac{1}{n+1} + m_2 p_{n-1} \cdot \frac{2}{n+1} + m_2 p_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n+1} + m_3 p_{n-2} \cdot \frac{3}{n+1} + m_3 p_{n-2} \cdot \frac{n-2}{n+1} + \cdots + m_{n-2} p_3 \cdot \frac{n-2}{n+1}$$

$$+ m_{n-2} p_3 \cdot \frac{3}{n+1} + m_{n-1} p_2 \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

$$+ m_{n-1} p_2 \cdot \frac{2}{n+1} + m_n p_1 \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$+ m_n p_1 \cdot \frac{1}{n+1} + m_{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Суммируя по діагоналямъ, пывемъ:

$$p_{n+1} + m_1 p_n + m_2 p_{n-1} + \cdots + m_{n-1} p_2 + m_n p_1 + m_{n+1};$$

я это есть ви что иное, какт  $(m+p)_{m+1}$ .

Итакъ, допустивъ, что коэффиціентъ при  $x^n$  есть  $(m+p)_n$ , мы доказали, что слѣдующій коэффиціентъ есть  $(m+p)_{n+1}$ . Но непосредственнымъ вычисленіемъ мы убѣдились, что третій коэффиціентъ  $=(m+p)_2$ : сл., по доказанному, четвертый  $=(m+p)_3$ , пятый  $(m+p)_4$  п т. д. Такимъ образомъ, ур-ніе (4) принимаетъ видъ

$$S_m.S_p = 1 + (m+p)_1x + (m+p)_2x^2 + (m+p)_3x^2 + \cdots + (m+p)_nx^n + \cdots$$

$$S_m.S_p=1+\frac{m+p}{1}\cdot x+\frac{(m+p)(m+p-1)}{1}x^2+\frac{(m+p)(m+p-1)(m+p-1)(m+p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

Вторая часть представляеть рядь, составленный по тому же закону, какъ ряды  $S_m$  и  $S_p$ , съ тою разницею, что вибсто m или p находится m+p; сл. рядъ этотъ мы можемъ обозначить тёмь же знакомъ S, но съ указателемъ m+p. Слъд.

Положивъ m = p, имѣемъ:

$$S_m \cdot S_m = S_{2m}$$
, him  $[S_m]^2 = S_{2m}$ .

Помноживъ обѣ части на  $\mathbf{S}_m$  и примѣнивъ въ произведенію  $\mathbf{S}_{2m}, \mathbf{S}_m$  формулу (7). имѣемъ

$$[S_m]^3 = S_{3m}$$
.

Продолжая такимъ же образомъ, получимъ для какого угодно цълаго числа k:

$$[S_m]^k = S_{km}$$
.

Если теперь m есть положительная дробь  $= \frac{q}{r}$ , гд $^{*}$  q и r — ц $^{*}$ лыя положительныя числа, то мы можемъ произвольное ц $^{*}$ длое k взять равнымъ знаменателю r, п получимъ

$$\left[S_{\frac{q}{\epsilon}}\right]^r = S_q.$$

Такъ какъ q есть цёлое положительное число, то  $S_q$  представляеть, какъ извёстно. конечный рядъ, сумма котораго равна  $(1+x)^q$ ; слёд.

$$\left[S_{\frac{q}{r}}\right]^r = (1+x)^q;$$

повлекая изъ объихъ частей корень порядка г, имъемъ

$$S_{\underline{q}} = (1 + x)^{\frac{q}{r}};$$

этимъ и доказано, что  $(1+x)^{\frac{q}{r}}$  разлагается въ безконечный рядъ того же закона. какъ и при цѣломъ показателѣ.

Если въ равенствъ (7) положимъ, что m есть число отрицательное, цълое или дробное, и что p = -m, то равенство это дастъ

$$S_m \cdot S_{-m} = S_{m-m} = S_0$$

Ho  $S_0 = 1$ ; слъд. и  $S_m \cdot S_{-m} = 1$ , откуда

$$S_m = \frac{1}{S_{-m}}$$

Здёсь — m > 0, а для этого случая доказать, что  $S_{-m} = (1+x)^{-m}$ ; сл.

$$S_m = \frac{1}{(1+x)^{-m}} = (1+x)^m$$
:

этимъ формула бинома доказана для отрицательнаго показателя.

Итакъ, мы доказали справедливость формулы для всякаго соизмѣримаго показателя. Чтобы распространить это ур. на несоизмѣримое m \*), пусть будетъ  $\mu$  — соизмѣримое число, безконечно къ нему близкое, и  $\alpha$  безконечно-малая разность m— $\mu$ . Формула (7) даетъ:

$$S_m = S_{\mu_+\alpha} = S_{\mu} \cdot S_{\alpha}$$
.

Но  $\mu$  — число сонзмѣримое, слѣд.  $S_{\mu} = (1+x)^{\mu}$ ; затѣмъ, формула (3) даетъ

$$S\alpha = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \alpha \left\{ x + \frac{\alpha - 1}{2} \cdot x^2 + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2 \cdot 3} x^3 + \cdots \right\}$$

Рядъ въ скобкахъ — сходящійся, потому что отношеніе каждаго члена къ предыдущему въ предъяв даетъ — x, что по абсолютной величинs < 1; след. сумма этого ряда есть явкоторая конечная величина A; а потому

$$S_{\alpha} = 1 + \alpha A$$
,  $H S_{m} = (1 + x)^{\mu} (1 + \alpha A)$ .

По мёрё приближенія  $\mu$  въ m,  $\alpha$  приближается въ 0, слёд.  $1+\alpha A$  — въ 1, а вторая часть въ  $(1+x)^m$ ; а какъ эта часть всегда —  $S_m$ , то

$$S_m = (1+x)^m.$$

Итакъ, при всякомъ дъйствительномъ т

$$(1+x)^{m} = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{3} + \cdots$$

причемъ, когда m — цѣлое положительное число, x можетъ быть какою угодно дѣйствительною величиною; если же m не есть цѣлое положит. число, то должно быть — 1 < x < 1.

Примъчаніе. 1. Идея вышензложеннаго доказательства общности формулы бинома Ньютона принадлежить Эйлеру; а усовершенствованное доказательство — Коши.

Примъчаніе 2. Творвма. — Одна и таже функція разлагается въ сходящійся рядь, расположенный по цълымъ положительнымъ степенямъ перемъннаго, единственнымъ способомъ. — Въ самомъ дѣлѣ, пусть, если возможно, будуть два различныя разложенія одной и той же функціи.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
  $a_n x^n + \cdots$   $a_n x^n + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 

сходящіяся то и другое при всѣхъ значеніяхъ x, меньшихъ X, по абс. значенію. Такъ какъ, по усл., оба эти разложенія должны имѣть равные предѣлы для всякаго x < X, то для этихъ значеній перемѣннаго должно быть

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots=\varepsilon_n,$$

гдѣ  $\epsilon_n$  — разность остатковъ рядовъ, которая, какъ и эти остатки, д. б. безконечно

<sup>\*)</sup> Опредъление степени съ несоизмъримымъ показателемъ см. далъе, § 792.

малою при  $n = \infty$ , при всякомъ x < X. Какъ бы велико ни было значеніе, взятое для n, всегда можно взять x настолько малымъ, чтобы совокупность членовъ  $(a_1-b_1)x-\cdots-(a_n-b_n)x^n$  была какъ угодно мала, а отсюда слъдуетъ, что  $a_0-b_0$  равно разности двухъ безв. малыхъ. Слъд., какъ  $a_0-b_0$  не зависить ни отъ n, ни отъ x, то оно строго равно нулю (на основаніи очевидной истины: постоянное, о которомъ можно доказать, что оно менѣе всякой данной величины, есть ноль; короче: постоянная безконечно-малая есть ничто иное какъ ноль). Такимъ образомъ  $a_0=b_0$  и равенство приводится къ

$$x[(a_1-b_1)+(a_2-b_2)x+\cdots+(a_n-b_n)x^{n-1}]=\hat{s}_n;$$

но чтобы первая часть была безконечно мала при всакомъ x < X, необходимо, чтобы скобки были безк. малы, откуда, по предыдущему, заключаемъ, что  $a_1 - b_1 = 0$ , т. е.  $a_1 = b_1$ . Предолжая такимъ образомъ, убъдимся, что всъ коэффиціенты равны каждый каждому.

Примъчаніе 3.—Эту теорему (служащую основаніемъ способа неопредѣл. воэф-въ для безконечныхъ строкъ) можно примѣнять къ разложенію функцій въ безконечные степенные ряды, но только въ такомъ случаѣ, когда напередъ м. б. доказано, что функція способна разлагаться въ сходящійся степенной рядъ: въ противномъ случаѣ способъ этотъ можетъ привести къ невѣрнымъ результатамъ, такъ какъ въ немъ не обращается вниманія на остатокъ ряда. Кромѣ того, по этому способу трудно бываетъ найти общую формулу для членовъ ряда. Въ виду этого какъ для бинома, такъ и для другихъ функцій у насъ указаны другіе, болѣе строгіе, пріемы разложенія въ ряды.

788. Остатонъ биноміальнаго ряда. Разложимъ биноміальный рядъ на дв $^{\ddagger}$  части, изъ которыхъ первая пусть содержитъ первые k членовъ, а вторая, которую мы назовемъ остально улова и обозначимъ чрезъ  $R_k$ , остальные члены.

Итакъ, положимъ:

$$(1+x)^m = 1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \dots + m_{k-1}x^{k-1} + R_k \dots$$
 (1) гдё остатовь  $R_k$  будеть

$$R_k = m_k x^k + m_{k+1} x^{k+1} + m_{k+2} x^{k+2} + \dots$$

дѣсь

$$m_k = \frac{m(m-1) \cdot \cdot \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot k};$$

$$m_{k+1} = \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1)} = m_k \cdot \frac{m-k}{k+k};$$

$$m_{k+2} = \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k) \cdot (m-k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k+1)(k+2)} = m_k \cdot \frac{(m-k) \cdot (m-k-1)}{(k+1)(k+1)}; \text{ if T. I.}$$

Вынеся во всехъ членахъ за скобки  $m_k$   $x^k$ , получимъ

$$R_k = m_k x^k \left\{ 1 + \frac{m-k}{k+1} x + \frac{(m-k)(m-k-1)}{(k+1)(k+2)} x^2 + \cdots \right\} \cdot \cdots \cdot (2)$$

Различаемъ следующие случан.

1 случай: m — uльлое положительное число. — Понятно, что въ этомъ случаk < m, рядъ будетъ конечный объ (m+1) членахъ, п если:

 $1.\ x>0$ , то сумма въ скобкахъ (2) будетъ больше нуля. Съ другой стороны. если во множителяхъ числителей коэффиціентовъ отбросимъ вычитаемыя, а во множителяхъ знаменателей вторые члены, то всѣ коэффиціенты, увеличатся, п рязъвъ скобкахъ будетъ меньше

$$1 + \frac{m}{k} \cdot x + \frac{m^2}{k^2} \cdot x^2 + \frac{m^3}{k^3} \cdot x^3 + \cdots,$$

m. е. конечной геометрической прогрессіи, которой знаменатель  $m = \frac{mx}{k}$ , а послѣдній  $m = \frac{mx}{k}$ 

тленъ 
$$\left(\frac{m}{k}x\right)^{m-k}$$
; потому сумма ея  $=$ 

$$\frac{1-\left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1-\frac{mx}{k}}.$$

Такимъ образомъ остатокъ Rk, заключаясь между О и

$$m_k x^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1 - \frac{mx}{k}},$$

завенъ произведенно послъдняго выраженія на нъкоторую положительную правильную гробь р; т. е.

(I) 
$$R_k = \rho \cdot m_k x^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1 - \frac{mx}{k}}$$
, rest  $0 < \rho < 1$ .

2. x < 0. Нѣкоторые члены будуть положительные, другіе отрицательные; и если словимся абсолютную величину количества s обозначать знакомъ [s], то сумма въ кобкахъ (2) будеть содержаться между

$$-\left\{1+\left[\frac{mx}{k}\right]+\left[\frac{mx}{k}\right]^2+\cdots\right\} \quad \mathbf{H} \quad +\left\{1+\left[\frac{mx}{k}\right]+\left[\frac{mx}{k}\right]^2+\cdots\right\},$$

такъ-что легко заключить, что въ этомъ случав

(II) 
$$R_k = \rho \cdot m_k x^k \cdot \frac{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1}}{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]}, \quad \text{for } k^* - 1 < \rho < +1,$$

т. е. р есть положит или отрицат. правильная дробь.

Формулы (I) и (II) можно соединить въ одну, одинаковаго вида съ послѣдней, замѣтивъ только, что при x>0 должно быть и  $\rho>0$ .

Въ частномъ случав, когда  $\frac{mx}{k}$  есть правильная дробь, будеть и

$$1 - \left\lceil \frac{mx}{k} \right\rceil^{m-k+1} < 1;$$

произведение этой правильной дроби на дробь ho < 1 дасть также правильную дробь; назвавь носледнюю буквою ho', получимь для этого случая более простую формулу:

(III) 
$$R_k = \frac{\rho' \cdot m_k x^k}{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]}, \text{ гд%} - 1 < \rho' < +1.$$

 $\mathbf A$  здѣсь также при x>0 будеть  $\mathbf p'>0$ .

**2-й случай:** m - dpoбное положительное число. — Биноміальный рядъ будетъ безконечный и сходящійся при -1 < x < +1; тоже самое относится и къ ряду (2).

Возьмемъ произвольное цѣлое положительное число k>m, и разсмотримъ опять два случая — положительнаго и отрицат. x, именно:  $x=+\xi$ ,  $x=-\xi$ .

Въ первомъ случат рядъ (2) будетъ

$$1 - \frac{k - m}{k + 1} \cdot \xi + \frac{(k - m)(k - m + 1)}{(k + 2)(k + 2)} \cdot \xi^{2} - \dots$$
 (3)

во второмъ:

$$1 + \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi + \frac{(k-m)(k-m+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \xi^{2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

Такъ какъ факторы

$$\frac{k-m}{k+1}$$
,  $\frac{k-m+1}{k+2}$ ,  $\frac{k-m+2}{k+3}$ , ...

суть положительныя правильныя дроби,  $\xi$  также <1, то въ обопхъ рядахъ каждый членъ больше слѣдующаго; отсюда легко заключить, что сумма ряда (3) заключается между 1 и  $1-\frac{k-m}{k+1}$   $\xi$  и потому положительна; также непосредственно видно, что и сумма (4) положительна. Затѣмъ, очевидно, что сумма перваго менѣе суммы втораго, а эта послѣдняя меньше  $1+\xi+\xi^2+\xi^3+\cdots=\frac{1}{1-\xi}$ . Воборазивъ между  $\xi$  и 1 еще правильную дробь ( $\xi<\varepsilon<1$ ), имѣемъ

$$\frac{1}{1-\xi} < \frac{1}{1-\varepsilon};$$

сумма каждаго изъ рядовъ (3) и (4) содержится между 0 и  $\frac{1}{1-\epsilon}$ ; поэтому ту и другую можно представить подъ общимъ видомъ  $\frac{\rho}{1-\epsilon}$ , гдѣ  $\rho$  положит. прав. дробъ. Итавъ, для остатка имѣѐмъ формулу

(IV) 
$$R_k = \frac{\rho \cdot m_k x^k}{1 - \epsilon}$$
,

въ которой: [x]<arepsilon<1, k>m, 0<
ho<1, п [x] означаетъ абсолютную величину x.

3-й случай: m — отрицательное число; пусть m —  $\lambda$ . Рядъ (2) при x > 0 будетъ

$$1 - \frac{k+\lambda}{k+1}\xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^{2} - \cdot \cdot \cdot (5)$$

а при x < 0:

$$1 + \frac{k+\lambda}{k+1}\xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^{2} + \cdots$$
 (6)

Въ виду того, что  $\frac{k+\lambda}{k+1} \cdot \xi$  при неограниченномъ возрастаніи k приближается

къ предълу  $\xi$  ибо  $\lim_{k \to 1} \frac{k+\lambda}{k+1} \xi = \lim_{k \to 1} \frac{1+\frac{\lambda}{k}}{1+\frac{1}{k}} \cdot \xi = \xi$ , и какъ  $\xi < 1$ , то можно

для k выбрать на столько большое значеніе, чтобы

$$\frac{k+\lambda}{k+1} \cdot \xi < \varepsilon$$
,

гдѣ в прав. дробь, лежащая между ξ п 1. Въ самомъ дѣлѣ, предыдущее неравенство даетъ

$$k > \frac{\lambda \xi - \epsilon}{\epsilon - \xi}$$
,

з это требованіе всегда м. б. выполнено. Какъ скоро для k выбрано такого рода значеніе, то тѣмъ въ большей мѣрѣ справедливы будутъ неравенства

$$k+1>\frac{\lambda\xi-\varepsilon}{\varepsilon-\xi}, \ k+2>\frac{\lambda\xi-\varepsilon}{\varepsilon-\xi}, \ \cdots$$

нли

$$\frac{k+\lambda+1}{k+2}\cdot\xi < \varepsilon$$
,  $\frac{k+\lambda+2}{k+3}\cdot\xi < \varepsilon$ , . . . .

слѣдовательно

$$\frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \xi^2 < \varepsilon^2 , \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)(k+\lambda+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \xi^3 < \varepsilon^3, \text{ и т. д.}$$

Суммы рядовъ (5) и (6) будутъ, след., положительны и мене

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots=\frac{1}{1-\varepsilon},$$

п потому могутъ быть представлены подъ общимъ видомъ  $\frac{\rho}{1-\epsilon}$ ; и для остатка имѣемъ выраженіе

$$(V) \quad \mathbf{R}_k = \frac{\rho \cdot m_k x^k}{1 - \epsilon},$$

Fig. [x] 
$$< \epsilon < 1$$
 ,  $k > \frac{[mx] - \epsilon}{\epsilon - [x]}$ ,  $0 < \rho < 1$ .

Это изследованіе можно резюмировать такъ:

Eсли m не есть цълое положительное число и  $x^2 < 1$ , то остатокъ Hьютонова ряда выражается общею формулою

$$\mathbf{R}_k = \frac{\rho - m_k x^k}{1 - \varepsilon},$$

 $\operatorname{rath} [x] < \varepsilon < 1, \quad 0 < \rho < 1;$ 

причемъ слъдуетъ братъ: k>m, если т положительно, и  $k>\frac{[mx]-\varepsilon}{\varepsilon-|x|}$ , всли т отрицательно.

789. Примъры. — Примъняя формулу бинома, найдемъ:

1. 
$$(1 \pm x)^{\frac{3}{2}} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 \mp \cdots$$

2. 
$$(1 \pm y)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{2}y - \frac{1}{2 \cdot 4}y^2 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}y^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}y^4 \pm \cdots$$

3. 
$$(a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1} \left\{ 1 \pm \frac{x^2}{2a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^8} + \dots \right\}$$

и т. п.

790. Приложенія формулы бинома Ньютона. — Укажемъ пѣкоторыя приложенія формулы бинома.

I. Извлечение корней.—Пусть дребуется извлечь корень порядка r изълдаго числа N. Разобьемъ N на двѣ части такъ, чтобы первая  $a^r$  представляла точную r-овую степень и была бы возможно больше по сравненію съ другою частью b, которую въ этихъ видахъ можно брать п отрицательною. Всегда можно взять  $a^r > b$ . Получимъ:

$$\sqrt[r]{N} = \sqrt[r]{a^r + b} = \sqrt[r]{a^r (1 + \frac{b}{a^r})} = a(1 + \frac{b}{a^r})^{\frac{1}{r}} = a(1 + x)^{\frac{1}{r}}, \text{ nonaras } \frac{b}{a^r} = x.$$

Применяя формулу бинома, набдемъ

$$\sqrt[7]{N} = a \left[ 1 + \frac{x}{r} - \frac{(r-1)}{1 \cdot 2} \left( \frac{x}{r} \right)^2 + \frac{(r-1)(2r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{x}{r} \right)^3 - \dots \right]$$
Напр.
$$\sqrt[3]{129} = \sqrt[3]{125 + 4} = 5 \left( 1 + \frac{4}{125} \right)^{\frac{1}{8}} =$$

$$= 5 \left[ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{125} - \frac{2}{3 \cdot 6} \left( \frac{4}{125} \right)^2 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \left( \frac{4}{125} \right)^3 - \dots \right]$$

$$= u_0 + u_1 - u_2 + u_3 - u_2 + \dots$$

$$u_0 + u_1 = 5 + \frac{16}{3 \cdot 100} = 5,0533333333$$

$$u_2 = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{125} \cdot u_1 = \frac{32}{3 \cdot 1000} u_1 = \frac{0,0005688889}{5,0527644444}$$

$$u_3 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{125} u_2 = \frac{16}{9 \cdot 100} u_2 = \frac{0,0000101136}{5,0527745580} \left( + \right)$$

$$u_4 = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{125} u_3 = \frac{64}{3 \cdot 1000} u_3 = \frac{0,0000002158}{5,0527743422} \left( - \right)$$

$$= \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{125} u_3 = \frac{64}{3 \cdot 1000} u_3 = \frac{0,0000002158}{5,0527743422} \left( - \right)$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{125} \cdot$$

Всяйдствіе чередованія знаковъ искомый корень всегда заключается между двумя смежными значеніями.

II. Рышеніе уравненія  $ax^2 + bx + c = 0$ , когда коэффиціенть а весьма маль'. — Взявь формулу корней, можемь ей дать видь

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a} \left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Когда корни уравненія дѣйствительные неравные, мы ямѣемъ  $b^2-4ac>0$ , откуда  $\frac{4ac}{b^2}<1$ ; но при a- весьма маломъ дробь эта будетъ весьма мала и получится быстро-сходящійся рядъ; а именно

$$x = -\frac{b}{2a} \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4ac}{b^2}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{4ac}{b^2}\right)^3 - \cdots \right) \right\}.$$

III. Раскрытіе неопредъленностей. — Приводимъ примъры.

1. Дробь  $\frac{x^m-a^m}{x^k-a^k}$ , гдѣ m и n— какія угодно числа, обращается въ  $\frac{0}{0}$  при x=a. Полагаемъ x=a+h и разлагаемъ числителя и знаменателя по восходящимъ степенямъ h; затѣмъ полагаемъ h=0; так. обр. паходимъ:

$$\frac{x^{m}-a^{m}}{x^{k}-a^{k}} = \frac{(a+h)^{m}-a^{m}}{(a+h)^{k}-a^{k}} = \frac{a^{m}\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)^{m}-1\right]}{a^{k}\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)^{k}-1\right]} = a^{m-k} \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^{m}-1}{\left(1+\frac{h}{a}\right)^{k}-1}$$

$$a^{m-k} \cdot \frac{m \cdot \frac{h}{a} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{h^{2}}{a^{2}} + \cdots}{k \cdot \frac{h}{a} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 1} \cdot \frac{h^{2}}{a^{2}} + \cdots}$$

Всё члены числителя и знаменателя содержать множителя  $\frac{h}{a}$ ; сокративь на  $\frac{h}{a}$  и положивь h = 0 (чтобы имёть величину дроби при x = a), находимь, что всё члены числителя и знаменателя, кромё первыхь, исчезають, и получается  $\frac{m}{k}a^{m-k}$ .

2. Дробь  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$  обращается въ  $\frac{0}{0}$  при x=a. Положивъ a=x+h, даемъ ей видъ

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}}=\frac{\sqrt{a}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{a}+\cdots\right)-\sqrt{a}+\sqrt{h};}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}};$$

сдѣлавъ приведеніе и раздѣливъ числит. и знам. на  $\sqrt{h}$ , имѣемъ

$$\frac{\frac{\sqrt{h}}{2a} + \cdots + 1}{\sqrt{2a+h}},$$

что при h=0 обращается въ  $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ .

IV. Элементарный методъ Жоффруа для вивода рядовъ, служащихъ къ вычисленію  $\Pi$ .

1. Взявъ окружность радіуса R = 1, проведемъ въ точкѣ E касательную, затѣмъ на окружности возьмемъ нѣкоторую дугу AB и проведемъ радіусы OA, OB, продолженіе которыхъ пусть встрѣчаетъ касательную въ точкахъ C и D. Сравнимъ хорду AB съ дугою AB. Опустивъ изъ центра перпендикуляръ OI, на AB, возьмемъ отнощеніе площадей треугольвиковъ OAB и OCD, имѣющихъ общій уголъ:

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCD} = \frac{OA \times OB}{OC \times OD} = \frac{AB \times OI}{CD \times OE}; \text{ или rake } R = 1, \frac{AB}{CD} = \frac{1}{OC \times OD \times OI}.$$

Замѣнивъ ОІ единицей, и ОО линіей ОС, мы уменьшимъ вторую часть, и потому  $\frac{AB}{C\overline{D}} > \frac{1}{OC^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$  (1): Съ другой стороны  $\frac{AB}{C\overline{D}} < \frac{1}{OD^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$  (2). Доказательство неравенства (2) сводится къ доказательству, что  $\frac{1}{OC \cdot OD \cdot OI} < \frac{1}{OD^2}$ , или  $\frac{1}{OC \cdot OI} < \frac{1}{O\overline{D}}$ , или  $\frac{1}{OC \cdot OI} < \frac{1}{O\overline{D}}$ , или  $\frac{1}{OC \cdot OI} < \frac{1}{O\overline{D}}$ , или  $\frac{1}{OC \cdot OI} < \frac{OI}{OD}$ , но, проведя АМ параллельно CD (пусть V есть точка нересѣченія АМ съ ОІ, а точка М съ ОВ), имѣемъ:  $\frac{OA}{OC} = \frac{OM}{OD}$ , а какъ ОА=1, и ОМ<OV<OI, то  $\frac{1}{OC} < \frac{OI}{O\overline{D}}$ : этимъ неравенство (2) доказано. Итакъ

$$\frac{1}{OC^2} < \frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2} \cdot \cdot \cdot \cdot (3).$$

Если положимъ, что AB стремится къ нулю, то и CD будетъ приближаться къ нулю, и въ предѣлѣ:  $\lim_{CD} \frac{AB}{CD} = \frac{1}{OD^2}$ , ибо OC и OD сливаются въ предѣлѣ.

Если на касательной возьмемъ часть EP=1 и соединимь P съ 0, то дуга  $EH=\frac{\Pi}{4}\cdot$ Для вычисленія этой дуги, раздёлимъ EP на n равныхъ частей и точки д'бленія F, D, C соединимъ съ центромъ. Эти прямыя дадутъ на окружности вер-

шины неправильной ломаной, которой периметръ будетъ приближаться къ  $\frac{\Pi}{4}$  по мъръ увеличенія n. Пусть будетъ AB одна изъ сторовъ этой ломаной; соотвътствующій элементъ CD касательной  $=\frac{\mathrm{EP}}{n}=\frac{1}{n}$  По доказанному, мы имъемъ

$$\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2}$$
; FMb  $OD^2 = 1 + ED^2$ .

Пусть p будеть число д'вленій оть E до D: сл.  $ED = p \cdot \frac{1}{n}$ ,  $CD = \frac{1}{n}$ ; и

$${\rm AB} < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^2}{v^2}} \;, \quad \text{ пли } \quad {\rm AB} < \frac{n}{n^2 + p^2} \;.$$

Итакъ, периметръ P вписанной ломаной меньше суммы дробей вида  $\frac{n}{n^2+p^2}$ , гдъ p нужно измънять отъ 0 до n-1. Слъд.

$$P < n \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^3} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n - 1)^2} \right] \cdot \dots (4)$$

Въ предълъ, при  $n = \infty$ , Р сливается съ дугою ЕН, слъд.

$$\frac{\Pi}{4} = \lim n \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + (n-1)^2} \right] \cdot \cdots (5)$$

Съ другой стороны, мы нашли, что

$$\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2}$$
.  $PAB OC^2 = 1 + EC^2 = 1 + \frac{(p+1)^2}{n^2}$ .

откуда

AB>
$$\frac{n}{n^2+(p+1)^2}$$
.

Взявъ сумму этихъ неравенствъ отъ p=0 до p=n-1, найдемъ

$$P > n \left[ \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right] \cdots (6)$$

Сближая неравенства (4) и (6), найдемъ два значенія для Р—одно по избытку, другое по недостатку. Эти два значенія разнятся на  $n\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^2}\right]=\frac{1}{2n}$ ; сл. оба они стремятся къ  $\frac{\Pi}{4}$ . Взявъ n достаточно большимъ, можно вычислить  $\Pi$  съ жедаемою точностью.

Формула (5) послужить намъ для разложенія П въ сходящійся рядъ. Взявъ въ скобкахъ общій членъ  $\frac{1}{n^2+p^2}$ , или  $(n^2+p^2)^{-1}$ , разложимъ его по формулѣ бинома:

$$\frac{1}{n^2 + p^2} = (n^2 + p^2)^{-1} = \frac{1}{n^2} - \frac{p^2}{n^4} + \frac{p^4}{n^6} - \frac{p^6}{n^8} + \frac{p^3}{n^{10}} - \cdots$$

Полагая последовательно  $p=0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ , найдемъ:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$\frac{1}{n^2 + 2^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2^2}{n^4} + \frac{2^4}{n^6} - \frac{2^6}{n^3} + \cdots$$

$$\frac{1}{n^2 + 3^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{3^2}{n^2} + \frac{3^4}{n^6} - \frac{3^6}{n^8} + \cdots$$

$$\frac{1}{n^2 + (n-1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^4} + \frac{(n+1)^4}{n^6} - \frac{(n-1)^6}{n^8} + \cdots$$

Складывая по вертикальнымъ столбцамъ, умножая на n, и обозначая суммы вторыхъ, четвертныхъ, . . . . степеней n-1 первыхъ цѣлыхъ чиселъ знаками  $\mathbf{S}_2$   $\mathbf{S}_4$ , . . . . , находимъ:

$$\frac{\Pi}{4} = \lim \left(1 - \frac{S_2}{n^3} + \frac{S_4}{n^5} - \frac{S_6}{n^7} + \frac{S_8}{n^9} - \cdots \right).$$
Ho  $\lim \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3}$ ,  $\lim \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}$ , h.t. m. Hotomy
$$\frac{\Pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

одинъ изъ рядовъ, которые даетъ интегральное исчисленіе.

2. Взявь четверть вруга ОАВ, положимъ, что радіусь ОВ = 1. Раздѣлимъ его на n равныхъ частей и изъ точевъ дѣленія проведемъ параллели другому радіусу ОА. Такимъ обр. дуга  $AB = \frac{\Pi}{2}$  будетъ раздѣлена на n неравныхъ частей; хорды, какъ СD, стягивающія эти дуги, образують вписанную ломаную длины P, предѣломъ которой при  $n = \infty$ , будетъ служить  $\frac{\Pi}{2}$ . Пусть EF будетъ дѣленіе радіуса ОВ, соотвѣтствующее дугѣ CD. Проведя ОІ перпендикулярно къ хордѣ CD, ІН перпендикулярно къ ОА, и CG перпендикуляръ на DF, найдемъ изъ подобныхъ треугольниковъ CDG и ОІН, что  $\frac{\text{CG}}{\text{CD}} = \frac{\text{OH}}{\text{OI}}$ . Но CG = EF, слѣд.

$$\lim \frac{EF}{CD} = \lim \frac{OH}{OI} = \frac{FD}{1}; \text{ a notomy lim } CD = \lim \frac{EF}{FD}.$$

Дал'йо: EF  $= \frac{OB}{n} = \frac{1}{n}$ ; FD  $= \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}$ , если p означаеть число дѣленій оть 0 до F. Отеюда

$$\lim_{n \to \infty} CD = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{p^2}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}}.$$

Но периметръ Р есть сумма элементовъ, такихъ какъ СD, сл

$$P = \sum_{0}^{n-1} CD = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}.$$

a kaki  $\frac{\Pi}{2}$  = lim P, to

$$\frac{\Pi}{2} = \lim \left[ \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n - 1)^2}} \right].$$

Взявъ общій члевъ, имфемъ

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}} = (n^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}} = n^{-1} + \frac{\frac{1}{2}}{1} p^2 n^{-3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} p^4 n^{-5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^6 n^{-7} + \cdots$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2} \cdot p^2}{1 \cdot 2 \cdot n^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot p^4}{1 \cdot 2 \cdot n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{p^6}{n^7} + \cdots$$

Полагая  $p=0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ , имвемь отсюда:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^7} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^2}{1 \cdot n^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^4}{1 \cdot 2 \cdot n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2^6}{n^7} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-1)^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(n-1)^6}{n^7} \cdot \cdots$$

Суммируя, найдемъ въ предёлъ

$$\frac{\Pi}{2} = \lim \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_2}{v^2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{S_4}{v^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{S_6}{v^7} + \cdots \right],$$

или, подставляя  $\lim_{n \to \infty} \frac{S_2}{n^3} \cdot \cdots$  окончательно

$$\frac{11}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \cdots$$

другой рядъ, предлагаемый въ курсахъ интеграловъ.

#### 791. Задачи.

- 1. Вычислить:  $\sqrt{103}$ ;  $\sqrt[3]{65}$ ;  $\sqrt[4]{260}$ ;  $\sqrt[5]{260}$ ;  $\sqrt[5]{108}$ .
- 2. Разложить:  $(a^3-b)^{\frac{4}{5}}$ ;  $(a^2-1)^{\frac{1}{2}}$ ;  $(x^2-b^3)^{\frac{7}{8}}$ ;  $(a^3+1)^{-\frac{1}{2}}$ ;  $(2a^{\frac{1}{4}}-3x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{4}{5}}$ .
- 3. Показать, что общій члень разложенія  $(x+a)^{-m}$  есть

$$\mathbf{T}_{r+1} = (-1)^r \cdot \frac{m(m+1) \cdot \cdot \cdot \cdot (m+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot r} \cdot a^r x^{-(m+r)}.$$

4. Показать, что общій члень  $(x-a)^{-m}$  есть

$$\mathbf{T}_{r+1} = \frac{m(m+1)\cdot\cdot\cdot\cdot(m+r-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot\cdot r} a^r x^{-(m+r)}.$$

5. Показать, что общій члень разложенія  $(x+a)^{\frac{p}{q}}$  есть

$$T_{r+1} = (-1)^r \cdot \frac{p(p-q) \cdot \cdot \cdot \cdot [p-(r-1)q]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot r \cdot q^r} a^r x^{\frac{p}{q} - r}$$

6. Найти общіе члены разложеній:

$$(1+x)^{-\frac{3}{3}}$$
;  $(1+x)^{\frac{7}{3}}$ ;  $(1-x)^{-\frac{4}{3}}$ ;  $(1-x)^{\frac{1}{n}}$ ;  $(1-px)^{\frac{1}{p}}$ ;  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ;  $(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$ ;

$$(1-2x)^{-\frac{7}{2}};$$
  $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}};$   $(x-2)^{\frac{p}{q}};$   $(x+a)^{-\frac{p}{q}};$   $(x-a)^{-\frac{p}{q}}.$ 

- 7. Приложить формулу бинома къ ръшению ур-ний nº 80, § 481.
- 8. Найти истипное значение неопределенностей:

a) 
$$\frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$$
, при  $x=0$ ;

b) 
$$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$$
, npn  $x=a$ ; c)  $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+x-a}{(1+x-a)^3-1}$  npn  $x=a$ ;

d) 
$$\frac{x^n}{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}$$
 nph  $x = 0;$  e)  $\frac{a - \sqrt{2ax - x^2}}{a - \sqrt[3]{2a^2x - ax^2}}$  uph  $x = a;$ 

f) 
$$\frac{\sqrt{2a^2+2x^2}-2\sqrt[3]{a^2x}}{x-a}$$
 uph  $x=a;$  g)  $\frac{-x^2+a\sqrt{ax}}{a-\sqrt{ax}}$  uph  $x=a.$ 

#### ГЛАВА XLVIII.

Изслѣдованіе свойствъ показательной функціи. — Общія свойства логариомовъ. — Системы логариомовъ. — Условія сонзмѣримости логариомовъ. — Приложеніе къ десятичнымъ логариомамъ.

# Изследованіе свойствъ показательной функціи.

792. Опредъленіе. Функція  $a^x$ , гдъ а количество постоянное, а x — перемънное, называется показательной функціей. Изслъдованіе свойствъ этой функцій служить основаніемъ теорія догариемовъ.

Докажемъ, что если a>0, то функція непрерывна на всемъ протяженім дъйствительныхъ значеній x, соизмъримыхъ или несоизмъримыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ. Изслъдовачіе это подраздъляемъ на двъ части: a>1 и a<1.

- 793. Teopema. Ecau a > 1, flyhkuis a\* возрастает непрерывно от  $0 \ \partial v + \infty$ , когда х возрастает непрерывно от  $-\infty \ \partial v + \infty$ .
- I. Во-первыхъ, пусть x измъняется отъ  $\infty$  до  $+\infty$ , получая соизмъримыя значенія.
- 1) Если эти значенія будуть цёлыя и положительныя, то въ леммё I, § 764, уже доказано, что если m > n, то и  $a^m > a^n$ .
- 2) Пусть x получаеть соизмѣримыя дробныя значенія  $\frac{\alpha}{\beta}$  и  $\frac{\alpha'}{\beta'}$ , и пусть  $\frac{\alpha}{\beta'} > \frac{\alpha'}{\beta'}$ . Отсюда:  $\alpha\beta' > \alpha'\beta$ , и такъ какъ это числа цѣлыя, то по предыдущему:  $\alpha^{\alpha\beta'} > \alpha^{\alpha'\beta}$ . Извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка  $\beta\beta'$ , мы не на-

рушимъ смысла неравенства, а потому  $\sqrt[\beta]{a^{\alpha\beta'}} > \sqrt[\beta]{a^{\alpha'\beta'}}$ , или  $a^{\frac{\alpha}{\beta}} > a^{\frac{\alpha'}{\beta'}}$ , что и требовалось доказать.

3) Дадимъ показателю x отрицательныя значенія, цёлыя или дробныя; пусть -m > -n, гдё m и n положительны. Изъ неравенства имѣемъ: m < n; а слёд.  $a^m < a^n$ ; раздёливъ обё части на положит. количество  $a^m$ .  $a^n$ , находимъ:

$$\frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^m}$$
, where  $a^{-n} < a^{-m}$ :

то же заключение.

II. Наконецъ, дадимъ x-су несоизмъримыя вначенія, и прежде всего опредълимъ, что слъдуетъ разумъть подъ степенью съ несоизмъримымъ показателемъ; напр., что означаеть  $a^{\sqrt{3}}$ ?

Возьмемъ рядъ приближеній къ  $\sqrt{3}$ , по недостатку и по избытку, точныхъ до  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$ , . . . ,  $\frac{1}{10^n}$ ; получимъ два ряда

1,7 1,73 1,732 
$$\frac{\alpha}{10^n}$$
,
1,8 1,74 1,733  $\frac{\alpha+1}{10^n}$ ,

общимъ предъломъ которыхъ, по опредъленію, служитъ  $\sqrt{3}$ .

Затъмъ напишемъ два ряда степеней а съ этими показателями:

$$a^{1,7}$$
  $a^{1,73}$   $a^{1,732}$  . . . .  $a^{10^{-4}}$  . . . . . . (1)  
 $a^{1.8}$   $a^{1,74}$   $a^{1,733}$  . . . .  $a^{10^{-4}}$  . . . . . . . (2)

Такъ какъ эти показатели соизмъримы, то, по вышедоказанному, степени (1) идутъ возрастая; но существуетъ безчисленное множество состояній величины, какихъ эти количества не могутъ достигнуть и превзойти: таковы, напр., соотвътствующія имъ числа ряда (2). Необходимо заключить, что числа (1) стремятся къ нъкоторому предълу L. Подобнымъ же образомъ убъждаемся, что числа ряда (2) стремятся, уменьшаясь, къ нъкоторому предълу L'. Легко видъть, что оба эти предъла равны, ибо разность

$$a^{\frac{\alpha+1}{10^n}}-a^{\frac{\alpha}{10^n}}$$

стремится къ нулю, когда n приближается къ безконечности. Дъйствительно, эта разность  $\Longrightarrow$ 

$$a^{\frac{\alpha}{10^n}} \left( a^{\frac{1}{10^n}} - 1 \right) = a^{\frac{\alpha}{10^n}} \left( 10^n \sqrt{a} - 1 \right),$$

но мы доказали, что предъломъ для  $\sqrt[10^n]{a}$  служить 1; слъд. разсматриваемая разность имѣетъ предъломъ ноль, ибо множитель  $a^{\frac{\alpha}{10^n}}$  конеченъ (онъ, напр., меньше  $a^2$ ).

Этотъ общій предъль рядовъ (1) и (2) и представляють, по опредъленію, въ видъ  $a^{\sqrt{3}}$ . Итакъ:

Степень съ несоизмъримымъ показателемъ m от положительного число а есть предълг, къ которому стремятся степени этого числа, коихъ показатель стремится къ m, увеличиваясь или уменьшаясь.

Долажемъ теперь, что большему несоизмъримому показателю (при a>1) соотвътствуетъ и большая степень; напр.

$$a^{\sqrt{3}} > a^{\sqrt{2}}$$
.

Въ самомъ дѣлѣ, если  $\frac{\alpha}{10^n}$  п  $\frac{\beta}{10^n}$  суть приближенія къ  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ , точныя до  $\frac{1}{10^n}$  по недостатку, то:

$$\frac{\alpha}{10^n} < \sqrt{2} < \frac{\alpha+1}{10^n}$$
 if  $\frac{\beta}{10^n} < \sqrt{3} < \frac{\beta+1}{10^n}$ .

Слъд., по предыдущему:

$$a^{\frac{\alpha}{10^n}} < a^{\frac{\beta+1}{10^n}};$$

а потому и предвлы, которые не равны, не равны въ томъ же порядкъ, ибо этотъ порядокъ не измъняется, когда п неограниченно возрастаетъ.

III. Измпненія функціи а<sup>х</sup> непрерывны на всемь протяженіи измпненій х.

Дадимъ конечному  $x_0$  нъкоторое приращеніе h, и докажемъ, что если это приращеніе будетъ неограниченно приближаться къ нулю, то и приращеніе k функціи  $y_0$  будетъ также неограниченно приближаться къ нулю. Въ самомъ дълъ:

$$y_0 = a^{x_0}$$
,  $y_0 + k = a^{x_0+h}$ , c.g.  $k = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0} (a^h - 1)$ .

 $a^{x_0}$  — величина конечная; остается доказать, что h можно взять настолько близкимъ къ нулю, что  $a^h$  будеть какъ угодно близко къ 1, т. е. что  $a^h$  стремится къ предълу 1.

Пусть  $h{>}0$ ; всегда можно найти такое цёлое положительное число  $\alpha$ , чтобы

$$\alpha < \frac{1}{h} < \alpha + 1$$
,

ибо  $\alpha$  есть частное, точное до 1 отъ раздѣленія 1:h, и это частное будетъ неограниченно возрастать по мѣрѣ того, какъ h будетъ приближаться къ нулю. Изъ предыдущаго неравенства выводимъ

$$\frac{1}{\alpha+1} < h < \frac{1}{\alpha}$$
;

откуда, по вышедоказанному:

$$a^{\frac{1}{\alpha+1}} < a^h < a^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Но крайнія количества — то же, что  $\alpha + \sqrt[4]{a}$  и  $\sqrt[4]{a}$ ; а эти корни, въ силу леммы III § 766, имъютъ общимъ предъломъ единицу, когда  $\alpha$  неограниченно возрастаетъ;

а слъд. н $a^h$ , то теор. § 197, имъетъ тотъ же предълъ, т. е. 1, когда h стремится къ нулю. Заключаемъ, что въ формулъ для k второй множитель стремится къ 0, а сл. и k приближается къ тому же предълу, по мъръ приближенія h къ нулю.

IV. Когда х приближается къ  $\infty$ , то и  $a^x$  стремится къ  $\infty$ .

Это предложение было уже доказано въ лемит I, § 764, для показателя цълаго. Пусть теперь показатель m есть число дробное или несоизмъримое; это число будетъ заключаться между двумя послъдовательными цълыми числами p и p+1, такъ что

$$a^p < a^m < a^{p+1}.$$

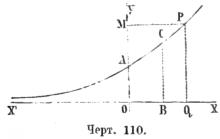
Но, по упомянутой леммъ,  $a^p$  и  $a^{p+1}$  стремятся къ  $\infty$ , когда p приближается къ  $\infty$ , слъд. и  $a^m$  стремится къ  $\infty$ , когда m неограниченно возрастаетъ.

Итакъ:  $a^x$ , при a>1, есть функція непрерывная, возрастающая отъ 0 до  $+\infty$ , когда х возрастаеть отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Этоть результать можно представить въ формъ следующей таблицы:

### Таблица А.

$$y = a^{x} \begin{vmatrix} -\infty & \dots & < \dots & 0 & \dots & < \dots & 1 < \dots & +\infty \\ 0 & \dots & < \dots & 1 & \dots & < \dots & +\infty \end{vmatrix}$$



Изображая измёненія у ординатами кривой, найдемъ кривую, которой ох' служить ассимитотою, а ординаты растуть неограниченно. Эта кривая пересёкаетъ ось у въ такой точкё А, для которой ОА—1.

Тостветственно абсциссё ОВ — 1 имбемъ ординату

$$y = BC = a$$
.

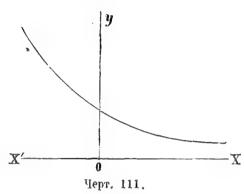
793. TEOPEMA. — Ecnu 0 < a < 1, mo npu непрерывном изминени x от  $x - \infty$  до  $x - \infty$  до x -

Въ самомъ дѣлѣ, когда a<1, то можно положить  $a=\frac{1}{a'}$ , гдѣ a'>1; слѣд.  $a^x=\left(\frac{1}{a'}\right)^x=\frac{1}{a'^x}$ . Если будемъ здѣсь увеличивать x отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ , то, по предыдущей теоремѣ,  $a'^x$  будетъ увеличиваться отъ 0 до  $+\infty$ , а слѣд.  $\frac{1}{a'^x}$  будетъ уменьшаться отъ  $\frac{1}{0}$  до  $\frac{1}{\infty}$ , т. е. отъ  $\infty$  до 0. Что и здѣсь изиѣненія функціи  $a^x$  непрерывны—это непосредственно вытекаетъ изъ предыдущаго.

Таблица измёненій будеть слёдующая:

#### Таблица В.

Эти измъненія наглядно изображены измъненіями ординать кривой, для которой положительное направленіе 0x оси абсциссъ служить ассимитотою.



## Логариемы.

794. Опредъленіе. Имъя ур-ніе  $y=a^x$ , можно предложить себъ три вопроса:

- 1. По даннымъ: основанію a и показателю x вычислить степень  $a^x$  или y. Дъйствіе это называется возвышеніемъ въ степень.
- 2. По даннымъ: степени y и ея показателю x найти основаніе a. Дъйствіе это есть извлеченіе корня и выражается знакоположеніемъ:  $a = \sqrt[x]{y}$ .
- 3. По даннымъ: степени или числу у и основанію а найти показателя x. Показатель x называется логаривмомъ числа у при основаніи a. Итакъ: логаривмомъ даннаго числа называется показатель степени, въ ксторую нужно возвысить основаніе, чтобы получить данное число.

Слово логариемъ обозначается знакомъ  $\log$ ; такимъ образомъ, чтобы показать, что x есть логариемъ числа y при основаніи a, пишутъ:  $x = \log_a y$ . Напр.  $\log_2 8 = 3$ , потому что  $2^3 = 8$ ;  $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ , ибо  $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$  и т. п.

795. Выборъ основанія. Главное значеніе логаривмовъ заключаєтся въ томъ, что они служатъ могущественнымъ средствомъ для облегченія вычисленій. Но чтобы они могли служить для этой цёли, необходимо имёть для всёхъ положительныхъ чиселъ дёйствительные логаривмы. Этому требованію удовлетворяєть не всякое основаніе. И прежде всего легко видёть, что отрицательнаю числа нельзя брать за основаніе логаривмовъ, ибо при такомъ основаніи не для всёхъ положительныхъ чиселъ получатся дёйствительные логаривмы. Такъ, ур. нію  $(-2)^x = 8$  нельзя удовлетворить никакимъ дёйствительнымъ значеніемъ x.

Затъмъ, 0 не м. б. принятъ за основаніе логариомовъ; потому что вторая часть ур-нія  $0^x = y$  при положительномъ x всегда даетъ ноль; при x = 0,  $y = 0^0 = 0^m = \frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$ , т. е. представляетъ неопредъленность; а при отри-

цательномъ значеніи x, положивъ x = -m, получаемъ  $y = 0^{-m} = \frac{1}{0^m} = \frac{1}{0} = \infty$ .

Такимъ образомъ, различныя степени нуля не воспроизводять всевозможныхъ положительныхъ чиселъ.

Обращаясь къ положительнымъ числамъ, замъчаемъ, что единица не м. б. принята за основание логариомовъ, потому что различныя степени единицы равны 1.

Взявъ за основаніе число, большее или меньшее 1, и возвышая его во все возможныя дёйствительныя степени отъ —  $\infty$  до  $+\infty$ , мы, какъ видно изъ таблицъ А и В, §§ 792 и 793, получимъ всевозможныя положительныя числа отъ 0 до  $+\infty$ , такъ что въ этихъ случаяхъ всякое положительное число имъетъ дъйствительный логариемъ. Итакъ: за основаніе логариемовъ только и можно брать положительныя числа, большія или меньшія 1.

796. Свойства логаривмовъ при основаніи большемъ 1. — 1. Всякое положительное число импеть дойствительный логаривмъ, и только одинъ. При изслѣдованіи функціи  $y=a^x$  (см. таблицу A) мы видѣли, что если измѣнять x отъ —  $\infty$  до  $+\infty$ , то y непрерывно возрастаеть отъ 0 до  $+\infty$ . Возьмемъ въ этой строкѣ значеній y-ка какое ниб. число y'; функція y (или  $a^x$ ), будучи непрерывна и измѣнякь чрезъ всю область положительныхъ чиселъ, пройдетъ, покрайней мѣрѣ, разъ и чрезъ значеніе y', при нѣкоторомъ значеніи x' перемѣннаго x; но функція эта постоянно возрастаетъ, и потому только одинъ разъ пройдетъ чрезъ это значеніе y'. Это наглядно обнаруживаетъ и жривая  $y=a^x$  (черт. 110); въ самомъ дѣлѣ, пусть y'=0М; проведя нараллель МР оси 0x, замѣчаемъ, что она встрѣтитъ кривую только въ одной точкѣ; логариемъ числа y' будетъ абсцисса 0Q точки встрѣчи P.

Итакъ: всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариемъ, и только одинъ. Высшая алгебра показываетъ, что кромѣ одного дѣйствительнаго логариема всякое положительное число имѣетъ безчисленное множество мнимыхъ логариемовъ.

- 2. Отрицательныя числа не имъють дъйствительных логориемовъ. Дъйствительно, на всемъ протяжении строки чиселъ (таблица А) въ ней находятся одни положительныя числа.
- 3. Логариемы чисель, большихь 1, положительны; въ самомъ дёлё числамъ отъ 1 до  $+\infty$  строки у соотвётствують въ строкв x числа отъ 0 до  $+\infty$ .
- 4. Логариемы чисель, меньшихь 1, отрицательны; и въ самомъ дѣлѣ, числамъ отъ 0 до 1 таблицы A соотвѣтствують въ строкѣ логариемовъ значенія отъ  $\infty$  до 0.
  - 5. Логариом в нуля равень ...
  - 6. Логаривмъ единицы равенъ нумю.
  - 7. Логариомъ основанія равень единиць.
  - 8. Логаривмъ  $+\infty$  равенъ  $+\infty$ .
- 797. Свойства логариемовъ при основаніи меньшемъ 1. Подобно предыдущему, изученіе таблицы В прямо даетъ слёдующіе результаты:
- 1. Всякое положительное число импеть дъйствительный логаривми, и только одинь.
- 2. Логаривны чисель, большихь 1, отрицательны, а чисель меньшихь единицы положительны.

- 3. Логаривмъ основанія равень единиць.
- 4. Логаривмъ единицы равенъ нулю.
- 5. Логарием в нуля равен  $+\infty$ .
- 6. Логариемъ  $+\infty$  разенъ  $-\infty$ .
- 7. Отрицательныя числа не импьють дыйствительных поларивмовь.

780. Теоремы, на которыхъ основано употребленіе логариомовъ въ вычисленіяхъ.

I. Логариемъ произведенія равенъ суммъ логариемовъ производителей. Пусть имѣємъ числа N, N', N'', имѣющія логариемами: x, x', x'' при одномъ и томъ же основаній a.

Зависимость между числами и ихъ логариомами выражается уравненіями

$$N = a^x \dots (1)$$
  $N' = a^{x'} \dots (2)$   $N'' = a^{x''} \dots (3)$ 

Перемноживъ эти уравненія, получаемъ

$$NN'N'' = a^{x+x+x''}.$$

изъ котораго видно, что x + x' + x'' есть логариемъ числа NN'N":

$$\lg (NN'N'') = x + x' + x'';$$

но изъ данныхъ ур-ній имъемъ:  $x = \lg N$ ,  $x' = \lg N'$ ,  $x'' = \lg N''$ ; подстановка въ предыдущее ур-ніе даетъ, такимъ образомъ:

$$\lg (NN'N'') = \lg N + \lg N' + \lg N'',$$

и теорема доказана.

II. Логариемъ частнаго равенъ логариему дълимаго безъ логариема дълителя. — Раздъливъ ур-ніе (1) на (2), имбемъ:

$$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{N}'} = \frac{a^x}{a^{x\prime}} = a^{x-x\prime},$$

откуда, по опредъленію логариома:

$$\lg\left(\frac{N}{N'}\right) = x - x' = \lg N - \lg N'.$$

Если N=1, то  $\lg N=0$ , и предыдущее равенство даеть:

$$\lg\left(\frac{1}{N'}\right) = -\lg N',$$

т. в. логаривмъ дроби, импьющей числителемъ 1, равенъ отрицательному логаривму знаменателя.

III. Логаривмъ степени съ какимъ угодно показателсмъ равенъ произведенію показателя на логаривмъ возвышаемаго числа. — Возвысивъ объ части ур-нія (1) въ степень m, имъ́емъ

$$N^m = (a^x)^m = a^{xm}$$
, otryga  $\log (N^m) = mx = m \cdot \lg N$ ,

и теорема доказана.

IV. Логариемъ корня равенъ логариему подкореннаго числа, раздъленному на показателя корня. — Извлекая изъ объихъ частей ур-нія (1) корень порядка p, имъемъ:

$$\sqrt[p]{\overline{N}} = \sqrt[p]{a^x} = a^{\frac{x}{\overline{p}}}$$
, откуда  $\lg(\sqrt[p]{\overline{N}}) = \frac{x}{p} = \frac{\lg N}{p}$ .

Эта теоремы дають возможность вначительно облегать выполнение болье трудных ариометических действій. Для этого должны быть построены таблицы, содержащія логариомы чисель. Имён такія таблицы, и зная, что логариомъ произведенія равень суммё логариомовь производителей, мы можемъ умноженіе чисель свести на простейшее действіе — сложеніе ихъ логариомовь: такимъ образомъ мы опредёлимъ log произведенія, а для отысканія самаго провзведенія останется взять изъ таблицъ число, соотвётствующее найденному логариому. Деленіе чисель, при помощи теоремы ІІ, сводится къ простейшему действію — вычитанія логариомовъ; возвышеніе въ степень, при помощи теор. ІІІ, приводится къ умноженію, а извлеченіе корня, по теор. ІV, къ деленію. Однимъ словомъ, при помощи логариомовъ, действія высшаго порядка надъ числами приводятся къ действіямъ нисшаго порядка надъ ихъ логариомами.

799. ТЕОРЕМА. — Если числа составляють прогрессію геометрическую, то их логаривмы составять прогрессію аривметическую.

Пусть имъемъ геометрическую прогрессію

$$-::-a:aq:aq^2:aq^3:\ldots:aq^n$$
.

Взявъ логариомъ каждаго члена, имфемъ:

 $\lg a$ ;  $\lg a + \lg q$ ;  $\lg a + 2 \lg q$ ;  $\lg a + 3 \lg q$ ; . . . . ;  $\lg a + n \lg q$ : а это есть рядъ, составляющій ариометическую прогрессію съ разностью, равною  $\lg q$ .

Свойство это было взято *Непером*ь за исходный пункть въ теоріи догаринмовъ.

800. Если надъ данными количествами, входящими въ составъ выраженія, подлежащаго вычисленію, указаны только дъйствія дъленія, умноженія, возведенія въ степень и извлеченія корня, то такое выраженіе м. б. вычислено съ помощію догариемовъ. Пусть напр.

$$x = \frac{a^6 \times \sqrt[5]{c^9}}{b^2 \times \sqrt[4]{a^3 f^3}}.$$

Примъняя теоремы о логариомъ дроби и т. д., послъдовательно получаемъ:

$$\begin{split} \lg x &= \lg \left[ a^6 \times \sqrt[5]{c^9} \right] - \lg \left[ b^2 \times \sqrt[4]{d^3} f^5 \right] \\ &= \lg a^6 + \lg \sqrt[5]{c^9} - (\lg b^2 + \lg \sqrt[4]{d^3} f^5) \\ &= 6 \lg a + \frac{9}{5} \lg c - 2 \lg b - \frac{1}{4} (3 \lg d + 5 \lg f), \end{split}$$

Такимъ образомъ  $\lg x$  будетъ извъстенъ; а по  $\lg x$  опредълится и соотвътствующее число, какъ скоро будутъ даны численныя значенія a, b, c, d и f.

Дъйствіе, питющее цълью составление выраженія для логариома по данному выраженію для числа называется логариомированісмъ.

Обратно, по данному выраженію логариома можно составить выраженіе для соотв'єтствующаго числа, пользуясь тёми же теоремами. Пусть напр., дано

$$\lg x = \frac{3}{4} [\lg (a+b) + \lg (a-b) + \lg (a^2 + b^2)] - \frac{1}{3} \lg (1 + a^2).$$

Последовательно имеемъ:

$$\begin{split} \lg x &= \frac{3}{4} \lg (a+b)(a-b)(a^2+b^2) - \frac{1}{3} \lg (1+a^2) \\ &= \frac{3}{4} \lg [(a^2-b^2)(a^2+b^2)] - \frac{1}{3} \lg (1+a^2) \\ &= \frac{3}{4} \lg (a^4-b^4) - \frac{1}{3} \lg (1+a^2) = \lg \sqrt[4]{(a^4-b^4)^3} - \lg \sqrt[4]{(a^4-b^4)^3} \\ &= \lg \frac{\sqrt[4]{(a^4-b^4)^3}}{\sqrt[3]{1+a^2}}. \end{split}$$

801. Системы логариемовъ. — Очевидно, что одно и тоже число имъетъ сколько угодно логариемовъ, если брать различныя основанія; по отношеніс логариемовъ одного и того же числа при двухъ различныхъ основаніяхъ одинаково для встахъ чиселъ. Въ самомъ дълъ, пусть число N при основаніяхъ а и b имъетъ логариемы  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\tau$ . е.

$$N = a^{\alpha}, \quad N = b^{\beta}, \quad \text{отвуда} \quad a^{\alpha} = b^{\beta}.$$

Взявъ логариемы отъ объихъ частей по основанію a, и замъчая, что  $\log_a a = 1$ , имъемъ:

$$\alpha = \beta \cdot \log_a b$$
, στημα  $\frac{\alpha}{\beta} = \log_a b$ , παπ  $\frac{\log_a N}{\log_b N} = \lg_a b$ .

т. е. отношеніе догариємовъ числа N по основаніямъ a и b равно постоянной величинb  $\lg_a b$ .

Изъ послъдняго равенства получаемъ

$$\lg_b N = (\lg_a N) \times \frac{1}{\lg_a b}$$

т. е. если построена таблица логаривмовъ при основаніи а, то изъ нея легко вывести логаривмы по другому основанію b: стоить только старые логаривмы помножить на дрэбь  $\frac{1}{\lg_a b}$ , равную единиць, дъленной на  $\log$  новаго основанія, взятый по старому. Этотъ постоянный множитель называется модулемъ перехода отъ старой системы въ новой.

Изобрътатель логариемовъ, *Неперъ*, взялъ за основаніе построенной имъ системы несоизмъримое число, равное приблизительно 2,718281828459045.... Это число обыкновенно обозначаютъ буквою е; а самые логариемы называютъ неперовыми, или натуральными, или гиперболическими; они имъютъ важное значеніе въ высшемъ анализъ. Но для практическихъ вычисленій они не удобны; поэтому уже самъ Неперъ посовътовалъ своему современнику *Ерипу* вычислить новые логариемы, принявъ за основаніе число 10. Этими послъдними логариемами и пользуются обыкновенно для практическихъ вычисленій, и называютъ обыкновенными, яли десятичными догариемами.

802. Условія соизм'єримости логариомовъ. — Зам'єтивъ, что всякое число можно представить въ вид'є произведенія степеней его первоначальныхъ множителей, опредёлимъ условія, при которыхъ логариомъ даннаго числа N будетъ

соизмёримымъ числомъ, ограничиваясь разсмотреніемъ случая, когда основаніе цёлое положительное число.

1. Требуется опредълить условія, при которыхъ цълос число N имъстъ сопомършмый догарномъ  $\frac{m}{m}$ , т. с. при какихъ условіяхъ возможно равенство

 $N=a^n$ , или, по возвышени объихъ частей въ n-ую степень, равенство

Пусть основаніе  $\alpha$  раздагается на нервоначальные множители  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  соотвітственно въ степенну r, s, t, такъ-что  $\alpha = \alpha^r \beta^s \gamma^t$ ; равенство (1) будеть

Такъ какъ вторая часть его дѣлится на  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , то и первая должна дѣлиться на тѣже числа, иначе вышло бы, что дробь равна цѣлому. Сверхъ того, N не можетъ содержать другихъ первопачальныхъ множителей, кромѣ  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , по той причипѣ. Слѣд. должно положить  $N = \alpha^{r_1} \beta^{s_1} \gamma^{t_1}$ . Ур. (2) приметъ видъ:

$$\alpha^{nr_1}\beta^{ns_1}\gamma^{nl_1}=\alpha^{mr}\beta^{ms}\gamma^{mt}$$

Чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобы было  $nr_1 = mr$ ;  $ns_1 = ms$ ;  $nt_1 = mt$ , откуда  $\frac{r}{r_1} = \frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$ ; заключаемь: чтобы инлое число n при циломь основаніи а имньло соизмиримый логаривых, необходимо, чтобы и n состояли изг одинаковых первоначальных множителей, и что-бы показатели этих множителей были пропорціональны между собою.

2. Пусть дана пеправильная дробь  $\frac{c}{d}$ , гдc > d. Пусть логариемъ (въданномъ случаb = 0 положительный) будетъ = 0 солзмb = 0 доби  $\frac{m}{n}$ ; имb = 0 солзмb = 0 годовительный)

$$a^n = \frac{c}{d}$$
, where  $a^n = \frac{c^n}{d^n}$ .

Но n-ая степень несократимой дроби  $\frac{c}{d}$  есть также дробь несократимая, и слёд, не можеть равняться цёлому числу  $a^m$ : допущеніе невозможно, а потому заключаемь; npu уплому основаніи непривильная дробь не можеть импти соизмиримаю логаривма.

3. Пусть, наконецъ, данное число есть дробь правильная  $\frac{c}{a}$ , гдѣ слѣдовательно c < d. При a > 1 логариомы правильныхъ дробой отрицательны; пусть этоть отрицательный логариомъ есть  $-\frac{m}{2}$ . Въ такомъ случаѣ

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{c}{d}, \quad \text{откуда} \quad a^m = \frac{d^n}{c^n}.$$

Такть какть  $a^m$  — число цівлое, то предыдущее равенство возможно только при  $c^n = 1$ , или c = 1; но въ такомъ случай имбемъ:

$$a^m = d^n$$

а такое равенство возможно только тогда, когда d и  $\alpha$  состоять изъ одинаковых выхъ первоначальных множителей и показатели этихъ множителей пропорціональны. Итакъ:

При цъломъ основаніи логаривмы правильныхъ дробей несоизмъримы, за исключеніемь такихь дробей, у которыхъ числитель = 1, а знаменатель состоить изъ тъхъ же первоначальныхъ множителей какъ и основаніе, а по-казатели этихъ множителей пропорціональны.

803. Приложеніе. — Приложимъ эти изысканія къ случаю обыкновенныхъ или бригговыхъ логариемовъ. Здѣсь основаніе равно  $10=2\times5$ . Слѣд., по доказанному, изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ только тѣ имѣютъ соизмѣримые логариемы, которыя состоятъ изъ тѣхъ же первоначальныхъ множителей, какъ и основаніе, въ данномъ случаѣ, изъ 2 и 5, т. е. числа вида  $2^r$ .  $5^r$ . Притомъ, r и s должны быть пропорціональны показателямъ основанія, т. е. должно быть: r:1=s:1, или r=s. Такимъ образомъ, цѣлое число, имѣющее при основаній =10 соизмѣримый логариемъ, имѣетъ видъ  $2^r$ .  $5^r=(2.5)^r=10^r$ , т. е. представляемъ точную степень 10-ти.

Затёмъ, неправильныя дроби имёють логариемы несоизмёримые; а изъ правильныхъ дробей только тё имёють соизмёримые логариемы, у которыхъ числитель =1, а знаменатель есть точная степень 10-ти, т. е. дроби  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$ , . . . .

#### ГЛАВА XLIX

Вычисленіе логарнемовъ. — Ряды для показательной функціи и логарномическіе.

804. Опредъление предъла  $\left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}\right]_{\omega=\infty}$ . — Исходнымъ пунктомъ послужитъ неравенство

$$a^n < \frac{b^{n+1}}{a-(n+1)(a-b)}$$
, имѣющее мѣсто при  $a > b > \frac{n}{n+1} \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot$  (1).

Ноложивъ  $a=1+\frac{1}{n},\ b=1+\frac{1}{n+1},\$ что удовлетворяетъ условію (1), получимъ

Полагая здёсь  $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ , находимъ неравенства

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} < \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} < \left(1+\frac{1}{3}\right)^{3} < \left(1+\frac{1}{4}\right)^{4} < \cdots$$

Эти перавенства показывають, что степень  $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$  постоянно возрастаеть, въ то времи какъ  $\omega$  проходить область натуральных чисель.

Неравенство (1) даеть далее при  $a=1+\frac{1}{2p}$ , b=1 и n=p:

$$\left(1+\frac{1}{2p}\right)^p<2,$$

откуда, возвышая въ квадрать, имфемъ

$$\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p}<4,$$

Тъмъ болъе, въ силу неравенства (2), имъемъ

$$\left(1+\frac{1}{2p-1}\right)^{2p-1}<\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p}<4.$$

Итакъ, будетъ-ли m четное или нечетное, во всякомъ случав  $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 4$ . Слъд., выражение  $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ , увеличиваясь, не можетъ сдёлаться безконечно-большимъ, а потому оно должно приближаться къ нѣкоторому предѣлу, который > 2, по < 4. Это число принято обозначать буквою e. Такимъ образомъ при цѣломъ положительномъ  $\omega$ , приближающемся къ  $\infty$ :

$$\lim \left[ \left( 1 + \frac{1}{\omega} \right)^{\omega} \right] = e.$$

Если  $\omega$  не есть цёлое число, но коложительно, то всегда можно дать два цёлыя положительныя послёдовательныя числа m и m+1, между которыми лежить  $\omega$ ; тогда очевидна справедливость неравенсть

$$1 + \frac{1}{m+1} < 1 + \frac{1}{\omega} < 1 + \frac{1}{m}$$

Возвышая первый биномъ въ m-ую, второй въ степень  $\omega$ , тротій въ степень m+1, не парушниъ смысла неравенствъ, а потому

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

Умноживъ и раздълнят первое на  $1+\frac{1}{m+1}$ , а третье разложивъ на множители, находимъ

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}} < \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Переходя къ предѣлу, увеличиваемъ  $\omega$  до  $\infty$ , тогда и m и m-1 будутъ при-ближаться къ  $\infty$ . По теоремѣ о предѣлѣ частнаго, имѣемъ

$$\lim \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} \right\}_{m=\infty} = \frac{\lim \left[1 + \frac{1}{m+1}\right]^{m+1}}{\lim \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)} = c,$$

ибо ио доказанному для m цёлаго:  $\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{m+1}\right]_{m=\infty}^{m+1} = e$ ;  $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right) = 1$ ; затёмъ,  $\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right]_{n=0} = e.1 = e.$ 

Это означаеть, что  $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$  заключается между двумя перемічными, нийющими общій преділь e, слід. и

$$\lim \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=e,$$

н при дробномъ положительномъ о, приближающемся въ О.

Если  $\omega$  — число отрицательное, то можно положить  $\omega = -$  ( $\rho + 1$ ), гдё  $\rho$  — положительное, неограниченно возрастающее цёлое или дробное число. Имёемъ:

$$(1 + \frac{1}{\omega})^{\omega} = (1 - \frac{1}{\rho + 1})^{-(\rho + 1)} = [(\frac{\rho}{\rho + 1})^{-1}]^{\rho + 1} = (\frac{\rho + 1}{\rho})^{\rho + 1} = (1 + \frac{1}{\rho})^{\rho + 1} = (1 + \frac{1}{\rho})^{\rho} (1 + \frac{1}{\rho})^{\rho}$$

Первый множитель приближается въ предълу с, второй въ 1, сл.

$$\lim \left[ \left( 1 + \frac{1}{\omega} \right)^{\omega} \right] = e.$$

Такимъ образомъ последнее равенство имъетъ место при всякомъ неограниченновозрастающемъ действительномъ  $\omega$ .

Нерѣдко этому равенству дають другой видь, подставляя  $\frac{1}{\omega} = \delta$ ; имѣемъ.

$$\lim_{n \to \infty} \left[ (1+\delta)^{\frac{1}{n}} \right] = e,$$

гдъ д означаеть количество, приближающееся къ нулю.

Теперь легко уже опредълить предълъ общаго выраженія

$$\left(1+\frac{s}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1+\frac{1}{\frac{\omega}{z}}\right)^{\omega}$$

гд\* z — н\*воторое д\*биствительное количество.

Дробь  $\frac{\omega}{z}$  вийсти сь  $\omega$  стремится къ  $\infty$ , и потому, положивь  $\frac{\omega}{z}=\omega'$ , откуда  $\omega=\omega'z$ , инфемъ

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega} = \left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega'z} = \left[\left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega'}\right]^z.$$

Но предёль степени (s) перемённаго равень той же степени предёла этого перемённаго, такъ что послёднее выраженіе, въ предёлё, даеть  $e^z$ . Итакъ

805. Разложеніє  $e^z$  въ рядъ. Послѣднее уравненіе показываеть, что  $e^z$  есть предѣль, къ которому стремится  $\left(1+\frac{s}{m}\right)^m$  при неограниченномъ увеличеніи m. Для нахожденія этого предѣла нужно разложить  $\left(1+\frac{s}{m}\right)^m$  по формулѣ бинома и затѣмъ положить  $m=\infty$ .

По формул'в (III) предыдущей статьи, полагая m цёлымъ и положительнымъ и k>mx, им'вемъ:

$$(1+x)^{m} = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{m(m-1) \cdot \cdots \cdot [m-(k-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (k-1)} x^{k-1} + \frac{m(m-1) \cdot \cdots \cdot [m-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k} \cdot \rho \frac{x^{k}}{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]},$$

гдѣ  $\rho$  означаеть положительную правильную дробь. Чтобы по этой формулѣ написать разложеніе для  $\left(1-\frac{z}{m}\right)^m$ , пужно, очевидно, положить  $x=\frac{z}{m}$  и k>z. Найдемъ

Мы ищемъ предъл  $\left(1+\frac{z}{m}\right)$  при  $m=\infty$ ; для этого увеличиваемъ неограниченно m, не измѣняя произвольнаго цѣлаго числа k. Если перемѣнныя равны, то равны и предѣлы ихь, а потому приравниваемъ предѣлы обѣихъ частей равенства. Предѣлъ лѣвой части есть  $e^z$ , а въ правой дроби  $\frac{1}{m}$ ,  $\frac{2}{m}$ , ...,  $\frac{k-1}{m}$  вмѣютъ общимъ предѣломъ нуль; слѣд.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots + \frac{z^{k-1}}{1.2.3...(k-1)} + \frac{1}{1.2.3...k} \cdot \frac{\rho z^k}{1 - \left[\frac{z}{k}\right]},$$
 (II)

причемъ k > z,  $0 < \rho < 1$ .

Такимъ образомъ мы получили конечную строку для  $e^z$ , — съ остаточнымъ членомъ; но изъ нея уже легко вывести безконечный рядъ для  $e^z$ . Для этого переносимъ остаточный членъ въ первую часть:

$$e^{z} - \frac{\rho}{1 - \left\lceil \frac{z}{k} \right\rceil} \cdot \frac{z^{k}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = 1 + z + \frac{z^{k}}{1 \cdot 2} + \frac{z^{k}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{z^{k-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} \cdot \dots (III)$$

и увеличиваемъ k, означающее число членовъ второй части, до безконечности. Выше мы доказали, что  $\lim_{k \to \infty} \left[ \frac{s^k}{1.2.3...k} \right]_{k \to \infty} = 0$ , слъд. предыдущее равенство обращается въ безконечный рядъ

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2,3} + \cdots$$
 (IV)

гдв в какая угодно конечная величина.

806. Рядъ для e; опредъленіе числовой величины e; несоизмѣримость числа e. Если, въ частности, положимъ z = 1, то ряды (II) и (IV) дадуть:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1.2.3.\dots(k-1)} + \frac{1}{1.2.3.\dots(k-1)} \cdot \frac{\rho}{k-1}$$
 (V)

$$c = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$
 (VI)

Съ этими рядами связаны существенныя зам'вчанія. Во-первыхъ, что касается фор-

мулы (V), то она служить для численнаго опредѣленія e, причемъ точность можеть быть доведена до какой угодно степени выборомъ достаточно большаго значенія для k. Такъ, при k=11 найдемъ.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} = 2,7182818011,$$

причемъ остатовъ  $=\frac{1}{1.2.3....10} \cdot \frac{\rho}{10} = 0,0000000276\rho$ ; слъд. если дадимъ  $\rho$  его наименьщее значеніе 0, а затъмъ наибольшее его значеніе 1, то найдемъ

откуда, взявъ e = 2,7182818, будемъ имѣть его величину точно до 7-го десятичнаго знака включительно. Это число было принято Henepomъ за основаніе предложенной имъ системы логариемовъ, по причинѣ, которая вскорѣ будетъ указана.

Съ помощію формулы (VI) рѣшается вопросъ о томъ, есть-ли є число соизмѣримое или несоизмѣримое. Сумма ряда VI, начиная съ третьяго числа, т. е.

менње суммы ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1;$$

слъд. сумма (VII) есть np авильная дробь. Допустимъ, что эта дробь соизмърима и  $=\frac{p}{a}$ , т. е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots = \frac{p}{q}$$

гдъ p и q>p цълыя положительныя числа. Умноживъ объ части на  $2.3.4\ldots q$ , получимъ

$$3.4.5 \ldots q + 4.5.6 \ldots q + 5.6 \ldots q + \cdots$$

$$+1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots=p.2.3.4....(q-1)$$

Сумма членовъ до  $\frac{1}{q+1}$  есть сумма цёлыхъ положительныхъ чиселъ, дающая нѣкоторое цѣлое положительное число M; вторая часть также есть цѣлое положительное число, которое назовемъ́ N; сл.

$$M + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots = N.$$

Но сумма  $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$  меньше  $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^3} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots$   $= \frac{1}{q+1} : \left(1 - \frac{1}{q+1}\right) = \frac{1}{q}$ , а какъ q > 1, то разсматриваемая сумма меньше 1.

Такимъ образомъ, цълое число М, сложенное съ правильною дробью, должно давать цълое число N; но это невозможно, а потому сумма ряда (VI) не можетъ равняться никакой соизмъримой дроби, а сл. и е есть число несоизмъримое.

Приведенное доказательство несоизмъримости числа е принадлежитъ Стенвиллю.

807. Разложеніе  $a^x$ . Мы нашли разложеніе показательной функцін съ основаніємь e; пусть основаніе будеть какое угодно число a. Положивь  $e^z = a^x$ , и взявъ отъ объихъ частей логариемъ по какому угодно основанію, получимъ

$$z.\log e = x.\log a$$
, отвуда  $z = \frac{x.\log a}{\log e}$ .

Подставивъ въ формулу (IV)  $a^x$  вмѣсто  $e^z$ , и  $\frac{x \log a}{\log e}$  вмѣсто z, найдемъ

$$a^x = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{x \cdot \log a}{\log e} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{x \cdot \log a}{\log e}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x \cdot \log a}{\log e}\right)^3 + \cdots$$
 (VIII)

Основаніе, по которому взяты логарнемы, здѣсь совершенно произвольно; взявь e за основаніе, и замѣтивъ, что въ такомъ случаѣ  $\log_e e = 1$ , найдемъ (условившись обозначать Неперовы логарнемы характеристикою 1):

$$a^x = 1 + x.la + \frac{(xla)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(xla)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$
 (IX)

Взявъ за основаніе а, найдемъ рядъ

$$a^{x} = 1 + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{x}{lg_{a}e}\right) + \frac{1}{1.2} \left(\frac{x}{lg_{a}e}\right)^{2} + \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{x}{lg_{a}e}\right)^{3} + \cdots$$
 (X)

Последній выводь вибеть то значевіе, что даеть возможность находить число по данному логариому; въ самомъ дёлё, изъ ур-нія  $a^x = y$  имёемь  $x = lg_a y$ ; слёд.

$$y = 1 + \frac{1}{1} \left( \frac{lg_a y}{lg_a e} \right) + \frac{1}{1.2} \left( \frac{lg_a y}{lg_a e} \right)^2 + \cdots$$
 (X1)

Въ случав a = e имвемъ:

$$y = 1 + ly + \frac{1}{1.2}(ly)^{2} + \frac{1}{1.2.3}(ly)^{3} + \cdots$$
 (XII)

Отсюда и видно, что логариемическая система съ основаніемъ e есть простѣйшая, а потому наиболѣе естественная; вслѣдствіе этого она и названа натуральною.

808. Логариемическіе ряды. — Исходнымъ пунктомъ послужить  $\lim_{\Theta} \left(\frac{a^{\Theta}-1}{\Theta}\right)$  при  $\Theta=o$ .

Пусть  $\Theta$  означаеть число, приближающееся въ нулю; тогда  $a^{\Theta}$  будеть имъть предъломъ 1, а разность  $a^{\Theta}$ — 1 ноль; поэтому можно положить  $a^{\Theta}$ — 1 =  $\delta$ , гд $\hat{\tau}$   $\delta$  исчезаеть вмъстъ съ  $\Theta$ . Написавъ это ур-ніе въ видъ

$$a^{\Theta} = 1 + \delta$$
, заключаемъ, что  $\Theta = log_a(1 + \delta)$ .

Раздъливъ объ части ур-нія  $a^{\Theta}-1=\delta$  на  $\Theta$ , найдемъ выраженіс, предълъ ко тораго ищемъ, именно

$$\frac{a^{\Theta}-1}{\Theta} = \frac{\delta}{\Theta} = \frac{\delta}{lg_a(1+\delta)} = \frac{1}{\frac{1}{\delta}lg_a(1+\delta)} = \frac{1}{lg_a\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]}.$$

Переходя въ предѣлу, полагаемъ  $\Theta = o$ ; вмѣстѣ съ этимъ и  $\delta = o$ ; въ первой части получимъ неопредѣленность  $\frac{0}{0}$ , а послѣднее выраженіе раскроетъ истинное значеніе этой неопредѣленности; именно получимъ

$$\lim \frac{a^{\Theta}-1}{\Theta} = \frac{1}{ly_a e} \dots (1)$$

Это равенство можно представить въ болѣе удобной формѣ, принявъ за основаніе логариемовъ число e. Логариемируя обѣ части равенства  $a=e^{l_a}$  по основанію a, находимъ

$$1 = la.log_a e$$
, или  $\frac{1}{log_a e} = la$ .

Подстановка въ (1) дастъ

$$\lim \frac{a^{\circ}-1}{\Theta} = la.$$

Положивь a=1+x, имбемь

$$l(1+x) = \lim_{\delta} \frac{(1+x)^{\delta}-1}{\delta}$$

откуда видна возможность примѣненія биноміальнаго ряда для разложенія l(1+x). При разложеніи  $(1+x)^\delta$  будемъ разумѣть подъ  $\delta$  нѣкоторую положительную правильную дробь; слѣд. x должны подчинить условію — 1 < x < +1. Примѣняя формулу (V) остатка биноміальнаго ряда. т. е. взявъ

$$k > \delta$$
,  $[x] < \varepsilon < 1$ ,  $o < \varepsilon < 1$ ,

имвемъ

$$(1+x)^{\delta} = 1 + \frac{\delta}{1} \cdot x + \frac{\delta(\delta-1)}{1\cdot 2} x^{2} + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{3} + \cdots + \frac{\delta(\delta-1)\dots \cdot [\delta-(k-2)]}{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)} x^{k-1} + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)\dots \cdot [\delta-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \frac{\varepsilon x^{k}}{1-\varepsilon}$$

Перенеся 1 въ первую часть и раздёливъ ур-ніе на д, получимъ

$$\frac{(1+x)^{\delta}-1}{\delta} = \frac{1}{1}x^{\delta} + \frac{\delta-1}{1.2}x^{2} + \frac{(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3}x^{\delta} + \cdots + \frac{(\delta-1)(\delta-2)\dots [\delta-(k-2)]}{1.2.3\dots [k-1]}x^{k-1} + \frac{(\delta-1)(\delta-2)\dots [\delta-(k-1)]}{1.2.3\dots k} \cdot \frac{\varsigma x^{k}}{1-\varepsilon}$$

Переходя къ предѣлу, т. е. полагая  $\delta = o$ , и замѣчая, что равенство перемѣнныхъ ведетъ за собою равенство ихъ предѣловъ, причемъ предѣлъ первой части=l(1+x), получаемъ:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2} x^{2} + \frac{1}{3} x^{3} - \frac{1}{4} x^{4} + \cdots + \frac{(-1)^{k-2}}{k-1} x^{k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{\mathfrak{s}x^{k}}{1-\mathfrak{s}}$$

Это — рядъ конечный; для полученія безконечнаго ряда переносимъ остатокъ въ первую часть

$$l(1+x) - \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{sx^k}{1-s} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{k-2}}{k-1} \cdot x^{k-1},$$

и заставляемъ произвольное цёлое k, означающее число членовъ, возрастать до безконечности. Такъ какъ x есть правильная дробь (положит. или отрицат.), то  $\lim x^k = o$ , такъ-что въ предълъ первая часть обратится въ l(1+x), а вторая дасть безконечный рядъ; находимъ разложеніе

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots (2)$$

$$-1 < x < +1.$$

Рядъ этотъ впервые встръчается у Меркатора (1686). Если въ формулъ (2) виъсто x подставниъ — x, то получимъ:

$$l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots$$
 (3)

Такъ какъ въ рядахъ (2) и (3) х есть правильная дробь, то они могуть служить голько для вычисленія логариомовъ чисель, меньшихъ 2. Чтобы получить ряды для вычисленія логариомовъ какихъ угодно чисель, притомъ ряды съ сильнъйшею сходимостью, вычтемъ формулу (3) изъ (2); получимъ

$$l(1+x)-l(1-x)=l(\frac{1+x}{1-x})=2\left[x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right]$$
(4)

рядъ, сходящійся при -1 < x < +1.

Положивь  $\frac{1+x}{1-x}=z$ , откуда  $x=\frac{z-1}{z+1}$ , получимь изь ур. (4) следующее:

$$lz = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots \right]$$
 (5)

имѣющее мѣсто при всякомъ положительномъ z, пбо въ такомъ случаѣ x всегда будетъ правильною дробью. При небольшомъ z формула (5) всего удобнѣе; такъ напр. при z = 2 получимъ:

$$l2 = 2\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \cdots\right]$$

Если рядъ, заключенный въ скобки, прервать на член $\frac{1}{m. \ 3^m}$ , гдm н к поторое нечетное число, то остатокъ

$$\frac{1}{(m+2)\cdot 3^{m+2}} + \frac{1}{(m+4)\cdot 3^{m+4}} + \frac{1}{(m+6)\cdot 3^{m+6}} + \cdots$$

будетъ меньше

$$\frac{1}{(m+2)\cdot 3^{m+2}} \left\{ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots \right\} =$$

$$\frac{1}{(m+2)\cdot 3^{m+2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{8(m+2)\cdot 3^m}.$$

Такимъ образомъ, если с будетъ неизвъстная правильная положительная дробь, то

$$l2 = 2\left[\frac{1}{1.3^{1}} + \frac{1}{3.3^{3}} + \frac{1}{5.3^{5}} + \cdots + \frac{1}{m.3^{m}}\right] + \frac{\mathfrak{c}}{4(m+2).3^{m}}$$

Последовательнымъ нахожденіемъ степеней  $\frac{1}{3}$  получимъ, что остатокъ  $\frac{1}{4.17.3^{15}} = 0,000000001$ , след., положивъ m = 15, получимъ величину 12 верно до 8 десятичныхъ знаковъ, именно: l2 = 0.69314718.

Если известень la, то найдемь l(a+b) на основаніи замечанія, что

$$l(a+b) = l\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right] = la+l\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

причемъ послъдній l можно разложить по формуль (2), если только абсолютная величина b меньше a; найдемъ

$$l(a+b) = la + \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{b!}{a}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^3 - \cdots$$

рядъ сходящійся при  $a^2 > b^2$ .

Такимъ образомъ можно, напр., найти l3, положивъ a=2, b=1 и воспользовавшись уже вычисленною ведичиною l2.

Бол'ве удобная формула для вычисленія l(a+b) получается изъ зам'вчанія, что

$$l(a+b) = la + l\left(1 + \frac{b}{a}\right) = la + l\left[\frac{1 + \frac{b}{2a+b}}{1 - \frac{b}{2a+b}}\right];$$

разложивъ последній і по формуль (4), получимъ

$$l(a+b) = la + 2\left\{\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \cdots\right\} \cdots (6)$$

рядъ сходящійся при всёхъ положительныхъ значеніяхъ a и b, потому-что тогда  $\frac{b}{2a+b}$  будетъ правильною дробью. Положивъ  $a=2,\ b=1,\$ получимъ

$$l3 = l2 + 2\left[\frac{2}{10} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^5 + \cdots\right]$$

Прервавъ рядъ на m-ой степени, можемъ опредёлить остатовъ вышеуказаннымъ способомъ, и найдемъ, что онъ меньше

$$\frac{1}{24(m+2)} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^m \cdot$$

При m=9 остатокъ будеть такъ маль, что не повліяеть на 8-ое десятичнео м'єсто; это дастъ: l3=1,09861229, и т. д.

Вычисленіе обынновенныхъ логариемовъ. Модуль. — Постронвъ указаннымъ путемъ таблицы натуральныхъ логариемовъ, можно изъ нихъ безъ труда вывести логариемы по какой уголно системѣ; для этого надо натуральные логариемы помножить на модуль, равный, какъ извѣстно,  $\frac{1}{la}$ ; его обозначаютъ чрезъ  $M_a$ . Для обыкновенныхъ логариемовъ a=10; l10=l2+l5=2,30258509; сл.  $M_{10}=\frac{1}{l10}=0,43429448$ .

На это число и нужно множить натуральные догариемы для вычисленія обыкновенныхь.

**809.** Теорема, на которой основано употребление табличекъ пропорціональныхъ частей.

Изъ формулы (6) предыдущаго § имвемъ

$$l(a+b)-la=l(\frac{a+b}{a})=2\{\frac{b}{2a+b}+\frac{1}{3}(\frac{b}{2a+b})^3+\cdots\}$$

Для полученія логариома по другой системъ, напр. по десятичной, надо этотъ логариомъ помножить на модуль  $M_{10}$ ; умножая объ части на  $M_{10}$ , получимъ

$$M_{10}.l(\frac{a+b}{a})$$
, have  $log_{10}(\frac{a+b}{a}) = 2M_{10}(\frac{b}{2a+b} + \cdots)$ 

Удержавъ здѣсь только первый членъ  $\frac{b}{2a+b}$  п обративъ его дѣленіемъ въ  $\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{2a(2a+b)}$ , получимъ приблизительную формулу

$$lg(a+b) - loga = \frac{b.M_{10}}{a} - \frac{b^2.M_{10}}{a(2a+b)}$$

При  $b \ge 1$  и  $a \le 10000$  второй членъ меньше 0,0000000002, а потому можно имъ пренебречь; отъ этого получимъ:

$$log(a+b) - loga = \frac{b.M_{10}}{a}$$

Подставива въ эту фермулу вмѣсто b другое число  $b' \leq 1$ , будемъ имѣть

$$log(a+b') - loga = \frac{b'.M_{10}}{a}$$
.

Раздѣливъ это равенство на предыдущее, имѣемъ пропорцію

$$\frac{\log(a+b')-\log a}{\log(a+b)-\log a}=\frac{b'}{b},$$

слёд. разности между логариомами пропорціональны разностямь между числами, если только разности чисель не превышають 1, а числа не менёе 10000, нбо только при этихъ условіяхъ и могла быть установлена послёдняя пропорція.

#### ГЛАВА L

О десятичных логариемахъ.—Ихъ отличительныя свойства.—Расположение и употребление таблицъ.—Вычисления при помощи логариемовъ.—Задачи.

### Отличительныя свойства десятичныхъ логариомовъ.

- 810. Вычисленіе этих логариемовъ приводится нъ ръшенію показательнаго уравненія  $10^x = N$ . Такъ какъ здѣсь основаніе больше единицы, то логариемы чисель, большихъ 1, положительны, логариемы же чисель, меньшихъ 1, отрицательны; затѣмъ, логариемъ основанія равенъ 1, а  $log\ 1 = 0$ .
- 811. Логариемы чиселъ, большихъ 1. Возвышая 10 въ цълыя положительныя степени, имъемъ:
- $10^{\circ} = 1; 10^{\circ} = 10; 10^{\circ} = 100; 10^{\circ} = 1000; 10^{\circ} = 10000; \dots; 10^{n} = 10^{n}$ Отсюда, замъчая, что показатели основанія 10 суть логариемы вторыхъ частей, имъемъ:
- Ід1 = 0; Ід10 = 1; Ід100 = 2; Ід1000 = 3; Ід10000 = 4; . . . . ; Ід10<sup>n</sup> = n. Заключаемъ, что логариемъ числа, состоящаю изъ 1 съ нулями, т. е. точной степени 10, равенъ числу пулей при единицъ. Эти точныя степени 10 суть единственныя числа, большія 1, которыхъ логариемы соизмъримы; всъ остальныя числа большія 1 (цълыя и неправильныя дроби), какъ мы уже знаемъ, имъютъ логариемы песоизмъримые, которые вычислить можно только приблизительно. Ихъ обыкновенно выражаютъ десятичными дробями.

Пусть, напр., имъемъ число 452,48. Число это больше 100, но меньше 1000, слъд. его логариемъ содержится между log 100 и log 1000, т. е. между 2 и 3, и потому равенъ 2 — несоизмъримая прав. дробь. Цълое число 2 называется характеристикою, дробь — мантиссою. Изъ предыдущаго примъра заключаемъ, что характеристика логариема числа большаго 1, равна числу цифръ безъ 1 въ цълой части даннаго числа.

Докажемъ, что это правило для опредъленія характеристики логариема даннаго числа — общее. Пусть число А содержить въ своей цълой части п цифръ; въ такомъ случаъ

$$10^{n-1} \le A < 10^n$$

ибо  $10^{n-1}$  и  $10^n$  суть наименьшія числа о n и n+1 циорахъ.

Отсюда

$$n-1 \ge |gA| < n$$

такъ какъ большему числу соотвътствуетъ и большій логариомъ; итакъ, цълая часть lgA равна n-1, т. е. числу циоръ безъ единицы въ цълой части числа.

812. Логариемы чисель, меньшихъ 1. Возвышая 10 въ цёлыя отрицательныя степени, находимъ:

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$
;  $10^{-2} = \frac{1}{100}$ ;  $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ ;  $\cdots$ ;  $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ 

Отсюда: 
$$ly \frac{1}{10} = -1$$
;  $ly \frac{1}{100} = -2$ ;  $lg \frac{1}{1000} = -3$ ;  $\dots$ ;  $lg \frac{1}{10^n} = -n$ .

След. логариемъ дроби, которой числитель — 1, а знаменатель есть точная степень 10, соизмёримъ и равенъ отрицательному числу нулей знаменателя. Всё остальныя числа, меньшія 1, какъ доказано, имёютъ логариемы несоизмёримые и отрицательные.

Эти отрицательные логариемы представляють въ видъ бинома, котораго цълый членъ отрицателенъ, а дробный положителенъ. Пусть, напр., данъ отрицательный логариемъ.

$$-3,4827129.$$

Разбивъ его на два члена: — 3 — 0,4827129, вычтемъ и придадимъ 1; дадимъ логариему видъ:

$$-4+(1-0,4827129)$$
, или  $-4+0,5172871$ 

Очевидно, разность между 1 и десятичною дробью получимъ, вычтя всё десятичныя цифры изъ 9, исключая послёднюю значащую цифру справа, которую вычитаемъ изъ 10. Преобразованный биномъ условились писать въ вид $\overline{\mathbf{4}}$ ,5172871, помёщая знакъ (—) надъ цёлою частью, къ которой онъ относится; цёлая часть называется отрицительною характеристикою.

Итакъ, во всѣхъ случанхъ мантисса есть положительная десятичная часть догариема, а характеристика всегда цѣлое число, положительное, либо отрицательное, смотря по тому, больше данное число единицы, или меньше ен.

Примичание. Разность между 1 и дробью 0,4827129 называется дополнением этой дроби до 1. Вообще дополнением числа до 1, 2, 3 . . . . , 10 называется разность между 1, 2, 3, . . . . , 10 и даннымъ числомъ. Чтобы получить дополнение логариема, надо последнюю цифру мантиссы вычесть изъ 10, а остальныя ем цифры изъ 9. Употребление дополнений даетъ возможность избёгать вычитания логариемовъ, замёняя это дёйствие приданиемъ ихъ дополнений; это особенно выгодно въ тёхъ случаяхъ, когда приходится дёлать нёсколько вычитаний.

Отрицательная характеристика логаривма положительного числа, меньшаго 1, содержить столько отрицательных вединиць, сколько находится нулей слыва оть первой значущей цифры числа, включая сюда и 0 цълыхъ.

Въ самомъ дълъ, пусть будеть число А, имъющее слъва отъ первой значущей цифры п нулей; имъемъ:

$$\frac{1}{10^n} \approx \Lambda < \frac{1}{10^{n-1}},$$

ибо значущія дифры числа начинаются съ десятичнаго знака порядка п. Отсюда

$$-n \ge \lg A < -(n-1),$$

ибо большему числу принадлежить и большій логариомъ.

Заключаемъ, что lg А равенъ (— n), или этому числу, увеличенному положительною правильною дробью, ибо этотъ логариемъ меньше — n+1; иначе говоря,

$$lg A = -n + k$$
, гд $0 < k < 1;$ 

слъд. (— n), по опредъленію, и есть отринательная характеристика lg А. Такъ, логариемы чиселъ 0,529 и 0,00743 имъютъ отринательныя характеристики: — 1 и — 3.

**813.** Если число увеличимъ въ 10, 100, 1000, . . ., вообще въ 10<sup>n</sup> разъ, то характеристика логаривма его увеличится на 1, на 2, . . . , вообще на n единицъ, мантисса же останется безъ перемъны.

Въ самомъ дълъ, пусть

$$ly A = k + m, \qquad 0 < m < 1,$$

гдъ k — характеристика, положительная или отрицательная, а m — мантисса логариема А. Имъемъ

$$log (A \times 10^p) = log A + p = k + m + p = (k + p) + m;$$

но p — число ц\u00e4лое. сл\u00e4д. и (k+p) есть ц\u00e4лое, положительное или отрицательное, число; и какъ 0 < m < 1, то (k+p) есть характеристика, и m — мантисса логариема числа  $A \times 10^p$ . Итакъ, мантисса осталась безъ перем\u00e4ны, а характеристика увеличилась p единицами.

**814.** Если число уменьшим вт 10, 100, 1000, . . . . , вообще, вт 10<sup>p</sup> разъ, то характеристика логаривма уменьшится на 1, на 2, на 3, . . . . , вообще. на р единицъ, мантисса же останется безъ перемъны.

Въ самомъ дълъ,  $lg\left(\frac{A}{10^p}\right) = lg \ A - lg \ 10^p = k + m - p = (k-p) + m$ , т. е характеристика уменьшилась p единицами.

Отсюда следуеть, что обе части логариема, характеристика и мантисса, суть оункціи, резко различающіяся между собою. Мантисса зависить отъ абсолютнаго значенія цифрь и отъ порядка, въ которомь оне следують одна за другою; характеристика же зависить только отъ положенія запятой, т. е. отъ относительнаго значенія цифрь. Отъ перемещенія запятой мантисса не изменяется; изменяется только характеристика.

## Расположение и употребление таблицъ логариомовъ.

- 815. Разсмотримъ употребление таблицъ логариемовъ *Бремикера*. Эти таблицы содержатъ логариемы цълыхъ чиселъ отъ 1 до 100009, вычисленные съ семью десятичными знаками; такимъ образомъ изъ этихъ таблицъ можно прямо брать логариемы чиселъ одно , дву , . . . пяти значныхъ.
- 816. Расположение таблицъ. Страницы отъ второй до пятой вилючительно содержать логариемы чисель отъ 1 до 1000, причемъ въ таблицахъ (какъ и далье) помещены только мантиссы, такъ какъ характеристику легко опредёлить по числу цифръ числа. Колонны подъ литерою N содержатъ числа, противъ которыхъ подъ знакомъ Log находятся мантиссы соотвътствующихъ логариомовъ. Съ шестой до 185-й страницы расположение таблицъ таково: въ колонив подъ литерою N находятся первыя четыре цифры чисель, пятыя же цифры пом'вщены въ первой горизонтальной строкь: 0, 1, 2, . . . , 9; мантиссы же расположены такимъ образомъ: такъ какъ первыя три цифры мантиссы одинаковы для нъсколькихъ послъдовательныхъ логариомовъ чиселъ, то они написаны одинъ разъ для всёхъ этихъ чиселъ, противъ наименьшаго числа колонны N, къ которой они принадлежать и въ вертикальной колонив подъ цафрою О. Последние четыре знака мантиссы помъщены противъ четырехъ первыхъ циоръ числа и въ вертинальной колонив, имъющей въ заголовив пятую цифру числа. Сверхъ того всв страницы, начиная съ 6-й, содержатъ таблички подъ литерами Р.Р: это таблички пропорціональных частей, употребленіе которых будеть указано въ своемъ мѣстѣ.
- 817. Употребленіе таблицъ. Помощію таблицъ рѣшаются два вопроса: 1) о нахожденіи логариєма даннаго числа и 2) о нахожденіи числа, соотвѣтствующаго данному логариєму.

# Первый вопросъ.

### Нахожденіе логариема цілаго числа.

818. Первый случай: данное число находится въ таблицахъ.—Пусть требуется найти log 36459. На стр. 58 находить первыя три циоры мантиссы: 561; послёднія же четыре циоры ея пом'єщены въ горизонтальной строкъ противъ числа 3645 и въ вертикальной колоннъ подъ циорою 9, именно: 8048; характеристика же логариома, по § 811, равна 4, слёд. log36459=4,5618048.

Пусть еще требуется найти log48868; первыя три цифры мантиссы (стр. 83) суть 688; для послёднихъ четырехъ, на пересёченіи горизонт. строки противъ числа 4886 съ вертик. колонною подъ цифрою 9, находимъ  $\overline{0246}$ ; черта надъ первою изъ этихъ цифръ показываетъ, что предшествующая цифра (8) мантиссы должна быть увеличена на 1. Такимъ образомъ имѣемъ: log48868 = 4,6890246.

Когда за пятью значущими циорами числа следують нули, напр. 48868000, то, замечая, что это число больше 48868 въ 1000 разв, на основании § 813,

заключаемъ, что его логариемъ больше догариема 48868 на 3 единицы, такъ что lg 48868000 = 7,6890246.

819. Второй случай: данное число не содержится въ таблицахъ. Пусть требуется найти log числа, содержащаго болже пяти цифръ, напр. числа 41592687. Такъ какъ логариема этого числа нётъ въ таблицахъ, то отдёляемъ отъ правой руки къ лёвой столько десятичныхъ цифръ, чтобы слёва отъ запятой получилось пятизначное число; такимъ образомъ нижемъ 41592,687. Это число, будучи въ 1000 разъ меньше данного, имжетъ логариемъ съ тою же мантиссою, какъ и заданное число. Находимъ мантиссу логариема числа 41592,687. Число это заключается между 41592 и 41593, откуда изъ таблицъ имжемъ, что логариемъ его содержится между

 $\log 41592 = 4,6190098$  H  $\log 41593 = 4,6190202$ .

Разность между числами 41592 и 41593 равна 1, а между соотвътствующими логариемами—составляетъ 0,0000104. Отсюда видно, что если къ ближайшему меньшему числу придадимъ 1, то къ соотвътствующему логариему слъдуетъ придать 0,0000104. Но намъ нужно ближайшее м. ч. увеличить не на цълую единицу, а на 0,687; спрашивается: на сколько соотвътственно этому придется увеличить ближ. меньш. логар. 4,6190098? Для ръшенія вопроса замъчаемъ, что по § 809: если разности между числами не превышаютъ 1 (что у насъ и есть), то разности между логариемами соотвътствующихъ чиселъ, большихъ 10000, пропорціональны разностямъ между числами. Основываясь на этомъ и называя искомую разность между /g 41592,687 и /g 41592 буквою x, имъемъ пропорцію

x:0,0000104=0,687:1, otryga  $x=0,0000104\times0,687$ .

Умноженіе этихъ дробей ділается сокращенно при помощи слідующей таблички пропорціональныхъ частей (стр. 69):

| 10 4 | 10.4 | 20.8 | Въ ней помъщены сокращенно, для сбереженія мъста, произве3 31 2 | денія 104 десятимилліонныхъ на 0,1;0,2, . . . 0,9; причемъ точками въ этихъ произведеніяхъ отдълены десятимилліонныя доли 
6 62.4 | отъ стомилліонныхъ долей. Такимъ образомъ эта табличка постав7 72.8 | 83 2 |

8 83.2 9 93.6

0,0000104 0,1 0,00000104 0,2 0,00000208

0,3 | 0,00000312

0,4 0,00000416

0,5 0,00000520

0,6 0,00000624

0,7 0,00000728 0,8 0,00000832

0,9 0,00000936

При помощи ея можно прямо выписать частныя произведенія дроби 0,0000104 на 0,6, затёмъ на 0,08 и наконецъ на 0,007. Первое изъ этихъ произведеній прямо беремъ изъ таблички, отдёливъ стомилліонныя доли точкою, что даетъ 0,0000062.4. Уменьшивъ произведеніе 0,0000104 на 0,8, т. е. 0,00000832 въ 10 разъ, имѣемъ произведеніе табличной разности на 0,08 иля 0,0000008.32. Наконецъ, уменьшивъ произведеніе табл. разн. на 0,7 во сто разъ, имѣемъ произведеніе ея на 0,007, именно 0,0000000.728.

Сложивъ эти частныя произведенія, имфемъ

 $0,0000104 \times 0,687 = 0,0000071.448.$ 

Это то произведение и нужно придать къ логариему ближ. мен. числа, для получения log~41592,687; имжемъ

$$lg$$
 41592,687 = 4,6190169.448.

Цифры 448, слѣдующія за десятимилліонными, откидываемъ, такъ какъ табличныя мантиссы имѣютъ только 7 десятичн. знаковъ; приэтомъ, если первая изъ отбрасываемыхъ цифръ произведенія меньше 5, какъ въ нашемъ случаѣ, то послѣднюю сохраненную цифру произведенія оставляемъ безъ перемѣны; въ противномъ случаѣ, послѣднюю сохраненную цифру произведенія увеличиваютъ на 1. Такимъ образомъ:

$$lg$$
 41592,687 = 4,6190169.

Такъ какъ данное число въ 1000 разъ больше 41592,687, то оставивъ мантиссу найденнаго логариема безъ перемъны, увеличиваемъ характеристику на 3 единицы; такимъ образомъ:

$$/g$$
 41592687 == 7,6190169.

На практикъ вычисление располагають такъ:

		$log\ 41592 = 4,6190098$
пропорц.	часть	для 0,6 62,4
«	«	<ul><li> 0,08 8,34</li></ul>
<	«	« 0,007 0,728
		$log\ 41592,687 = 4,6190169,448$
Наконецъ		$lg\ 41592687 = 7,6190169.$

820. Примъчаніе. Пусть требуется найти log числа, содержащаго болье 8 цифръ, папр. 72546892548. Характеристика логарнема равна 10, а мантисса тоже, что у логариема дроби 72546,892548. Опридъляемъ мантиссу вышеизложеннымъ способомъ:

log~72546	=10,8606135		
0,8	48.0		
9.	5.40		
2	0.12		
	5 0.030		
	4 0.0024		
	8 0.00048		
ly 72546892	2548 = 10,8606189.		

Изъ этого примъра видно, что уже 8-я циора даннаго числа увеличиваетъ мантиссу только на 0.12, а потому не оказываетъ вліянія на 7-ую десатичную циору мантиссы; поэтому, при отыскиваніи log числа, содержащаго болѣе 8 циоръ, употребляютъ только первыя 8 циоръ, остальныя же, какъ невліяющія на семизначную мантиссу, замѣняютъ нулями, или просто не пользуются ими при опредѣленіи поправки. Въ самомъ дѣлѣ, наибольшая табличная разность = 0.0000435, а потому девятая циора числа, даже если она имѣетъ наибъвеличину, т. е. = 9, измѣнитъ мантиссу только на  $0.0000435 \times 0.0009 =$ 

0,00000003915, т. е. менъе чъмъ на  $\frac{1}{2}$  единицы 7-го десятичнаго мъста; и это—въ самомъ неблагопріятномъ случать, когда и табл. разн. и девятая цифра числа имъютъ наибольшія величины.

Изъ сказаннаго выводимъ правило: если число имъетъ болье 5 цифръ, то, отдъливъ слъва запятою 5 цифръ, подыскиваютъ логаривмъ полученнаго пятизначнаго числа и придаютъ къ нему произведение табличной разности на три первые десятичные знака, составленное вышеуказаннымъ способомъ.

# Определение логариема дроби.

821. Сначала разсмотримъ нахождение логариемовъ десятичныхъ дробей. Пусть требуется найти log 347,84762. Замътивъ, что характеристика искомаго логариема = 2, а мантисса таже, что и у логариема числа 34784,762, имъемъ:

$$\begin{array}{c} lg\ 34784 = 2,5413795 \\ 0,7 & 87.5 \\ 0,06 & 7.5 \\ 0,002 & 0.25 \\ log\ 347,84762 = 2,5413890. \end{array}$$

Откуда

Для втораго примъра пусть требуется найти логариемъ десятичной дроби, меньшей 1, напр.  $log\ 0.0076806$ . Имъемъ:

$$log 0,0076806 = log \frac{76806}{10000000} = lg 76806 - lg 100000000$$
  
= 4.8853951 - 7.

Вычитая 7 изъ 4, чтобы мантиссу оставить положительною, получимъ отрицательную характеристику — 3, такъ что

$$log 0.0076806 = \overline{3.8853951};$$

знакъ минусъ ставится nad характеристикою для указанія, что только характеристика отрицательна.

Отсюца правило: для нахожденія логаривма десятичной дроби меньшей 1, беремъ мантиссу логаривма числителя дроби, а въ характеристикъ ставимъ столько отрицательныхъ единицъ, сколько въ львой части дроби находится нулей, включая сюда и 0 цълыхъ.

822. Дусть требуется найти log обыкновенной дроби, напр.  $\frac{8}{11}$ . Имфемъ:

$$log \frac{8}{11} = lg 8 - lg 11 = 0,9030900 - 1,0413927 = -0,1383027;$$

чтобы сдълать мантиссу положительною, поступаемъ по указаніямъ § 812 и находимъ: 1,8616973.

Тотъ же результатъ получимъ, обращая  $\frac{8}{11}$  въ десятичную дробь и ограничиваясь восемью циорами въ числителъ; находимъ 0.72727272. Слъд.

$$lg \frac{8}{11} = lg 0,72727272 = \overline{1,8616957}$$
для  $0,2$  11.8
0,07 4.13
0,002 0.118
$$lg \frac{8}{11} = \overline{1,8616973}.$$

## Второй вопросъ.

# Нахождение числа, соотвётствующаго данному логариему.

823. 1-й случай: мантисса даннаго логариема находится въ таблицахъ. Пусть  $\log x = 3.7592749$ ; найти x? Находить прежде всего число 759, образуемое первыми тремя цифрами мантиссы: оно находится въ колоннъ 0 на стр. 100; опускаясь въ этой же колоннъ, доходить до числа 2144 — ближайшаго, меньшаго по сравненію съ 2749; наконецъ, въ горизонтальной строкъ, начинающейся съ 2144, находить число 2749 въ колоннъ подъ цифрою 8. Такъ какъ 2749 находится въ горизонт. строкъ противъ числа 5744, то, выписываемъ это число и приписавъ къ нему справа цифру 8, получаемъ 57448, а какъ характеристика даннаго логариема равна 3, то въ цълой части искомаго числа должно быть три цифры; а потому x = 5744,8.

824. 2-й случай: данная мантисса не содержится въ таблицахъ. Пусть  $\log x = 3,4592786$ ; найти х? Замънивъ характеристику 3 четырымя, замъчаемъ, что догариемъ 4,4592786 содержится между догариемами

4.4592869, которому соотвътствуеть число 28793 и 4.4592718. « « 28792.

Разность этихъ логариемовъ = 0,0000151, а разность соотвётствующихъ чиселъ = 1. Заключаемъ, что если ближайшую меньшую мантиссу увеличить на 0,0000151, то бл. м. ч. 28792 надо увеличить на 1; но мантисса логариема 4,4592786 превышаетъ меньшую мантиссу только на 0,0000068; спрашивается, па какое число y, соотвётственно этому, искомое число x превышаетъ 28792? Зная теорему, что разности между числами пропорціональны разностямъ между логариемами, если первыя не превышаютъ 1, какъ и есть въ данномъ случаѣ, заключаемъ, что y во столько разъ меньше 1, во сколько 0,0000068 меньше 0,0000151, откуда пропорція

y:1=0,0000068:0,0000151, или по умножении обоихъ членовъ втораго отношения на 10000000:

y:1=68:151, отвуда y=68:151.

Это частное вычисляемъ съ 2 десятичными знаками, такъ какъ остальные будутъ невърны; и для вычисленія пользуемся табличкой пропорціональныхъ частей для числа 151 (стр. 43), въ которой числа 15,1, 30.2,..., 135.9 суть произведенія изъ 151 на 0,1, 0,2,...., 0.9. Намъ нужно найти, на сколько слъдуетъ помножить 151 для полученія 68? Табличка показываетъ, что, умноживъ

151 на 0,4, находимъ 60,4—число ближ. меньше къ 68; и такъ, въ частномъ имѣемъ, во первыхъ, 0,4; вычтя произведеніе 60,4 изъ дѣлимаго, находимъ остатокъ 7,6. Наша табличка показываетъ далѣе, что, умноживъ 151 на 0,5, находимъ 75,5; а слѣд., умноживъ 151 на 0,05, найдемъ произведеніе 7,55— ближ. м. къ остатку 7,6. Итакъ, въ частномъ имѣемъ еще 5 сотыхъ долей. Окончательно y=0,45. Прибавивъ эту дробь къ 28792, имѣемъ 28792,45—число, соотвѣтствующее логариему 4,4592786; а уменьшивъ это число въ 10 разъ, найдемъ число, соотвѣтствующее данному логариему. Итакъ x=2879,245.

На практикъ вычисление располагается такъ:

Еще примъръ. Укажемъ нахождение числа, соотвътствующаго логариему съ отрицательною характеристикою (къ этому виду всегда слъдуетъ приводить отрицательный логариемъ, такъ какъ въ таблицахъ нътъ отрицательныхъ мантиссъ). Пусть  $log\ x = \overline{2},4832107$ , найти x? Придавая 6 къ данному log, чтобы сдълать характеристику равною 4, и вычитая 6, имъемъ

$$log x = 4,48322107 - 6 = 4,4832107 - lg 1000000.$$

Находимъ число, соотвътствующее погариему =4,4832107.

$$\begin{array}{c}
log y = 4,4832107 \\
30423 & 020 \\
\hline
87 \\
6 & 85,8 \\
\hline
1,2 \\
1 & 1,43
\end{array}$$

$$y = 30423,61.$$

Итакъ:  $log x = log 30423,61 - lg 1000000 = lg \frac{30423,61}{1000000} = lg 0,03042361,$ откуда x = 0,03042361.

Отсюда правило: для нахожденія числа, соотвитствующаю логаривму съ отрицательною характеристикою, опредиляемъ число, соотвитствующее положительной мантисси, приписываемъ съ ливой стороны его столько нулей, сколько единицъ въ характеристики, и первый слива ноль отдиляемъ запятою.

# Дъйствія надъ логариомами съ отрицательною характеристикою.

825. Сложеніе. — Сложеніе мантиссь, какъ чисель положительныхъ, не представляеть никакихъ затрудненій; что касается характеристикъ, то ихъ соединяють по правилу приведенія подобныхъ членовъ. Напр.:

3,2173980  $\overline{7},8239172$  2,3758630 -2+1,4171782, или  $\overline{1},4171782$ .

826. Вычитаніе. Пусть требуется сдёлать вычитаніе:

 $\begin{array}{r}
 \overline{5,4567895} \\
 \overline{2,6356789} \\
 \overline{4,8211106}
 \end{array}$ 

Прибавляя въ мантиссъ уменьшаемаго 1, а въ характеристивъ — 1, по вычитаніи мантиссъ находимъ 0.8211106; затъмъ, вычтя изъ — 6 характеристику — 2 вычитаемаго, находимъ въ остатвъ — 4; полный остатовъ —  $\overline{4.8211106}$ .

**827.** Умноженіе,—Пусть требуется  $\overline{2,4367894} \times 5$ . Имфемъ:

$$(-2+0,4367894) \times 5 = -10+2,1839470 = \overline{8},1839470.$$

828. Дѣленіе.—Пусть требуется раздѣлить  $\overline{6}$ , 2466724 на 2. Имѣемъ:

$$(-6+0.2466724): 2 = -3+0.1233362 = \overline{3.1233362}$$
.

Еслибы тотъ же логариемъ требовалось раздълить на 5, то, чтобы характеристика дълилась на-цъло на 5, слъдуетъ къ ней придать — 4, а потому къ мантиссъ надо придать — 4; такимъ образомъ имъемъ:

$$\overline{6,2466724}:5 = (-10+4,2466724):5 = -2+0,8493345 = \overline{2,8493345}.$$

Когда встрёчается случай дёленія логариемовъ съ отрицательными характеристиками, слёдуетъ мантиссы ихъ дёлать отрицательными. Напр. при раздёленіи  $\overline{2},3142890:1,3156782$  замёчаемъ, что дёлимое — -1,6857110, и потому частное приводится въ — 1,6857110:1,3156782.

829. Употребленіе дополненій.— Когда въ выраженіи содержится нъсколько вычитаємыхъ логариомовъ, удобнъе замънять ихъ дополненіями, такъ какъ приэтомъ оба дъйствія— сложенія и вычитанія логариомовъ приводятся къ одному дъйствію— сложенія ихъ. Такъ, употребляя дополненія до 10, замъняємъ выраженіе

$$lg a - lg b + lg c - lg d - lg e$$

равнымъ ему выраженіемъ

или

$$lg a + (10 - lg b) + lg c + (10 - lg d) + (10 - lg e) - 30$$
  
 $lg a + Co lg b + lg c + Co lg d + Co lg e - 30$ ,

причемъ Со есть сопращение слова complementum-дополнение.

830. Примѣры вычисленій съ логариомами.—І. Вычислить  $x=\frac{\pi}{178}$ . Логариомируя, имѣемъ:  $lg \, x = lg \, \pi - lg \, 173 = 0,4971499 - 2,2380461$ , или, замѣнивъ вычитаемый log его дополненіемъ до 3:

$$lg \ x = 0.4971499 + (3 - 2.3380461) - 3 = 0.4971499 + 0.7609539 - 3 = 2.2591038.$$

Отсюда x = 0,0181595.

II. Вычислить  $x = \frac{\pi}{0,00569}$ . Логариемируя и употребляя дополненіе логариема знаменателя до 1, последовательно имеемъ:

$$\log x = 0.4971499 - \overline{3.7551123} = 0.4971499 + (1 - \overline{3.7551123}) - 1$$
  
=  $0.4971499 + 2.2448877 = 2.7420376$ .

Отсюда x = 552,125.

III. Вычислить 
$$x = \frac{0,0084321 \times \sqrt[3]{\frac{2}{15}}}{\sqrt{8,37}}$$
.

$$\log x = \lg 0,0084321 + \frac{1}{3} (\lg 2 + \text{доп. } \lg 15 - 2) + \text{доп. } \frac{1}{2} \log 8,37 \cdot -1$$

$$lg\ 0,0084321=\overline{3},9259357$$

$$lg\ 2=0,3010300$$
доп.  $lg\ 15=0,8239087-2$ 

$$\overline{1,1249387}$$
по раздѣленін на 3:
$$\overline{1,7083129}$$

$$lg\ 8,37=0,9227255$$

$$\frac{1}{2}\ lg\ 8,37=0,4613627$$
доп.  $\frac{1}{2}\ lg\ 8,37=0,5386373-1$ .

Вычисленіе 
$$x$$
.
$$\overline{3,9259357}$$

$$\overline{1,7083129}$$

$$\overline{1,5386373}$$

$$tg  $x = \overline{3,1728859}$ 

$$x = 0,00148897.$$$$

IV. Вычислеть 
$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{15,92} \times \sqrt[3]{0,0182}}{0,00526 \times (196)^5}}$$
,  $lg 15,92 = 1,2019431$ 

$$0,1717062$$

$$\overline{1,4200238}$$

$$2,2790143$$

$$\overline{12,5387195}$$

$$1g x = \overline{10,4094638} : 2$$

$$= \overline{5,2047319}$$

$$x = 0,00001602256.$$

#### 831. Задачи.

1. Логариемировать выраженія:

$$\frac{(3ab^2)^3(2a^2b)^4}{5a^4b^6}; \ \frac{a+b}{4(a+b)} \cdot \sqrt{4c^2d^2 - [c^2 + d^2 - (a-b)^2]^2}.$$

2. Найти х изъ уравненій:

$$\log x = \frac{1}{2} [\log a + \frac{1}{3} \log(bc)]; \ \log x = 2\log x + 3\log b - \log(2a + 3b);$$
$$\log x = \frac{1}{2} [1 + \log a] + \frac{1}{3} m [2 + \log b] - \frac{1}{4} n [3 + 6\log c] + \log abc$$

3. Найти логариемы чисель:

9287856; 32875935; 0,0007392575; 0,0010219856;

$$0.01873^3$$
;  $0.019271^5$ ;  $\sqrt{0.000628074}$ ;  $\sqrt[5]{0.001324597}$ .

4. Найти числа, соотвётствующія логарнемамъ:

$$3,4743620;$$
  $4,6158449;$   $1,1924002;$   $3,9070188;$   $2,9230056;$   $3,6000249;$   $4,7480096;$   $0,0360697;$   $1,4052809;$   $0,5318642;$   $\overline{1,3140148;}$   $\overline{3,5542801;}$   $\overline{4,9235311;}$   $\overline{2,7610056;}$   $\overline{3.4271069;}$   $\overline{1,0004041;}$   $-2,5752036:$   $-4,6032891;$   $-1,2005869;$   $-0,5039789;$ 

5. Вычислить выраженія:

$$x = \frac{(11\sqrt[3]{23459})^4}{40173\sqrt[7]{51432}}; \quad x = \frac{(\sqrt[5]{3226727})^6}{10732872\sqrt[4]{7}}; \quad x = \sqrt[5]{\frac{854,2765 \times 0,009748}{0,0672^3 \times 289^3}};$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{0,047 \times 0,038^4}}{0,0091^8 \times \sqrt{0,0057}}; \quad x = \frac{1,045^{\frac{3}{2}} \times 0,046789^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[7]{2}}{245,28^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[9]{36,4057^8}};$$

$$x = \sqrt[15]{\frac{3413^2 - 813^2}{441^8}}; \quad x = \sqrt[8]{\frac{22315^6 + 88891^6}{441^5 + 1}}; \quad x = \sqrt[10]{\frac{1 + \sqrt[8]{44195467}}{541 - \sqrt[8]{18295}}};$$

6. Вычислить площадь треугольника, котораго стороны суть:

$$a = 3424,75;$$
  $b = 7836,45;$   $c = 5245,8$  metpa

- 7. Вычислить радіусь сплошнаго серебряннаго шара, въсящаго столько же, сколько въсить мъдный цилиндръ, котораго радіусь основанія равень 6 сантим., а высота 128 миллим. Плотность серебра = 10,47, а плотность мъди 8,85.
  - 8. Вычислить площадь трапеціи, зная 4 ея стороны:

$$a = 2020,42;$$
  $b = 1087,55;$   $c = 1073,75;$   $d = 987,64$  method.

- 9. Вычислить дугу круга, котораго радіусъ равенъ 187,957 м., а уголъ при центр $\mathring{\mathbf{b}}$   $38^045'28''$ .
- 10. Вычислить площадь круговаго сектора, котораго радіусь =318,428 м., а центральный уголь  $75^037'45''$ .
- 11. Вычислить центр. уголъ вруговаго севтора, площадь котораго =230,4715 м., а радіусь 18,328 м.
- 12. Вычислить стоимость чугунной водопроводной трубы, внутренній діаметръ которой =0.245 м., средняя толщина стѣнокъ 0.014, а длина трубы 2134 м. Удѣльный вѣсъ чугуна 7.207; цѣна килограмма его =0.2 фр.
- 13. Дугу окружности радіуса 428, 35 м., содержащую 60°, обращають около одного изъ конечныхъ радіусовъ; вычислить: 1) поверхность описаннаго сегмента: 2) объемъ сферич. сектора: 3) объемъ сферич. сегмента.
- 14. Пустой баллонъ въситъ 63,45 кил., квадратный метръ его оболочки въситъ 0,25 кил. Вычислить подъемную силу, зная, что 100 граммовъ и 1,298 кил. суть соотвътственные въса кубическаго метра нечистаго водорода и воздуха.

#### ГЛАВА LI.

Приложенія логариемовъ. — Рішеніе показательных уравненій. — Финансовыя операціи: сложные проценты, срочные вклады и срочныя уплаты. — Задачи.

## Рѣшеніе показательныхъ уравненій.

832. Решеніе уравненія  $a^x = b$ .—Полагая a и b положительными, беремъ догариемы отъ объихъ частей: x/y a = ly b, откуда

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

 $\Pi$  Римъръ. Pышить уравнение  $0,06971^x = 0,00856$ . Логариемируя, находимъ

 $x \log 0.06971 = \log 0.00856$ ,

откуда:

$$x = \frac{lg\ 0.00856}{lg\ 0.06971} = \frac{\overline{3.9324738}}{\overline{2.8432951}},$$

или, замъчая, что  $\overline{3},9324738 = -3 + 0,9324738 = -2,0675262$  и такимъ же образомъ  $\overline{2},8432951 = -1,1567049$ , имъемъ

$$x = 2,0675262 : 1,1567049.$$

Выполнивъ дѣленіе, находимъ, x=1,787, съ точи. до 0,001.

Приложеніе. Ришить ур-ніе  $a^{b}^{c^{x}} = d$ . Полагая  $c^{x} = y$ ,  $b^{y} = z$ , откуда  $a^{z} = d$ , имбемъ 3 ур-нія съ 3 неизвъстными, изъ которыхъ послъдовательно выводимъ:

$$z=rac{lg\ d}{lg\ a}, \quad y=rac{lg\left(rac{lg\ d}{\overline{lg\ a}}
ight)}{lg\ b}, \quad ext{n} \; ext{ наконецъ} \quad x=rac{lg\left[rac{lg\left(rac{lg\ d}{\overline{lg\ u}}
ight)}{\overline{lg\ b}}
ight]}{\overline{lg\ b}}.$$

**833.** Promenie ypasnenia  $a\alpha^{2x} + b\alpha^{x} + c = 0$ . Положивъ  $\alpha^{x} = y$  (1), имъемъ  $ay^{2} + by + c = 0$ .... (2).

Квадратное ур. (2) даеть y, а для всяваго значенія y находимъ изъ (1) соотвѣтственное значеніе x. Но для x получится дѣйствительное значеніе только тогда, когда y будеть дѣйствительно и положительно. Отсюда, при  $\alpha > 0$ , данное ур. будеть имѣть  $\partial sa$   $\partial r$ ыйствительнохи кория только тогда, когда удовлетворяются условія:

$$b^2-4ac>0$$
,  $ac>0$ ,  $ab<0$ .

Примъръ. Ръшить уравнение  $5^{x+1} + \frac{125}{5^x} = 626$ .

Освободивъ отъ знаменателя, имвемъ

$$5^{2x+1} - 626 \times 5^x + 125 = 0;$$

положивъ  $5^x = y$ , даемъ ур-нію видъ  $5y^2 - 626y + 125 = 0$ , откуда y' = 125,

 $y''=\frac{1}{5}$ . Такимъ образомъ получимъ два ур-нія: 5x=125, откуда x'=3, и  $5x=\frac{1}{5}$ , откуда x''=-1.

834. Ръшеніе системы: lg x + lg y = m в ax + by = c.

Первое ур. можетъ быть представлено въ видѣ  $ly\ xy = m$ , откуда  $xy = 10^m\dots(1)$ ; такимъ образомъ вопросъ приводится къ рѣшенію системы:  $xy = 10^m$  и ax + by = c. Исключеніе y даетъ ур-ніе  $ax^2 - cx + b \times 10^m = 0$ . Рѣшивъ это ур., найдемъ значенія y, соотвѣтствующія каждой величинѣ x, изъ уравненія  $y = \frac{c - ax}{b}$ .

Примъръ I. Ръшить систему

$$lg x + lg y = 3 \dots (1)$$
  $5x^2 - 3y^2 = 11300 \dots (2)$ 

Нервое ур. можно представить въ видt ly xy = ly 1000, или xy = 1000. ..(3) Исключеніе y изъ (2) и (3) даетъ, по упрощеніи, уравненіе

$$x^4 - 2260x^2 - 600000 = 0$$

имъющее два маимыхъ корня и два дъйствительныхъ; дъйствительный положит. корень

$$x = \sqrt{1130 + \sqrt{1130^2 + 600000}}$$

или x = 50, и слъд. y = 20.

Примъръ II. Ръшить систему:

$$2 \lg y - \lg x = 0.1249387;$$
  $\lg 3 + 2 \lg x + \lg y = 1.7323939.$ 

 $2 \, ly \, y - ly \, x = ly \, \frac{y^2}{x}$ ; 0,1249387 =  $ly \, 1,333 \ldots = ly \, \frac{4}{3}$ ; сябд. первое ур. приводится къ  $\frac{y^2}{x} = \frac{4}{3}$ , откуда  $x = \frac{3}{4} \, y^2$ . Съ другой стороны  $ly \, 3 + 2 \, ly \, x + ly \, y = ly \, 3x^2y$ ; 1,7323939 =  $lg \, 54$ ; сл. вгорое ур. приводится къ  $3x^2y = 54$ . Исключая x, находимъ ур.  $y^5 = 32$ , откуда y = 2; и наконецъ x = 3.

### ФИНАНСОВЫЯ ОПЕРАЦІИ.

### Сложные проценты.

# Сложные проценты для целаго числа леть.

835. Опредъленіе. Говорять, что капиталь поміщень на сложные проценты, когда въ конці каждаго года процентным деньги прибавляются къ капиталу для нарощенія его процентными деньгами въ теченіи слідующихъ літь.

836. Основной вопросъ. Вычислить, во что обратится капиталь а руб. отданный на сложные проценты по р со ста, въ t льть?

100 руб. приносять въ годъ p руб. прибыли; слъд. 1 руб. принесеть въ это время  $\frac{p}{100}$  руб., и потому 1 р. къ концу перваго года обратится въ  $1+\frac{p}{100}$ ,

$$\mathbf{A} = a(1 + r)^t \dots (1).$$

837. Формула (1) содержить четыре количества: a, A, t и p (заключается въ r); сл. когда три изъ нихъ будутъ даны, то можно опредълить четвертое. Отсюда четыре задачи.

838. Основная задача. Опредлючие А по данными а, р и t прямо ръшается ур-мъ (1); логарнемируя его, имъемъ

$$lg A = lg a + t \cdot lg (1 + r) \cdot \cdot \cdot (2)$$

Примъръ: a = 20000, p = 4.5 и t = 10.

$$r = \frac{4.5}{100} = \begin{cases} lg \ a = 4,3010300 \\ 10 \ /g \ (1+r) = 0,1911629 \\ lg \ A = 4,4921929 \\ A = 31059, \ 38 \ \text{py6}. \end{cases}$$

839. Какой капиталь а нужно помъстить на сложные проценты по р со ста, чтобы въ концъ t лътъ составилась сумма A?

Ур-ніе (2), ръшенное относительно /д а, даеть

$$lg \ a = lg \ A + \text{mon.} \ t \ log \ (1 + r) \dots (3)$$

Примъръ. A = 40324, t = 21, p = 4.

$$lg (1+r) = 0.0170333$$
  $lg A = 4.6055636$  t  $lg (1+r) = 0.3576993$  доп. t.  $lg (1+r) = \overline{1.6423007}$   $lg a = \overline{4.2478643}$   $a = 17695,56$ .

**840**. На сколько лють нужно помыстить капиталь a, чтобы, при сложных процентахь по p со ста, составилась сумма A? Прибыль на 1 руб. равна r.

Рътия ур. (2) относительно t, имъемъ

$$t = \frac{\lg A - \lg a}{\lg (1+r)}.$$

Примъръ. A = 40324; a = 17695,56; p = 4.

$$t = \frac{4,6055636 - 4,2478643}{0,0170333} = \frac{0,3576993}{0,0170333} = 21.$$

**841.** При каких процентах капитал и дасть, по истечени t льть, сумму A?

Ръшая ур. (2) относительно lg (1 + r), имъемъ

$$lg(1+r) = \frac{lg A - lg a}{t}$$
.

Найдя отсюда 1+r, легко опредълить и p.

Примъръ: a = 21319, A = 42327, n = 15.

$$lg A = 4,6266237$$

$$lg a = 4,3287668$$

$$lg (1+r) = \frac{0,2978569}{15} = 0,0198571$$

$$1+r = 1.04678.$$

Отсюда r или  $\frac{p}{100}=0.04678$ , а сивд. p=4.678 или приблизительно въ цълыхъ копъйкахъ, p=4 р. 68 коп.

# II. Время номѣщенія капитала—дробное.

842. Обыкновенное время, въ теченіи котораго капиталъ находится подъ процентами, слагается изъ цълаго числа лътъ и нъкоторой доли года, которую условимся обозначать буквою f; цълое же число лътъ, по прежнему, обозначимъ буквою t. Если напр. доля года равна 3 мъсяцамъ 25 днямъ, то

$$f = \frac{3 \times 30 + 25}{360} = \frac{23}{72}$$

принимая каждый мъсяцъ въ 30 дней.

**843.** Основной вопросъ. Какая сумма A составится, если капиталь a, отданный на сложные % по p, находится въ обороть t льть и долю f года.

По истеченій t лёть напиталь a обратится въ a  $(1+r)^t$ . Каждый рубль этой суммы, получая въ годъ приращеніе r, въ теченій доли f года дастъ приращеніе fr; полное же приращеніе суммы a  $(1+r)^t$  будеть a  $(1+r)^t$ . fr. Та кимъ образомъ къ концу t+f лёть составится сумма a  $(1+r)^t+a$   $(1+r)^t$ . fr, или  $A = a (1+r)^t (1+fr) \dots (1).$ 

Примъръ: a = 41524,75, p = 5, t = 7 и f = 10 мъс.

$$1+fr = 1 + \frac{10}{12} \times 0,05 \qquad lg \ a = 4,6183070$$

$$= 1 + \frac{0,25}{6} \qquad t \ lg \ (1+r) = 0,1483251$$

$$= 1,0416667 \qquad lg \ (1+fr) = 0,0177288$$

$$lg \ A = 4,7843609$$

$$A = 60863.05 \text{ py6}.$$

**844**. Какой капиталь, помъщенный на сложные % по 5 со 100, дасть въ 18 лють и 3 мъсяца сумму 48734,05 руб?

Логариомируя ур. (1) и опредъдяя  $lg\ a$ , имъемъ

$$lg \ a = lg \ A + \text{ доп. } t \ lg \ (1+r) + \text{ доп. } log \ (1+fr) \dots$$
 (2)  
 $lg \ 1,05 = 0,0211893$   $lg \ A = 4,6878325$   
 $18 \ lg \ 1,05 = 0,3814074$  доп.  $t \ lg \ (1+r) = \overline{1,6185926}$   
 $fr = \frac{0,05}{4} = 0,0125$  доп.  $lg \ (1+fr) = \overline{1,9946050}$   
 $1+fr = 1,0125$   $lg \ a = \overline{4,3010301}$   
 $a = 20000$  руб.

**845.** Какое время сумма в должна находиться подъ сложными %, счи тая по р со ста, чтобы образовать капиталъ A?

Нужно опредълить t и f. Ръшая ур. (2) относительно t, имъемъ:

$$t = \frac{\lg A - \lg a}{\lg (1+r)} - \frac{\lg (1+fr)}{\lg (1+r)}$$

Пусть частное дѣленія, указаннаго въ первомъ члепѣ, будетъ Q, а остатокъ R; имѣемъ:

$$t = Q + \frac{R}{lg(1+r)} - \frac{lg(1+rr)}{lg(1+r)} \cdot \cdots (3)$$

Первая часть ур-нія есть число цёлое, слёд. и вторая должна быть цёлымъ числомъ. Но Q есть цёлое число, слёд. и разность дробей должна быть цёлою. R, какъ остатокъ, меньше дёлителя ly(1+r), слёд. первая дробь меньше 1. Затёмъ f < 1, слёд. fr < r, откуда 1+fr < 1+r, а потому и lg(1+fr) < lg(1+r), такъ что и вторая дробь меньше 1. Но разность двухъ правильныхъ дробей только тогда м. б. цёлою, когда она равна нулю, откуда: R = lg(1+fr), и ур-ніе (3) даетъ t = Q. Такимъ образомъ для опредёленія времени имѣемъ два ур-нія

$$t = 0 \dots (4)$$
 in  $lg(1 + fr) = R, \dots (5)$ 

поназывающія, что для нахожденія цёлаго числа лёть, надо взять цёлую часть частнаго отъ раздёленія lg А — lg a на lg (1+r), а для опредёленія доли года — приравнять lg (1+fr) остатку указаннаго дёленія, и рёшить полученное ур. относительно f.

Переходя въ ур-нін (5) отъ логариема къ числу, найдемъ: 1+fr=m откуда  $f=\frac{m-1}{r}$ .

Примъръ I. 
$$A=48734,04; \quad a=20000; \quad r=0,05.$$
  $lg \ A=4,6878324$   $lg \ a=4,3010300$   $lg \ A-lg \ a=0,3868024$   $\frac{lg \ A-lg \ a}{lg \ 1,05}=\frac{0,3868024}{0,0211893}=18+\frac{0,0053950}{0,0211893}$   $lg \ (1+fr)=0,0053950$   $1+fr=1,0125$   $f=\frac{0,0125}{0.05}=0,25.$ 

Итакъ, t=18 г. и  $f=\frac{1}{4}$  года.

Примъръ II. Населеніе страны возрастаеть ежегодно на нъкоторую долю а своей величины, какую оно имьеть въ началь года. По истеченіи какого времени оно будеть находиться въ данномь отношеніи к къ первоначальной своей величинь?

Пусть первоначальное населеніе равно a; населеніе въ концъ t дътъ и доли f года пусть будетъ A. Имъемъ:  $A = a (1 + \alpha)^t (1 + f\alpha)$ ; но, по условію, A = ka; слъд.

$$k = (1 + \alpha)^{i}(1 + f\alpha).$$

Пусть, напр., требуется узнать, черезъ сколько времени удвоится населеніе, возрастая на 5%?

Въ даниомъ вопросk=2,  $\alpha=0.05$ ; ур-ніе, будетъ

$$2 = 1.05'(1 + 0.05f)$$
.

Частное, подлежащее вычисленію. будеть

$$\begin{split} \frac{\lg 2}{\lg 1,05} &= \frac{0,3010300}{0,0211893} = 14 + \frac{0,0043798}{0,0211893} \cdot \\ \lg (1+0,05f) &= 0,0043798 \\ 1+0,05f &= 1,010136 \\ f &= \frac{0,010136}{0.05} = \frac{1,0136}{5} = \frac{365 \times 1,0136}{5} = 74 \text{ дв.} \end{split}$$

Итакъ, населеніе удвоится черезъ 14 лётъ и 74 дня.

**846**. На какіе проценты нужно помьстить капиталь a, чтобы въ t+f лить онь обратился въ A?

Вопросъ приводится въ решению относительно г ур-нія

$$A = a (1 + r)^{t} (1 + fr);$$

по раскрытія  $(1+r)^t$ , получимъ ур-ніе t+1-й степени въ r; сл. не можетъ быть ръчи о ръшеніи его въ этомъ общемъ случав обыкновенными пріемами; но оно м. б. ръшено по способу последовательных приближеній.

Взявъ догаряемы отъ объихъ частей ур-нія, выводимъ

$$lg(1+r) = \frac{lg \Lambda - lg a}{t} - \frac{lg(1+fr)}{t} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Откинувъ второй членъ (обывновенно r содержится между 0.03 и 0.06, а f < 1, такъ что 1+fr близко къ 1, а  $\frac{lg(1+fr)}{t}$  весьма малое число), найдемъ первое приближеніе  $r_1$  числа r, по избытку, изъ ур-нія

$$lg(1+r_1) = \frac{\lg A - \lg a}{t} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

гдѣ  $r_1 > r$ .

Затемъ полагаемъ

$$lg (1+r_2) = \frac{lg \Lambda - lg a}{t} - \frac{lg (1+fr_1)}{t} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

второй члень 2-й части больше втораго члена 2-й части ур-нія (1), и потому  $r_2$  нъсколько меньше r. Итакъ,  $r_1$  и  $r_2$  суть два приближенія къ r, первое по

избытку, второе по недостатку. Взявъ то или другое вивсто r, сдълаемъ ошибку меньшую  $r_1-r_2$ . Взявъ для r ариометич. средину  $\frac{r_1+r_2}{2}$ , сдълаемъ ошибку,

меньшую даже  $\frac{r_1-r_2}{2}$ . Въ самомъ дълъ, пусть

$$r_1 = r + \alpha_1$$
,  $r_2 = r - \alpha_2$ ,

гдъ а, и а, положительны; отсюда

$$\frac{r_1+r_2}{2} = r + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}, \text{ if } \frac{r_1-r_2}{2} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}.$$

Взявъ  $\frac{r_1+r_2}{2}$  за r, сдълаемъ ошибку, равную  $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$ ; но абсолютная величина  $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}<\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ , и сл.  $<\frac{r_1-r_2}{2}$ 

Если приближеніе  $r_2$  недостаточно, опредъляємъ два новыя приближ. значенія  $r_3$  и  $r_4$  по формуламъ

$$lb(1+r_3) = \frac{lg A - lg a}{t} - \frac{lg(1+fr_2)}{t} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

$$lg(1+r_4) = \frac{lg \land - lg a}{t} - \frac{lg(1+fr_3)}{t} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (5)$$

Изъ того, что  $r_2 < r$ , очевидно, что вторая часть (4) больше второй части (1), но она меньше второй части (2); слъд.  $r_1 > r_3 > r$ . Слъд.  $r_3$  есть новое избыточное приближение чиска r, и менъе ошибочное, чъмъ  $r_1$ .

Затъмъ, такъ какъ  $r_3 > r$ , то вторая часть (5) меньше второй части (1), слъд.  $r_4 < r$ ; а какъ  $r_3 < r_1$ , то вторая часть (5) больше второй части (3); сл.  $r_4 > r_2$ .

Отсюда видно, что  $r_4$  есть приближеніе по недостатку, менѣе ошибочное чѣмъ  $r_2$ ; слѣд.  $r_3>r>r_4$ , причемъ промежутокъ отъ  $r_3$  до  $r_4$  меньше промежута отъ  $r_1$  до  $r_2$ .

Такимъ образомъ имъемъ рядъ значеній для г:

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$$

поперемънно приближенныхъ по избытку (прибл. четнаго пор.) и по недостатку, (прибл. нечетн. пор.) причемъ ихъ точность идетъ возрастая.

Остается доказать, что числа  $r_1$ ,  $r_2$ ,...,  $r_{2p}$ ,  $r_{2p+1}$ ,... имѣюмъ общимъ пределомъ r. Для этого достаточно доказать, что абс. вел. разности между  $r_k$  и r, при неограниченномъ возрастаній k, стремится къ нулю. Имѣемъ

$$\begin{split} lg(1+r) &= \frac{lg \, A - lg \, a}{t} - \frac{lg(1+fr)}{t} \\ lg(1+r_{2p+1}) &= \frac{lg \, A - lg \, a}{t} - \frac{lg(1+fr_{2p})}{t}, \end{split}$$

откуда

$$lg(1+r_{2p+1})-lg(1+r)=\frac{lg(1+fr)-lg(1+fr_{2p})}{t}$$

Ho

$$\frac{1+fr}{1+fr_{2p}} < \frac{1+r}{1+r_{2p}};$$

въ самомъ дѣлѣ, приводя къ общему знаменателю, который положителенъ, и сравнивая числителей:  $1+frr_{2p}+r_{2p}+fr$  и  $1+frr_{2p}+r+fr_{2p}$ , или  $f(r-r_{2p})$  и  $r-r_{2p}$ , замѣчая, что f<1 и  $r-r_{2p}>0$ , имѣемъ  $f(r-r_{2p})< r-r_{2p}$ , что и требовалось доказать. Итакъ

$$l(1+r_{2p+1})-lg(1+r)<\frac{lg(1+r)-lg(1+r_{2p})}{t};$$

а слъд., обозначая буквами

$$\alpha_1$$
,  $\alpha_2$ ,...,  $\alpha_{2p}$ ,  $\alpha_{2p+1}$ ,...

абсолютныя значенія разностей между

$$lg(1+r)$$
 **n**  $lg(1+r_1)$ ,  $lg(1+r_2)$ ,....

имъсмъ:

$$\alpha_2 < \frac{\alpha_1}{t}, \ \alpha_3 < \frac{\alpha_2}{t}, \ \cdots, \ \alpha_{2p+1} < \frac{\alpha_{2p}}{t}$$

Перемножая эти неравенства, получаемъ

$$\alpha_{2p+1} < \frac{\alpha_1}{t^{2p}}$$

Но t — число цѣлое, 2p — число положительное, возрастающее неограниченно, слѣд. и  $t^{2p}$  возрастаетъ неограниченно, а потому можно взять 2p настолько большимъ, чтобы  $\alpha_{2p+1}$  было какъ угодно близко къ нулю; слѣд. разность

$$lg(1+r_{2p+1})-lg(1+r)$$

стремится въ нулю, а след.  $r_{2p+1}$  въ r: это и нужно было доказать.

847. ПРИМВРЪ. На какіе проценты (сложные) помьщень быль капиталь 7300 р., если въ концъ 6 льть 8 мьсяц. 10 дней онь обратился въ 10448 р. 10 к. (проценты капитализируются въ концъ каждаго года).

Примъняя указанный методъ, имъемъ

$$lg(1+r) = \frac{lg_{10448,1} - lg_{7300}}{6} - \frac{lg_{11} + \frac{25}{36}r_{1}}{6}$$

или

$$lg(1+r) = 0.02595593 + 0.25938375 - \frac{lg(36+25r)}{6}$$

Hсрвое приближение для r получинь, откинувь два послъдніе члена;

$$lg(1+r_1) = 0.02595593,$$

откуда

$$r_1 = 0.0615878$$
, причемъ  $r_1 > r$ .

Второе приближение вычисляемъ изъ ур-нія

$$lg(1+r_2) = 0.28533968 - \frac{lg(36+25r_1)}{6}$$

откуда, замъчая, что  $36+25r_1=37,53969$ , имъемъ

$$lg(1+r_2)=0,02292457,$$

слъд.

$$r_2 = 0.0542038$$
, причемъ  $r_2 < r$ .

Третье приближение находимъ изъ ур-нія

$$lg(1+r_3) = 0,28533968 - \frac{lg(36+25r_2)}{6};$$

вамъчая, что  $36 + 25r_2 = 37,355095$ , находимъ

$$ly(1+r_3) = 0.02328138$$
,

откуда

$$r_3 = 0.0550702$$
, причемъ  $r_3 > r$ .

Четвертое приближение.

$$lg(1+r_4) = 0.28533968 - \frac{lg(36+25r_3)}{6}$$

гд $36 + 25r_3 = 37,376755,$  даеть

$$ly(1+r_4) = 0.02324088,$$

откуда

$$r_4 = 0.0549719$$
, причемъ  $r_4 < r$ .

Разность  $r_3 - r_4 = 0,0000983$ , слёд. каждое изъ приближеній  $r_3$  и  $r_4$  представляють r съ ошибкою, меньшею 0,0001. Итакъ

$$\frac{r_3 + r_4}{2} = 0.055021$$

представляетъ r съ ошибкою, меньшею 0,00005; отсюда, умножая на 100, находимъ проценты: p=5,5021, съ ошибкою, меньшею 0,005 p. Слъд. приблизительно беремъ p=5,5.

IIримпианіе. Обыкновенно же на практикѣ, для вычисленія времени и процентовъ берутъ формулу, выведенную для цѣлаго числа лѣтъ:  $A = a(1+r)^t$ , подставляя въ нее вмѣсто t данное дробное число лѣтъ. Примѣняя эту формулу къ данной задачѣ, имѣемъ

$$lg(1+r) = \frac{lg10448,1 - lg7300}{6\frac{25}{36}} = \frac{36 \times 0,1557356}{241}$$

=0,0232634;

отсюда

$$1+r=1,0550266$$
,  $r=0,0550266$ ;

наконецъ

$$p = 5,50266$$
,

результать, мало разнящійся отъ прежде найденнаго.

### Срочные вклады.

**848.** Основной вопросъ.—Въ течении t льть вносятся въ банкъ въ началь каждаго года послъдовательно капиталы  $a_1,\ a_2,\ a_3,....,\ a_4$ . Какая сумма накопится къ концу срока, если считать сложные проценты по  $p^0/_0$ ?

Первый срочный вкладь  $a_1$ , находясь подъ процентами t льть, обратится къ концу этого срока въ  $a_1(1+r)^t$ , или, полагая для краткости 1+r=q, въ  $a_1q^t$ .

Второй виладъ, находясь въ банкъ t-1 лътъ обратится къ концу срока въ  $a_0q^{t-1}$ .

Третій взносъ въ концу того же срока обратится въ  $a_3q^{t-2}$ , и т. д. Послъдній вкладъ, находясь подъ процентами 1 годъ, даетъ  $a_1q$ . Сложивъ эти суммы, получимъ накопившійся капиталъ

$$\Lambda = a_1 q^t + a_2 q^{t-1} + a_3 q^{t-2} + \cdots + a_1 q \cdots (1)$$

Когда вклады различны, формула (1) не допускаеть упрощеній; если же ежегодные взносы равны, то, обозначивъ каждый изъ нихъ буквою a и вынеся за скобки общій множитель aq, найдемъ:

$$A = aq(q^{t-1} + q^{t-2} + \cdots + q + 1).$$

Выраженіе въ скобкахъ представляеть сумму членовъ геометрич. прогрессін, первый членъ которой =1, а знаменатель q; по формуль суммы имъемъ

$$\mathbf{A} = aq \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot \cdots (2)$$

Примъчаніе.—Если бы сумма a была вносима b тонць каждаго года, то первый вкладъ находился бы въ банкъ t-1 лътъ, второй t-2,..., послъдній 0 лътъ, и получили бы

$$A' = aq^{i-1} + aq^{i-2} + \cdots + aq + a$$

$$A' = a \cdot \frac{q^i - 1}{q - 1}$$

или

- **849.** Ур. (2) содержить 4 количества: A, a, p и t и позволяеть найти одно изъ нихъ, когда остальныя три будутъ даны. Отсюда 4 задачи;
  - 1. Для опредъленія А непосредственно служить ур. (2).
  - 2. Опредълня а, имъемъ

$$a = \frac{\Lambda(q-1)}{q(q^t-1)}.$$

3. Для нахожденія t, освобождая ур. (2) отъ знаменателя, имбемъ:

$$A(q-1) = aq(q^t-1)$$
, отвуда  $q^t = 1 + \frac{A(q-1)}{aq}$ :

ур-ніе показательное.

4. Опредъленіе p приводится къ нахожденію q. Изъ послъдняго ур-нія прямо находимъ

$$aq^{t+1} - (A + a)q + A = 0$$

ур ніе t+1-й степени относительно q.-

Численный примъръ. -- a = 2000, t = 20, p = 5; найти А?

$$A = 2000. \ 1,05. \frac{1,05^{20}-1}{0,05} = 42000(1,05^{20}-1).$$

. Такъ какъ log разности  $1,05^{20}$  — 1 нельзя найти непосредственно, то предварительно вычисляемъ  $1,05^{20}$ .

Вспомогат. Вычисл. 
$$y=1,05^{20}$$
  $lg\ y=20\ lg\ 1,05=0,4237860$   $26532$   $7700$   $160:164$   $147.6$   $7$   $12.4$   $y-1=1,653297$ 

Вычисленіе А. 
$$lg~42000 = 4,6232493$$
  $lg(1,05^{20}-1) = 0,2183510$   $lgA = 4,8416003$   $A = 69438,5.$ 

850. — Приводимъ еще нъсколько упражненій на срочные вклады.

I. Какой капиталь накопится чрезь п льть, если въ концъ каждаго полугодія вносить по  $\frac{a}{2}$  руб., или по  $\frac{a}{4}$  въ концъ каждой четверти года. или по  $\frac{a}{12}$  въ концъ каждаго мъсяца?

Внося  $\frac{a}{2}$  p. въ концъ каждаго полугодія, составимъ капиталъ

$$C = \frac{a}{r} [(1 + \frac{r}{2})^{2n} - 1],$$

если  $\frac{r}{2}$  означаетъ прибыль на 1 р. въ полугодіє.

Внося  $\frac{a}{4}$  въ концѣ каждой четверти, составимъ капиталъ

$$C' = \frac{a}{r} [(1 + \frac{r}{4})^{4n} - 1],$$

гдъ  $\frac{r}{4}$  означаетъ прибыль на 1 р. въ четверть года.

Наконецъ вклады въ концъ каждаго мъсяца дадутъ

$$C'' = \frac{a}{r} \left[ \left( 1 + \frac{r}{12} \right)^{12n} - 1 \right].$$

Примъчание. — Принимая  $\frac{r}{2}$ ,  $\frac{r}{4}$ ,  $\frac{r}{12}$  за полугодичные, трехивсячные и мъсячные проценты, получаемъ въ концъ года прибыль, нъсколько большую r. Чтобы годичные проценты составляли въ точности r, надо вести вычисленіе такъ Пусть процентныя деньги капитализируются по истеченія доля  $\frac{1}{k}$  года; чтобы 1 руб. въ концъ года обратился въ 1+r, надо чтобы проценты были

$$r_1 = \sqrt[k]{1+r} - 1,$$

ибо, прибавляя 1 къ  $r_i$  и возвышая результатъ въ степень k имѣемъ:  $(1+r_i)^k=(\sqrt[k]{1+r})^k=1+r$ . Такимъ образомъ, въ вышеприведенныхъ задачахъ получимъ

$$C_{i} = \frac{a}{2} \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{\sqrt{1+r-1}}; \ C'_{i} = \frac{a}{4} \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{\sqrt[4]{1+r-1}}; \ C'_{i} = \frac{a}{12} \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{\sqrt[4]{1+r-1}};$$

результаты, весьма мало разнящіеся отъ прежнихъ.

II. Какой капиталь составится въ концъ п льть, если въ концъ каждаго года вносить суммы, измъняющіяся въ аривметической прогрессіи?

Пусть a есть первый ввладъ; a+b, a+2b,..., a+(n-1)b слёдующіе. Искомый капиталь X будеть

$$X = a(1+r)^{n-1} + (a+b)(1+r)^{n-2} + \cdots + a + (n-1)b;$$

полагая  $\frac{1}{1+r} = q$ , имбемъ

$$(1+r)^n \{aq+(a+b)q^3+(a+2b)q^3+\cdots+[a+(n-1)b]q^n\}$$

Выражение въ скобкахъ можно представить въ видъ

$$a(q+q^2+\cdots+q^n)+b[q^2+2q^3+\cdots+(n-1)q^n],$$

гдъ  $q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}$ ; положивъ

$$S = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \cdots + (n-1)q^n$$
, Hubend

$$Sq = q^{3} + 2q^{4} + \cdots + (n-2)q^{n} + (n-1)q^{n+1}, \text{ откуда}$$

$$S(1-q) = q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n - (n-1)q^{n+1}, \quad \text{with}$$

$$\mathbb{S}(1-q) = \frac{q^{n+2}-q^2}{q-1} - (n-1)q^{n+1}, \text{ откуда } \mathbb{S} = -\frac{q^2(q^n-1)}{(q-1)^2} + \frac{(n-1)q^{n+1}}{q-1}.$$

Подстановка въ формулу X и замъна q дробью  $\frac{1}{1+r}$  даетъ

$$X = \frac{(1+r)^n - 1}{r} (a + \frac{b}{r}) - \frac{(n-1)b}{r}$$

III. Какой капиталь накопится чрезь п льть, если вы концы каждаго года вносить суммы, измыняющіяся вы исометрической прогрессіи?

Пусть будуть a, ak,  $ak^2$ , . . . ,  $ak^{n-1}$  последовательные взносы.

' Къ концу срока они обрататся въ

$$a(1+r)^{n-1}$$
,  $ak(1+r)^{n-2}$ , . . . . ,  $ak^{n-1}$ .

Сумма членовъ этой прогрессія, знаменатель которой  $=\frac{k}{1+r}$ , будетъ

$$V = a \cdot \frac{(1+r)^n - k^n}{(1+r) - k}$$

IV. Настоящимъ значеніемъ дома А, подлежащаго уплать черезъ п льтъ, называется сумма, которую банкиръ обязанъ бы былъ уплатить тотчасъ же въ замънъ документа.

Выражение настоящаго значения долга А, очевидно, есть

$$A_1 = \frac{A}{(1+r)^n};$$

потому-что, помъстивъ въ настоящее время эту послъднюю сумму на сложные 0/0, получимъ по истеченіи m льтъ

$$\frac{A}{(1+r)^n} \cdot (1+r)^n$$
, T. e. A,

капиталь, необходимый для уплаты долга.

V. Учеть при сложных процентахь. — Учетомь наз. разность между номинальною величиною долга и его дъйствительною величиною; поэтому, формула учета будеть

$$e = A - \frac{A}{(1+r)^n} = A \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

Положивъ для краткости  $\frac{1}{1+r}=q$ , предыдущія формулы представимъ въ сокращенномъ видѣ

$$\Lambda_1 = \Lambda q^n$$
,  $\sigma = \Lambda(1 - q^n)$ .

VI. 3 A  $\chi$  A  $\chi$  A. — Нъкто долженъ уплатить суммы A, A', A'',... соотвътственно черезъ t, t', t'',... лътъ; черезъ сколько лътъ онъ вполнъ можетъ погасить долгъ единовременнымъ взносомъ B рублей?

Пусть x— будетъ искомое число дътъ; настоящая величина капитала В д. б. равна суммъ настоящихъ величинъ капиталовъ А, А', А'',...; потому ур-ніе задачи будетъ

$$\frac{A}{(1+r)^{t}} + \frac{A'}{(1+r)^{p}} + \frac{A''}{(1+r)^{p}} + \cdots = \frac{B}{(1+r)^{x}}.$$

 $\it Частный сучай.-$ Если имѣются только два платежа, и притомъ  $\it B=2A$ , предыдущее ур. приводится къ

$$q^x = \frac{1}{2} (q^t + q^{t'}).$$

Легко видъть, что искомое время всегда короче средняго изъ эпохъ объихъ уплатъ. Въ самомъ дълъ, положивъ t'=t+2d и вынеся иножителя  $q^{t+d}$ , найдемъ

$$q^x = q^{t+d} \times \frac{1}{2} \left( q^d + \frac{1}{q^d} \right).$$

Но количество, сложенное съ своею обратною величиною, даетъ всегда сумму, меньшую 2; слъд.  $q^x > q^{t+d}$ ; а какъ q < 1, то необходимо x < t + d.

 $\Pi$  Р  $\pi$  м  $\mathfrak s$  Р  $\mathfrak s$ . — Уплать подлежать: 12500 p. чрезь 7 льть и 12500 p. чрезь 43 года. Черезь сколько льть можно погасить долгь однимь взносомь въ 25000 p., полагая сложные % по 4,5 со ста?

Вопросъ рѣшается ур-мъ

$$2\left(\frac{1}{1,045}\right)^{2} = \left(\frac{1}{1,045}\right)^{7} + \left(\frac{1}{1,045}\right)^{43};$$

при помощи догариемовъ находимъ

$$\left(\frac{1}{1,045}\right)^{7} = 0.7348283$$

$$\left(\frac{1}{1,045}\right)^{43} = 0.1506605$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{1,045}\right)^{x} = 0.8854888$$

$$x = \frac{\lg 0.4427444}{\lg \frac{1}{1,045}} = \frac{\overline{1.6461531}}{\overline{1.9808837}} = \frac{3538569}{191163}$$

$$= 18 \text{ rog. } 6 \text{ mfc.}$$

### Срочныя уплаты.

- **851.** Опредъленіе. Срочною уплатою называется постоянная сумма, которую слыдуеть вносить вы концы каждаю года для погашенія долга вмисть сь его сложными процентами.
- 852. Основной вопросъ. Занять въ банкъ капиталь а по  $p^{-0}$ /0 въ годъ (считая сложные 0/0) на t лъть. Какую сумму x нужно вносить въ концъ каждаю года, чтобы долъ быль погашень?

Долгъ а въ концъ 1-го года обращается въ aq; по внесеніи же срочной уплаты x онъ обращается въ aq-x: таковъ долгъ въ началъ 2-го года.

Въ теченіи года эта сумма обращается въ (aq-x)q или въ  $aq^2-xq$ ; по уплатъ же въ концъ 2-го года x руб., долгъ въ началъ 3-го года будеть  $aq^2-xq-x$ .

Такимъ же образомъ въ началъ 4-года долгъ будетъ  $aq^3-xq^2-xq-x$ , и т. д.

По аналогіи съ этими формулами заключаемъ, что по истеченіи t лѣтъ долгъ банку будетъ

$$aq^t - xq^{t-1} - xq^{t-2} - \cdots - xq - x \cdot \cdots \cdot (A)$$

По условію, черезъ t лътъ долгъ д. б. погашент; отсюда ур.

$$aq^{t} - xq^{t-1} - xq^{t-2} - \cdots - xq - x = 0,$$
  
 $aq^{t} - x(q^{t-1} + q^{t-2} + \cdots + q + 1) = 0,$ 

или

или, наконецъ:

$$aq^t-x.\frac{q^t-1}{q-1}=0\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(1).$$

По прежнему имъемъ 4 задачи.

853. Опредъленіе срочной уплаты.— Рѣшая ур. (1) отн. x, имѣемъ

$$x = \frac{aq^t(q-1)}{q^t-1}.$$

Частный случай. — Если срокъ займа неограниченно великъ, то, положивъ  $t=\infty$  и замътивъ, что  $q^t$ , при q>1 и  $t=\infty$ , обращается въ  $\infty$ , находимъ:  $x=\frac{\infty}{\infty}$ . Для раскрытія неопредъленности дълимъ числителя и знам. на  $q^t$ ; находимъ

$$\lim x = \left[ \frac{a(q-1)}{1 - \frac{1}{q'}} \right]_{t = \infty} = a(q-1) = ar,$$

гдѣ  $r = \frac{p}{100}$ .

Легко истолковать этоть результать, замётивь, что ar или  $\frac{ap}{100}$  есть формула простыхь годовыхь процентовь долга a. Итакъ, предёль срочной уплаты при меогранич. срокь займа равень простымь годовымь процентамь занятаго капитала, — результать, который не трудно было предвидёть заранье. Вь самомь дёль, очевидно, что срокь займа м. б. безконечно великь только тогда, когда срочная уплата погашаеть одни простые проценты, оставляя капиталь безь измёненія. На такихъ условіяхь вь большинстве случаевь дёлаются государство ограничивается уплатою, въ опредёленные сроки, простыхъ процентовь своего долга, такъ-что срочныя уплаты, вносимыя государствомь, не могуть служить къ погашенію долга, которое достигаесят другими средствами, когда это дозволяеть финансовое положеніе страны. Скаванная уплата называется, поэтому, непрерывною рентою.

Обывновенно же срочная уплата бываеть больше непрерывной ренты, и разность между ними выражается такъ:

$$x - ar = \frac{ar}{q^i - 1}$$

Этотъ избытовъ срочной уплаты надъ непрерывною рентою, которую слъдовало бы уплачивать въ случат неограниченнаго срока займа, и составляетъ фондъ погашентя.

854. Опредъление займа. Изъ ур-нія (1) прямо имъемъ

$$a = \frac{x(q^t-1)}{q^t \cdot (q-1)}$$

855. Опредъленіе процентовъ приводится въ опредъленію q. Освобождая ур. (1) отъ внаменателя и приводя въ порядовъ члены, находимъ ур-ніе

$$aq^{t+1} - (a+x)q^t + x = 0$$
,

t+1-й степени относительно q; вообще, оно неразръшимо обычными пріемами элементарной алгебры. Но можно найти численную величину q помощію методическихъ попытокъ (значительно облегчаемыхъ таблицами сложныхъ  $^{\circ}/_{0}$ ). Раздъливъ предыдущее ур-ніе на  $aq^{t}$ , можно представить его въ видъ

$$r-\frac{x}{a}\left(1-\frac{1}{(1+r)!}\right)=0\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(2)$$

Замѣняя r послѣдовательно числами 0,03, 0,04, 0,05, 0,06 . . . т. е. наиболѣе употребительными процентами, смотримъ на результатъ подстановокъ Если этотъ результатъ будетъ 0, r въ точности равно взятому числу; вообще же первая часть ур-нія будетъ отлична отъ нуля. Численная величина и знакъ этой разницы укажутъ степень точности испытуемаго числа и смыслъ приближенія.

1. Смыслъ полученнаго приближенія. Если дать г значеніе, большее настоящаго, первая часть ур-нія будеть положительна; для г слишкомъ малаго, она будеть отрицательна. Для доказательства беремъ выраженіе (А):

$$aq^{t} - (xq^{t-1} + xq^{t-2} + \cdots + x),$$

въ которомъ первый членъ есть долгъ съ процентами, а выражевіе въ скобкахъ есть сумма, необходимая для покрытія долга. Если за прабыль на 1 р. взять число R, большее истинной величины r, то данная уплата будетъ недостаточна для погашенія долга; слъд.

$$a(1+R)^{t} > x(1+R)^{t-1} + x(1+R)^{t-2} + \cdots + x$$
  
 $a(1+R)^{t} > x \cdot \frac{(1+R)^{t}-1}{R}$ 

 $R > \frac{x}{a} \left[ 1 - \frac{1}{(1+R)^i} \right].$ 

NLU

Если же вм. r взять меньшую величину R', то данная уплата будеть слищьюмь велика для покрытія долга; сл.

$$R' < \frac{x}{a} \left[ 1 - \frac{1}{(1+R')^t} \right] \cdot$$

2. Выборь перваго приближенія. — Если t весьма велико (больше 30),  $\frac{1}{(1+r)^t}$  будеть мало; пренебрегая этимъ членомъ, найдемъ для r приближенную по избытку величину

$$R = \frac{x}{a}$$
.

Но это приближение весьма грубо, когда t содержится между 15 и 30, а если t < 15, оно не дастъ полезнаго указания.

Вивсто того, чтобы пренебрегать въ ур-ніи уплать членомъ  $\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{(1+r)}$ , замівнимъ знаменателя  $(1+r)^t$  биномомъ 1+tr, меньшимъ  $(1+r)^t$ ; получимъ

$$\frac{1}{(1+r)^t} < \frac{1}{1+tr},$$

и савд.

$$r>\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{1+tr},\quad \text{with}\quad r>\frac{x}{a}-\frac{1}{t}\cdot$$

Сябд. приближение по недостатку для г будетъ

$$r' = \frac{x}{a} - \frac{1}{t}$$

3. Приближение точное до 0,01. — Сначала испытываемъ r'; затъмъ подставляемъ

$$r^{11} = r^{1} + 0.01; \quad r^{111} = r^{1} + 0.02; \quad r^{1V} = r^{1} + 0.03;$$

то изъ этихъ чиселъ, которое сдълаетъ, первую часть ур-пія (2) положительною, и будетъ значеніемъ r, точнымъ до 0.01 по избытку; а предыдущее будетъ точно до 0.01 по недостатку. Такимъ образомъ найдемъ два значенія для r: r<sup>тії</sup> и r<sup>тії</sup> напр., приближенныя въ противоположномъ смыслѣ съ точностью до 0.01.

4. Слюдующія приближенія, получаемыя интерполированіемі.— Пусть  $e^{\text{II}}$  есть величина первой части ур-нія (2) для  $r=r^{\text{II}}$ ;  $e^{\text{III}}$  ея величина для  $r=r^{\text{III}}$ ; можно принять, съ малою погрѣшностью, что въ интерваллъ  $r^{\text{III}}-r^{\text{II}}$  изиъненія первой части пропорціональны приращеніямъ r.

Пусть будеть y—поправка для r''; говоримъ: когда r измѣняется отъ  $r^{11}$  до  $r^{111}$ , первая часть измѣняется отъ  $e^{11}$  до  $e^{111}$ ; на сколько r должно измѣниться, начиная отъ  $r^{11}$ , чтобы разница уменьшилась отъ  $e^{11}$  до 0? Имѣемъ пропорцію

$$\frac{e^{11}+e^{111}}{e^{11}}=\frac{0.01}{y}$$
,

изъ которой

$$y = \frac{0.01 \times e^{II}}{e^{II} + e^{III}};$$

въ y достаточно ограничиться цифрою тысячныхъ; приближеніе  $r^{11}+y$  всегда будеть по недостатку. Вычисляемъ разницы первой части для

$$r = r^{II} + y$$
 II  $r = r^{II} + y + 0.001$ ,

и если она положительна,

$$r^{11} + y$$
 m  $r^{11} + y + 0.001$ 

будутъ два праближенія — одно по недостатку, другое по избытку, точныя до 0,001.

Выходя отъ этихъ двухъ результатовъ, получимъ такимъ же путемъ цифру десятитысячныхъ, и т. д.

Численный примъръ.—Вычислить проценты, если a=10000, x=1202,41 р., t=10.

Прежде всего находимъ:

$$\frac{x}{a} = 0.12024; \quad \frac{x}{a} - \frac{1}{t} = 0.0202$$
 (по недостатку).

Испытаніе 0,03.

$$(1,03)^{-10} = 0.744074;$$
  $1 - (1,03)^{-10} = 0.255926;$   $\frac{x}{a} \times 0.255926 = 0.0307728.$ 

Уклоненіе равно 0,0007728, слъд. 0,03 есть приближеніе по недостатку. Испытаніе 0,04.

$$(1,04)^{-10} = 0,6755642;$$
  $1 - (1,04)^{-10} = 0,3244358;$   $\frac{x}{a} \times 0,3244358 = 0,0390105;$ 

уклоненіе =+0,0009895; саёд. 0,04—приближеніе по избытку.

Интерполирование пропорціональными частями.

Сумма абсолютныхъ значеній уклоненій =

$$0,00077208 + 0,0009895 = 0,0017623,$$
  
 $y = 0,01 \times \frac{0,0007728}{0,0017623} = 0,004,$ 

и новое приближение есть 0,034.

Испытаніе 0,034.

$$(1,034)^{-10} = 0,715805;$$
  $1 - (1,034)^{-10} = 0,284195;$   $\frac{x}{a} \times 0,284195 = 0,0341719;$ 

уклоненіе = — 0,0001719, сятд. 0,034 — приближеніе по недостатку.

Это уклоненіе составляеть приблизительно четверть перваго; потому увеличиваемъ проценты на 0,001 и испытываемъ 0,035.

Испытаніе 0,035.

$$(1,035)^{-10} = 0,708919;$$
  $1 - (1,035)^{-10} = 0,291081;$   $\frac{x}{a} \times 0,291081 = 0,0349999;$ 

уклоненіе равно нулю; сл. 0.035 есть точная прибыль на 1 рубль. Такимъ образомъ p = 3.5.

856. Опредъление времени. Изъ ур. (1) имъемъ:

$$q^t = \frac{x}{x - ar}$$

откуда, взявъ логариомы объихъ частей:

$$t = \frac{\lg x - \lg [x - ar]}{\lg (1+r)}.$$

Изследование. Неизвёстное t должно быть числомъ дёйствительнымъ, положительнымъ и цёлымъ.

Но формула времени содержить lg(x-ar), который не всегда можеть быть взять, такъ какъ отрицат. число не имъеть дъйствительнаго логариема. Отсюда необходимость различать три случая:

- 1. x < ar; lg(x-ar) будеть мнимый, и задача невозможна. Это легко видёть à priori. Въ самомъ дёлё, ar—представляемъ простые % долга, и какъ срочная уплата меньше этихъ проц. денегъ, то ея недостаточно даже для уплаты процентовъ, такъ что долгъ съ теченемъ времени будетъ увеличиваться.
- 2. x=ar. Въ этомъ случав x-ar=0,  $lg(x-ar)=-\infty$ , и  $t=\infty$ . Это означаетъ опять, что долгъ не можетъ быть погашенъ. Въ самомъ двлв, а priori видно, что когда сроч. упл. x равна простымъ процентн. деньгамъ, то она будетъ погашатъ только эти деньги, и долгъ всегда будетъ оставаться одина-ковымъ. Это и есть непрерыеная рента, о которой было говорено выше.
- $3.\ x>ar$ : обыкновенный случай возможности задачи, такъ какъ срочная уплата, будучи больше годовыхъ процентовъ на капиталъ, будетъ погашать не только эти послъдніе, но и часть капитала; такъ что черевъ нъсколько лътъ долгъ будетъ погашенъ.

Самая формула даеть положительное вначеніе для t; но еще нужно, чтобы это значеніе было и *ипълое*. Но если для t получается число дробное, то это означаеть, что данною срочною уплатою долгь не м. б. погашень, и что по истеченіи времени, равнаго цёлой части t, остается часть долга, меньшая срочной уплаты. Пусть цёлая часть t будеть T; замётивь, что долгь выражается первою частью уравненія (1), заключаемь, что по истеченіи T лёть остатокь долга будеть

$$R = aq^{T} - \frac{x(q^{T} - 1)}{q - 1}$$

**Примъръ.** Во сколько льтъ можно погасить долгь въ 5000000 p., уплачивая ежегодно по 600000, если платится по 5%?

$$ar = 250000 \text{ p.}$$
  $lg \ x = 5,7781513$   
 $x - ar = 350000 \text{ p.}$   $lg \ (x - ar) = \frac{5,5440680}{0,2340833}$   
 $t = \frac{0,2340833}{0,02119} = 11, \dots$ 

Такъ какъ для t получилось число дробное, то вычисляемъ остатокъ R долга.

$$1,05^{11} = 1,710339$$
  $lg 5.10^6 = 6,6989700$ 
 $1,05^{11} - 1 = 0,710339$   $lg 1,05^{11} = 0,2330822$ 
 $lg 1,05^{11} = 0,2330822$   $lg 1,05^{11} = 0,2330822$ 

$$aq^{T} = 8552700$$
 $lg 6.10^{3} = 5,7781513$ 
 $lg 0,710339 = \overline{1},8514658$ 
 $gon. lg 0,05 = \underline{1,3010300}$ 
 $\overline{6,9306471}$ 

$$\frac{x(q^T-1)}{q-1} = 8524072$$

R = 8552700 - 8524072 = 28628 p.

857. 3 д д д д д A . H рькто для покупки своей жень ежегодной пенсіи въ  $\mathfrak b$ руб., платить ежегодно во вдовью кассу а руб. По истечении п льть умираеть вкладчикь, а т льть спустя — его жена. Сколько пріобрыла или потеряла касса, если проценты считались съ той и другой стороны по р въ годъ?

Пусть плата съ той и другой стороны совершается въ началь наждаго года; а заключеніе счетовъ по истеченіи n+m льть: въ такомъ случав 1-й взносъ приносить проценты n+m льть, и сльд. достигаеть величины  $aq^{n+m}$ ; второй годомъ меньше, и достигаетъ величины аq<sup>n+m-1</sup> и т. д. Последній виладъ находится подъ  $\frac{6}{10}$  m+1 годъ, и ценность его  $=aq^{m+1}$ . Такимъ же образомъ ценность первой пенсін b черезъ m авть равна  $bq^m$ , посавдней =bq. Прибыль (положит. или отриц). кассы будеть

$$(aq^{n+m} + aq^{n+m-1} + \dots + aq^{m+1}) - (bq^m + bq^{m-1} + \dots + bq),$$

$$\frac{aq^{m+1}(q^m - 1) - bq(q^m - 1)}{q - 1}.$$

Примъръ. Если a=50 р., b=200 р., m=8., n=20 и p=4; то касса имъетъ прибыль =202 р.

858. Задачи.

RIG

Рфшить уравненія:

1. 
$$(0,0175)^x = 0,000397$$
.

2. 
$$4917^{35}$$
<sup>2</sup> = 978617.

3. 
$$7^{x^2-5x+2} = 49$$
.

4. 
$$5 \times 3^x - \frac{3456}{3^x} = 7$$
.

5. 
$$3^{x+1} - \frac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-2} - \frac{47}{3^{x-2}} = 0$$
.

6. 
$$3^{2x} \times 5^{2x-3} = 7^{x-1} \times 4^{x+3}$$
.

7. 
$$x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$$
.

8. 
$$\frac{lg(35-x^3)}{lg(5-x)}=3$$
.

9. 
$$lg \sqrt{5x-8} + \frac{1}{2} lg (2x+3) = lg 15$$
.

10. 
$$lg(7x-9)^2 + lg(3x-4)^2 = 2$$
. 11.  $lg\sqrt{7x}$   
12.  $lg\sqrt{1+x} + 3lg\sqrt{1-x} = lg\sqrt{1-x^2} + 2$ .

. 11. 
$$lg\sqrt{7x+3} + lg\sqrt{3x+7} = 1 + lg 4, 5.$$

12. 
$$lg\sqrt{1+x}+3lg\sqrt{1-x}=lg\sqrt{1-x^2}+1$$

13. 
$$a^{2x} - 5a^x + 6 = 0$$
.

14. 
$$a.a^3.a^5.a^7...a^{9x-1} = n$$
.

15. 
$$\sqrt[x]{27^{2x-1}} = \sqrt{9^{2x-1}}$$
.

16. 
$$(a^{i}-2a^{2}b^{2}+b^{i})^{x-1}=\frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^{2}}$$

Ръшить системы уравненій:

17. 
$$lg x + lg y = 1,5;$$
  $4x^2 - 9y^2 = 3590.$ 

18. 
$$27^{9x-1} = 243 \cdot 3^{4y+9}$$
;  $3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2y-1}}$ ,

19. 
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{xy} = a;$$
  $\frac{lg(b^2 - xy)}{lg\sqrt{x^2 + y^2}} = 2.$   
20.  $x^y = y^x; \quad p^x = q^y.$  21.  $x^y = 3$ 

20. 
$$x^y = y^x$$
;  $p^x = q^y$ .

21.  $x^y = y^x$ ;  $x^p = y^q$ . При какомъ соотношенін между p п q числа x п y раціональны?

22. 
$$x = y^{\frac{4}{3}}; \quad y = x^{\frac{2}{3}}$$

22. 
$$x = y^{\frac{4}{3}};$$
  $y = x^{\frac{2}{3}}.$   
23.  $(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt[15]{y^8};$   $(\sqrt[3]{y})^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \sqrt[15]{x^2}.$ 

24.  $u^p v^q = a^x$ ;  $u^q v^p = a^y$ ;  $u^x v^y = b$ ;  $u^y v^x = c$ .

25. 
$$\begin{cases} \frac{xy}{4 + \sqrt{xy + 2}} = \frac{\lg \left[ a\sqrt{x - y} - \sqrt{x + y} \right] - \lg \sqrt{x - y}}{\lg (x + y) - \lg (x - y)} \\ 4 + \sqrt{xy + 2} = -2xy. \end{cases}$$

26. 
$$\begin{cases} (\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^{\frac{3}{2}} (\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}) = xy \\ (\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^{\frac{3}{2}} (\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2})^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9} = \sqrt[3]{x^2y^2}. \end{cases}$$

- 27.  $x^{x-3} = y^y$ :  $x^{y+1} = y^{x+2}$ :  $x^{2y-1} = y^3y$
- 28. Резервуаръ ёмкостью въ 1000 литровъ наполняется водою изъ крана, дающаго въ теченіи 1-го часа 3 литра, въ теченіи 2-го—6 литр., въ теченіи 3-го—12 л. и т. д. Отверстіе въ диб резервуара выпускаеть 1 л. въ первый часъ, 2 л. во второй, 4 л. въ третій и т. д. По прошествін сколькихъ часовъ бассейнь, вначаль пустой, будетъ наполненъ?
- 29. Воздушный шарь падаеть съ высоты 5000 метровь, проходя последовательно 4, 16, 64,... метровъ въ первую, вторую, третью,... минуты. Чрезъ сколько минутъ онъ опустится?
- 30. Изъ бочки, содержащей а литровъ вина, отливають в литровъ, замъняя ихъ столькими же литрами воды. Изъ полученной см $^{\pm}$ си отливають снова b литровъ, замъняя ихъ b литрами воды, и т. д. Операція повторяется n разъ. Спрашивается: каково будеть после этого отношение количества воды къ колич. вина? Сколько разъ нужно повторить сказанную операцію, чтобы количества вина и воды сдёдались равными?

Числовое приложение: a = 100; b = 1; n = 50.

- 31. Зная, что  $3 \log x + 5 \log \sqrt{y} = 1$ , найти minimum функціи  $2x^5 + y$ .
- 32. Доказать, что есян (x+1)(y+1(z+1)=Const.), то выражение  $a^xb^yc^z$  получаетъ минимальное значеніе при условіи  $a^{x+1} = b^{y+1} = c^{z+1}$ .
- 33. Во что обратится капиталь 5680 р., помъщенный на сложные % по 5 со ста, по истечени 18 лътъ?
- 34. Во что обратится сумма 7300 р., при сложных з % по 5,5 со ста, въ 6 лътъ 8 мѣсяц. и 10 дней?
- 35. Какой капиталь нужно помъстить на сложные %, по 4 %, чтобы по прошествін 21 года образовалась сумма 40324 р.
- 36. Какой капиталь нужно пом'ёстить въ банкъ, чтобы при сложныхъ % по 4,5 составилась въ 9 л. 3 м. сумма 72680 р.

- 37. Во сколько летъ капиталъ 5435 р., при сложныхъ % по 5 со ста, обратится въ 12840 р.
- 38. Въ какое время капиталъ, помъщенный на сложные  $\frac{0}{0}$ , считая по  $5\frac{0}{0}$ , утроивается, полагая, что проценты капитализируются каждые 6 мъсяцевъ.
  - 39. При какихъ процентахъ 20000 р. въ  $18\frac{1}{4}$  лѣтъ обращаются въ 48734 р. 04 к.
- 40. Населеніе страны въ настоящее премя достигаетъ 14528740 чел. Найдено, что въ теченіи года оно возрастаетъ на  $\frac{1}{200}$  той величины, какую оно имѣло въ началѣ этого года. Принимая, что законъ этогъ имѣетъ мѣсто и въ будущемъ, каково будетъ населеніе черезъ 20 лѣтъ?
- 41. Когда Іаковъ прибкить нъ Египетъ, его семья состояла изъ 70 лицъ. Спустя 430 лътъ еврен вышли изъ Египта въ количествъ 660000. Насколько % возрастало ежегодно потомство патріарха, если допустить, что на 1000 человъкъ умирало въ годъ, среднимъ числомъ, 25 человъкъ?
- 42. Курильщикъ, начавшій курить, когда ему пошель 18-й годъ, издерживаетъ на табакъ еженедѣльно по 1 р. 80 к. Еслибы, бросивъ эту привычку, овъ по истеченіи 18 лѣтъ своей жизни, помѣстилъ сумму равную расходу на табакъ, въ сберегательную кассу, платящую  $4^{0}$ , и продолжалъ такъ поступать въ концѣ каждаго слѣдующаго года, то сколько имѣлъ бы, когда ему исполнится 60 лѣтъ?
- 43. Нѣвто положиль въ банкъ 31 декабря 1874 г. капиталь 2800 р. на сложные  $^{0}/_{0}$  по 4 въ гогъ. Въ концѣ декабря каждаго слѣдующаго года онъ прибавляль по 450 р. Какая сумма накопится въ концѣ декабря 1887 года?
- 44. Помѣщая въ банкъ послѣдовательно, изъ году въ годъ, въ теченіи 25 лѣтъ, по 1150 р., по внесеніи послѣдняго вклада составили капиталь 50000 р. Сколько % приносиль капиталь?
- 45. Какой заемъ м. б. погашенъ 34 ежегодимии уплатами по 1500 р., при 4.5%, если первая уплата вносится черезъ годъ послѣ займа?
- 46. Какова срочная уплата, нообходимая для погашенія займа въ 50000 р., если число уплать = 25, проценты = 4, п первая уплата вносится черезь годъ послъ займа?
- 47. Нѣвто помѣствъв въ банкъ капиталь a на сложные  $0/_0$ , дающіе r на рубль въ годъ. Ежегодно онъ издерживаетъ прибыль съ a рублей и еще b руб. Черезъ сколько лѣтъ это лидо раззорится?

Числовой примъръ: a = 100000 р.; b = 900; r = 0.05.

- 48. Нъкто заняль 18000 р. по 4.5% и уплачиваеть, для погашенія долга, въ конць каждаго года 10% занятаго капитала. Черезъ сколько льть долгь будеть погашенъ и каковъ будеть остатокъ долга?
- 49. Изъ двухъ капиталовъ одинъ больше другаго на 393 р. Меньшій приносить  $5^{1}/_{4}^{0}/_{0}$ . большій  $3^{1}/_{4}^{0}/_{0}$ . Каковы эти капиталы, если по истеченіи 40 лётъ меньшій дёлается вдвое больше другаго?
- 50. Продается домъ. А предлагаетъ за него 30000 р. наличными; В даетъ 35000, съ условіемъ уплатить черезъ 3 года; С предлагаетъ 33000 съ условіемъ выплатить тремя равными суммами, вносимыми въ началѣ каждаго года, начиная съ настоящаго времени. Которое предложеніе выгоднѣе, и насколько?
- 51. Въ началъ 1872 года трое братьевъ начали вносить, каждый по 5 коп., черезъ каждые 7 дней, начиная съ 7-го января, въ сберегательную кассу, платящую

- $4^{1}/_{2}^{0}/_{0}$  по текущему счету, начиная съ слъдующаго дня послъ каждаго вклада. Предполагая, что касса капитализируетъ сбережение дътей только въ концъ каждаго года, сколько всъ они въъстъ получили бы въ концъ 1882 года?
- 52. Отецъ семейства, 32 лѣтъ отъ роду, покупаетъ у компанія застрахованія жизни полисъ, обезпечивающій его дѣтямъ уплату въ 50000 р. по его смерти, платя ежегодную премію въ 1280 р. Онъ умираетъ тотчасъ по внесеніи 27-го вклада. Если проценты составляють 4 на сто, спршивается: понесла-ли компанія убытокъ, или осталась въ выигрышѣ?
- 53. Купецъ, расчетывал вести дѣла еще 18 лѣтъ, помѣщаетъ въ концѣ каждаго года 800 р. на сложные  $^{0}/_{0}$ . Въ теченіи сколькихъ лѣтъ, начиная съ конца 19-го года, можетъ онъ пользоваться ежегодною рентою въ 3000 р.. взамѣнъ накопленнаго капитала? Проценты  $\pm 4.5$ .
- 54. Фабриканть устанавливаеть въ своихъ мастерскихъ машины, стоющія ему 16000 р. и требующія, спустя годъ послѣ установки, ежегодныхъ издержекъ на ремонть по 120 р. На какую сумму долженъ онъ ежегодно увеличить издержки на производство для погашенія расхода на машины, полагая, что онѣ продержатся 20 лѣть? Сложные проценты = 5.
- 55. Изъ участка лъса, содержащаго въ началъ 10000 куб. саж. дровъ, причемъ ежегодный приростъ простирается до  $5^0/_0$ , вырубаютъ въ концъ каждаго года 800 куб. саж. Сколько кубич. саж. останется въ этомъ участкъ черезъ 10 лътъ.
- 56. Населеніе города равно 800000 душъ. Ежегодно прибываетъ 2000 лицъ, вслѣдствіе чего населеніе, какъ старое такъ и новое, увеличивается среднимъ числомъ на 2% въ годъ. Какой величины достигнетъ насеніе черезъ 15 лѣтъ?
- 57. Отецъ семейства внесъ 1 янв. 1854 г. нъвоторую сумму въ сберегательную кассу, платящую 4½% въ годъ, и капитализпровалъ прибыль 31 декабря. Въ началъ каждаго слъдующаго года онъ прибавляетъ по 200 р. къ начальному капиталу. Сдълавъ вкладъ 1 янв. 1880 г., онъ становится обладателемъ капитала, который дастъ ему въ теченіи слъдующихъ 20 лътъ ежегодную ренту въ 2500 р. Каковъ былъ первоначально внесенный капиталъ?
- 58. Нѣкто, надѣясь прожить еще 50 лѣтъ, помѣстиль въ банкъ на  $4^{1/2}$ % капиталь въ 1983 р. 42 к., къ которому предполагаетъ ежегодно прибавлять по 360 р. столько лѣтъ, чтобы остальную жизнь пользоваться ежегодной рентой въ 2700 р Сколько лѣтъ онъ долженъ дѣлать ежегодные вклады?
- 59. Нѣвто, умирая, завѣщаль все свое имущество родному городу, съ условіемъ, чтобы послѣдній приняль на себя на вѣчныя времена обязательство выдавать ежегодно 1200 р. на воспитаніе бѣднымъ. Городъ, принявъ это наслѣдство, внесъ въ замѣнь его въ кредитное учрежденіе сумму 30000 р., считая ее равносильною завѣщанному наслѣдству. Бо сколько % считались доходы?
- 60. А положиль на сложные  $^{0}$ / $_{0}$  капиталь 100000 р., и береть ежегодно по 7000 р. В, внеся въ банкъ 10000 р., ежегодно прибавляеть по 700 р. Черезъ сколько лъть капиталы сравняются, и какой цифры достигнуть? Приденты = 45/ $_{8}$ .
- 61. Ежегодная рента въ 600 р., уплачиваемая въ концѣ года въ теченія 20 дѣтъ, должна быть замѣнева другою, на 25 дѣтъ, уплачиваемою въ конпѣ каждой четверти года. Какой цифры достигаетъ новая рента, если проценты для той и другой равны 4.
- 62. Занять капиталь A по 5% (слож.). Какова д. б. срочная уплата, чтобы по истеченій 5 лівть долгь сділался равень  $\frac{A}{2}$ ?
- 63. Нѣкто, обязавшись сдѣлать уплату въ 10 сроковъ по а руб., и произвести первую уплату черезъ годъ, а сдѣдующія изъ году въ годъ, предлагаетъ виѣсто этого

сдѣлать уплату въ 5 сроковъ, по x руб. каждый разъ, причемъ первая уплата должна имѣть мѣсто по истеченін года, остальныя же изъ году въ годъ. Годовые сложные  $0_{/0} = 1$ . Какова должна быть сумма x?

- 64. Нѣвто помѣстиль на сложные проценты, по  $4\frac{1}{2}$ , капиталь 18000 р., вынуль его съ прибылью черезъ 4 года 7 мѣс. 20 дней, и на вырученныя деньги купиль облигацій по курсу 285 р. Каждая облигація давала 15 р. ренты; сверхъ того онъ заплатиль пошлины 0,2 р. и куртажныхъ денегь по  $\frac{1}{8}$  р. на 100 р. употребленнаго капитала. Какой цифры достигаеть ежегодная рента?
- 65. Сумма 180000 р., помѣщенная на сложные % въ теченіи 2 л. 7 мѣс. 15 дней, обратилась въ 209832 р. 30 к. Найти проценты, зная, что они выражаются цѣлымъ числомъ.
- 66. Долгъ можетъ быть погашенъ въ 12 лѣтъ ежегодными уплатами въ 1000 р. при 4,75% въ годъ. Должнивъ предлагаетъ кредитору уплатить долгъ взносами въ 500 р., уплачиваемыми въ шестимѣсячные сроки, по  $2\frac{1}{3}\%$  въ 6 мѣсяцевъ. Можетъ-ли кредиторъ согласиться на это условіе?
- 67. Черезъ каждые 3 мѣсяца вносится въ банкъ по 100 р. на 5% въ годъ, и проценты капита пзируются каждые 3 мѣсяца. Какую сумму долженъ выдать банкъ черезъ 10 лѣтъ послѣ перваго вклада, т. е. черезъ 3 мѣсяца послѣ 4-го и послѣдняго вклада?

Начиная съ этого времени, какую сумыу долженъ бы быль выплачивать банкъ выдадчику черезъ каждые 6 мъсяцевъ, чтобы долгъ быль погашенъ по истеченіи новыхъ 60 лътъ, полагая, что % капитализируются въ этомъ случаъ каждое полугодіе?

- 68. Требуется черезъ ръку перекинуть мостъ. Если построить деревянный мостъ, онъ будетъ стоить только 40000 р., зато его нужно будетъ возобновлять черезъ каждые 30 лътъ. Если же соорудить каменный мостъ, то онъ обойдется въ 120000, но его можно считать въчнымъ. Которая изъ этихъ построевъ экономичнъе, если капиталъ для той, или другой постройки занятъ по 5%, и делженъ быть погашенъ срочными уплатами, вносимыми въ концъ важдаго года и разсроченными на все время существованія моста.
- 69. Нѣвто ежегодно помѣщаеть въ банкъ по v рублей, въ теченіи n лѣтъ, съ условіемъ, чтобы банкъ уплачиваль ему ежегодно по a руб. въ продолженіи слѣдующихъ 2n лѣтъ. При какой срочной уплать сдѣлка можетъ имѣть мѣсто, считая сложные проценты. Каково должно быть n для того, чтобы срочная уплата по меньшей мѣрѣ равнялась суммѣ v?
- 858. Историческое примъчаніе. Еще въ 1544 г. Михаилъ Стифель даль, въ нёвоторомъ родё, теорію логариомовъ; однакоже изъ своего открытія онъ не сдёлаль примёненія къ упрощенію вычисленій. Позднёе, лордъ Джонъ Неперъ, шотландскій баронъ, примёнилъ теорію логариомовъ къ практикѣ вычисленій, опубликовавъ свое открытіе въ 1614 г. въ сочиненіи Mirifici logarithmorum canonis descriptio. Но онъ принялъ для своихъ логариомовъ основаніе (е = 2,71828...), неудобное для вычисленій надъ числами десятичной системы нумераціи. Его другъ Ериггъ, лондонскій профессоръ, устраниль этотъ недостатокъ, взявъ за основавіе системы логариомовъ число 10, по указанію самого Непера. Теорія логариомовъ въ той формѣ, какъ она изложена у насъ, дана Эйлеромъ въ 1748 г.

# отдълъ шестой.

## НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ.

#### ГЛАВА LII.

Опредъленіе.—Происхожденіе непрерывных дробей.—Свойства приближеній.—Періодическія непрерывныя дроби.—Приложенія.—Задачи.

859. Непрерывною дробью наз. выраженіе, состоящее изъ цёлаго числа (которое, въ частности, м. б. нулемъ), сложеннаго съ дробью, у которой знаменатель есть опять цёлое съ дробью, и т. д.; однимъ словомъ, выраженіе вида

$$a + \frac{b}{c+d}$$

$$e+f+\cdots$$

Элементарная алгебра изучаеть частный видь такихъ дробей, у которыхъ числители  $b,\ d,\ldots$  равны +1, а знаменатели  $c,\ e,\ldots$  суть цълыя положительныя числа; именно

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \cdots}}$$

Количества a, b, c,... наз. неполными частными; дроби  $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \cdots$  членами или звеньями непрерывной дроби. Если число членовъ ограниченно, дробь наз. конечною; при неограниченномъ числъ членовъ, она наз. безконечною. Сокращенно непрерывную дробь пишутъ въ видъ:

$$a \mid b, c, \ldots \mid$$
 или  $\mid a; b, c, \ldots \mid$ 

860. Происхожденіе непрерывныхъ дробей. — Этого рода дроби совершенно натурально являются въ анализъ. Въ самомъ дълъ, вообразимъ нъкоторое количество x, соизмъримое или несоизмъримое; оно необходимо содержится между двумя послъдовательными цълыми числами:  $a_1$  и  $a_1$  — 1. Слъд. можно положить

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

если x > 1. Изъ равенства (1) выводимъ

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1}$$

Количество  $\frac{1}{x-a_1}$ , также содержится между двумя последовательными цельми числами  $a_2$  и  $a_2+1$ , где  $a_2$  по меньшей мере равно 1, что ясно изъ (1). Такимъ образомъ можно написать

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

гдъ  $x_2>1$ . Продолжая такимъ образомъ, имъемъ для опредъленія x формулу

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdot}}$$

Это—непрерывная дробь въ вышеуказанномъ тъсномъ и обычномъ смыслъ слова;  $a_1, a_2, a_3, \dots$ —числа цълыя и положительныя; изъ нихъ одно только  $a_1$  м. б. нулемъ, когда x < 1.

**861.** Теорема. Всякая конечная непрерывная дробь представляеть нъкоторое соизмъримое число.

Пусть  $x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}} + \frac{1}{a_n};$ 

отсюда

$$\frac{1}{x-a_1} = a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Перенося  $a_2$  въ лѣвую часть равенства, находимъ

$$\frac{x-a_1}{1+a_1a_2-a_2x}=a_3+\frac{1}{a_4+\cdots+\frac{1}{a_4}}$$

Продолжая такимъ же образомъ, будемъ получать въ лѣвой части всегда частное двухъ линейныхъ относительно x выраженій. Наконецъ, получимъ

$$\frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'} = a_n,$$

откуда

$$x = \frac{\beta' a_n - \beta}{\alpha - \alpha' a_n} -$$

количество соязмъримое (не равное ни 0, ни  $\infty$ , ибо x содержится между  $a_1$  и  $a_1+1$ ).

862. ТЕОРЕМА ОБРАТНАЯ. Всякое соизмъримое число можета быть представлено подъ видомъ конечной непрерывной дроби.

Пусть данное соизмѣримое число будеть  $\frac{a}{b}$ , гдѣ a и b — цѣлыя, первыя между собою, числа; и пусть, во-первыхъ, будеть a>b. Совершая дѣленіе, указываемое дробью, получаемъ въ частномъ  $q_i$  и въ остаткѣ  $r_1$ ; такъ-что

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{(\frac{b}{r_1})};$$

совершая дёленіе  $\frac{b}{r_1}$  (пусть частное  $=q_2$ , остатокь  $r_2$ ) находямъ

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}};$$

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, самымъ ходомъ дѣйствія мы вынуждены выполнять надъ a и b такія же дѣйствія, какія пришлось бы совершать надъ этими числами при нахожденіи ихъ о. н. д.; и какъ a и b — числа первыя между собою, то необходимо дойдемъ до остатка  $r_n = 1$ . Такимъ образомъ дѣйствіе закончится, и получится конечная непрерывная дробь

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \cdots}} + \dots + q_n + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Если a < b, и дробь  $\frac{a}{b}$  — правильная, то, раздёливъ оба ея числа на a, находимъ

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)},$$

гд $^{\pm}$  развертывается, по предыдущему, въ конечную непрерывную дробь.

**863.** ТЕОРЕМА.—Развертывание соизмъримато числа въ непрерывную дробь возможно единственными способоми.

Пусть предложенное число будеть x, и пусть, по обращении въ непрерывную дробь вышеуказаннымъ способомъ, оно даетъ результатъ

$$x = |a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n| \ldots (1)$$

Допустимъ, что какимъ-либо инымъ способомъ оказалось возможнымъ найти для x другое разложение въ непрерывную дробь

$$x = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p| \ldots (2)$$

Докажемъ, что оба результата тождественны. Равенство (1) доказываетъ, что x содержится между двумя послъдовательными цълыми числами  $a_1$  и  $a_1+1$ ; равенство (2) доказываетъ, что x заключается между двумя послъдовательными цълыми числами  $a_1$  и  $a_1+1$ . Сближая эти два заключенія, видимъ, что  $a_1=a_1$ .

Затъмъ, равенства (1) и (2) можно представить такъ:

$$\frac{1}{x-a_1} = |a_1, a_3, \dots a_n|, \frac{1}{x-a_1} = |\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_p|$$

Разсуждая какъ выше указано, выводимъ, что  $a_2 = a_2$ .

Такимъ же образомъ найдемъ, что  $a_3 = \alpha_3$  и т. д.

864. Приближенія или подходящія дроби.—Соединеніе нъсколькихъ членовъ непрерывной дроби

$$x = a_1 \mid a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

со включеніемъ всегда цёлой части, т. е. выраженія

$$\frac{a_1}{1}$$
;  $a_1 + \frac{1}{a_2}$ ;  $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$ ; ....

представляющія величину непрер. дроби x приближенно, называются npuближеннями или nodxodящими dpoблии. Займемся изученіемъ свойствъ этихъ величинъ.

**865.** І. Законъ составленія приближеній.—Первое приближеніе получимъ, сохранивъ только цёлую часть, и отбросивъ дробную часть непрерывной дроби; такимъ образомъ первое приближеніе  $=\frac{a_1}{1}$ .

Второе приближение найдемъ, придавъ къ  $a_1$  дробь  $\frac{1}{a_2}$  и откинувъ все остальное; второе приближение будетъ, поэтому:  $a_1 + \frac{1}{a_2}$ , или  $\frac{a_1 \, a_2 + 1}{a_2}$ .

Tретье приближение получается изъ втораго прибавленіемъ къ его знаменателю звена  $\frac{1}{u_2}$ ; поэтому 3-е приближеніе будетъ

$$\frac{a_1(a_2+\frac{1}{a_3})+1}{a_2+\frac{1}{a_3}} = \frac{a_1(a_2a_3+1)+a_3}{a_2a_3+1} = \frac{(a_1a_2+1)a_3+a_1}{a_2a_3+1}.$$

Замвчаемъ, что числитель этого приближенія получается умноженіемъ числителя  $a_1$   $a_2 + 1$  предшествующаго приближенія на неполное частное  $a_3$  составляемаго, и приданіемъ въ произведенію числителя  $a_1$  предпредыдущаго приближенія. Точно тавъ же знаменатель 3-го прибл. получается умноженіемъ знаменателя предшествующаго прибл. на неполное частное составляемаго и прибавленіемъ въ этому произведенію знаменателя предпредыдущаго приближенія. Докажемъ, что законъ этотъ имъетъ мъсто для составленія приближенія какого угодно порядка. Пусть будутъ

$$\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$$
  $\mathbf{N} = \frac{S}{S'}$ 

четыре рядомъ стоящія приближенія; r—неполное частное, соотвътствующее приближенію  $\frac{R}{R'}$ , и s—соотвътствующее приближенію  $\frac{S}{S'}$ . Допустивъ, что законъ, замъченный нами на третьемъ приближеніи, справедливъ для приближенія  $\frac{R}{R'}$ , докажемъ, что онъ будетъ имъть мъсто и для приближенія  $\frac{S}{S'}$ .

По допущению, имъемъ:

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}'} = \frac{\mathbf{Q}r + \mathbf{P}}{\mathbf{Q}'r + \mathbf{P}'} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Для образованія слѣдующаго приближенія, замѣняємъ въ (1) r биномомъ  $r+\frac{1}{s}$ ; находимъ

$$\frac{S}{S'} = \frac{Q(r + \frac{1}{s}) + P}{Q'(r + \frac{1}{s}) + P'} = \frac{Q(rs + 1) + Ps}{Q'(rs + 1) + P's} = \frac{(Qr + P)s + Q}{(Q'r + P')s + Q'},$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{Rs + Q}{R's + Q'}.$$

Доказано, что если законъ справедливъ для какихъ-либо трехъ послъдовательныхъ приближеній, онъ справедливъ и для слъдующаго приближенія. Непосредственнымъ составленіемъ приближеній мы убъдились въ справедливости закона для третьяго приближенія, слъд., по доказанному, онъ въренъ и для четвертаго; будучи въренъ для четвертаго приближенія, онъ въренъ и для пятаго; и т. д.; общность закона такимъ образомъ доказана. Итакъ: для составленія приближенія какого угодно порядка, нужно умножить оба члена предшествующаго приближенія на неполное частное составляемаго, и къ произведеніямъ прибавить соотвътственно члены приближенія, стоящаго двумя порядками ниже.

Примъръ. -- Пусть имъемъ непрерывную дробь

nln

$$x = 0 \mid 36, 7, 1, 1, 1, 4, 2 \mid$$
.

1-е приближеніе  $=\frac{0}{1}$ ; второе  $=\frac{1}{36}$ ; для составленія слѣдующихъ поступаемъ такъ: дѣлаютъ столько графъ,

сколько слёдуетъ составить приближеній, причемъ въ первыхъ двухъ графахъ пом'вщаютъ 1-е и 2-е приближенія, и въ заголовкахъ слёдующихъ графъ— неполныя частныя 3-го, 4-го, . . . . приближеній. Для составленія какого-либо приближенія остается, слёдуя правилу, помножить числит. и знам. предыдущаго приближенія на цифру, стоящую въ заголовкъ составляемой дроби, и къ проивведеніямъ прибавить соотв'єтственно числителя и знаменателя приближенія, двумя порядками ниже составляемого. Такимъ образомъ, для третьяго приближенія находимъ  $\frac{1.7+0}{36.7+1}$ , или  $\frac{7}{253}$ ; для 4-го :  $\frac{7.1+1}{253.1+36}$ , или  $\frac{8}{289}$ , и т. д.

**866.** II. Приближенія четнаго порядка— больше, а нечетнаго— меньше величины непрерывной дроби.

Пусть дана непрерывная дробь

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

Первое приближение  $\frac{a_1}{1}$ , очевидно, меньше x на  $\frac{1}{a_2+\cdots}$ 

Второе приближение  $a_1 + \frac{1}{a_2}$  больше x; ибо знаменатель  $a_2$  дроби  $\frac{1}{a_2}$  меньше  $a_2 + \frac{1}{a_2 + \dots}$ , сябд. дробь  $\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_2 + \dots}$ , а потому  $a_1 + \frac{1}{a_2} > x$ .

Третье приблежение  $a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}$  опять меньше x; такъ какъ дробь  $\frac{1}{a_3}$ ,

придаваемая здѣсь къ знаменателю  $a_2$  дроби  $\frac{1}{a_2}$ , больше  $\frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}$  ; а по-

тому знаменатель  $a_2 + \frac{1}{a_3}$  больше настоящаго, а дробь  $\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}}$  менъе настоящей,

потому и 
$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} < x$$
. И т. д.

867. Слѣдствіе.—Величина непрерывной дроби содержится между каждыми двумя смежными приближеніями.

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ приближенія четнаго порядка—больше, а нечетнаго—меньше величины непрерывной дроби; а какъ изъ двухъ смежныхъ приближеній одно-четнаго, а другое—нечетнаго пор., то очевидно, что величина непрерывной дроби заключается между ними.

**868.** III. Разность между двумя смежными приближеніями всегда равна ± 1, раздъленной на произведеніе ихъ знаменателей.

Пусть будуть  $\frac{P}{P'}$ ,  $\frac{Q}{Q'}$  и  $\frac{R}{R}$  три смежныя приближенія, и m — неполное частное, соотвѣтствующее послѣднему.

По закону составление приближений

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}'} = \frac{\mathbf{Q}m + \mathbf{P}}{\mathbf{Q}'m + \mathbf{P}'}.$$

Вычтя первое изъ втораго, имфемъ

$$\frac{Q}{Q} - \frac{P}{P'} = \frac{P'Q - PQ}{Q'P'} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Вычтя второе изъ третьяго:

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}'} - \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}'} = \frac{\mathbf{Q}m + \mathbf{P}}{\mathbf{Q}'m + \mathbf{P}'} - \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}'} = \frac{\mathbf{P}\mathbf{Q}' - \mathbf{P}'\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}'(\mathbf{Q}'m + \mathbf{P}')} = \frac{-(\mathbf{P}'\mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{Q}')}{\mathbf{Q}'\mathbf{R}'} \cdot \cdots \cdot (2).$$

Сравнивая объ разности, замъчаемъ, что знаменатель каждой изъ нихъ есть произведение знаменателей соотвътствующихъ приближений; числители же ихъ равны по абсолютной величинъ, но противоположны по знаку. Изъ равенства абсолютныхъ величинъ числителей всъхъ разностей слъдуетъ, что для ихъ опредъления можно взять два какия угодно смежныя приближения. Такъ, вычитая изъ втораго первое, находимъ

$$\frac{a_1a_2+1}{a_2}-\frac{a_1}{1}=+\frac{1}{a_2};$$

отсюда заключаемъ, что абс. велич. числителей всёхъ разностей равна 1; знакъже, очевидно, будетъ (—), когда изъ приближенія четнаго порядка вычитаемъ приближеніе порядка нечетнаго (ибо первое больше втораго), и (—) въ противномъ случат. Такимъ образомъ

$$\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{\pm 1}{Q'R'}.$$

**869**. IV. Предълъ разности между непрерывною дробью и однимъ изг приближеній.

Такъ какъ величина непрерывной дроби заключается между двумя смежными приближеніями, напр.  $\frac{Q}{Q'}$  и  $\frac{R}{R'}$ , то очевидно, разность между величиною x этой дроби и однимъ изъ приближеній:  $\frac{Q}{Q'}$  или  $\frac{R}{R'}$ , по абсолютной величинъ меньше  $\frac{1}{Q'R'}$ ; такъ-что, взявъ вмъсто истинной величины непрерывной дроби приближеніе  $\frac{Q}{Q'}$ , можемъ быть увърены, что ошибки, которую мы при этомъ дълаемъ, меньше единицы, раздъленной на произведеніе знаменателей взятаго приближенія и непосредственно за нимъ слъдующаго.

Примъръ. - Непрерывная дробь

$$x=0$$
 | 2, 11, 2, 1, 10 |

имъемъ приближенія:  $\frac{0}{1}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{11}{23}$ ,  $\frac{23}{48}$ ,  $\frac{34}{71}$ ,  $\frac{363}{758}$ .

Взявъ вмѣсто истинной величины непр. дроби, наприм., ея третье приближеніе, дѣлаемъ погрѣшность, меньшую  $\frac{1}{48.23}$ , т. е.  $\frac{1}{1004}$ .

Еслибы мы пожелали имѣть предѣлъ погрѣшности приближенія  $\frac{Q}{Q'}$ , не вычисляя знаменателя слѣдующаго приближенія, то достаточно взять въ соображеніе, что  $\frac{1}{Q'R'} = \frac{1}{Q'(Q'm+P')}$ , гдѣ m > 1, такъ-что наименьшая величина количества R' равна Q' + P', чаще же больше этой суммы. Такимъ образомъ дробь  $\frac{1}{Q'(Q'+P')} > \frac{1}{Q'R'}$ , а слѣдов. ошибка приближенія  $\frac{Q}{Q'}$ , меньшая  $\frac{1}{Q'R'}$ , и подавно меньше  $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$ : таковъ второй, болѣе грубый, предѣлъ погрѣшности приближенія  $\frac{Q}{Q'}$ .

Если бы въ знаменателъ дроби  $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$  мы откинули слагаемое P', то этимъ уменьшили бы знаменателя; слъд.  $\frac{1}{Q'^2} > \frac{1}{Q'(Q'+Q)}$ . Заключаемъ, что и дробь  $\frac{1}{Q'^2}$  можетъ также служить предъломъ погръщности приближенія  $\frac{P'}{Q'}$ .

Итакъ, для опредъленія погръщности приближенія  $rac{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}'}$  служатъ предълы

$$1. \ x - \frac{\mathsf{Q}}{\mathsf{Q}'} < \frac{1}{\mathsf{Q}'\mathsf{R}'}; \quad 2. \ x - \frac{\mathsf{Q}}{\mathsf{Q}'} < \frac{1}{\mathsf{Q}'(\mathsf{Q}'} \frac{1}{+|\mathsf{Q}|}; \quad 3. \ x - \frac{\mathsf{Q}}{\mathsf{Q}'} < \frac{1}{\mathsf{Q}'^{\mathsf{Q}}}$$

Примъняя второй предълъ къ приближению  $\frac{11}{23}$  имъемъ:

$$x - \frac{11}{23} < \frac{1}{23(23+2)}$$
, where  $\frac{1}{575}$ .

Формула для третьяго предъла даетъ

$$x - \frac{11}{23} < \frac{1}{23^2}$$
, T. e.  $\frac{1}{529}$ .

870. V. Всякое приближение есть дробь несократимая. Въ самомъ дълъ, пусть числ. и знам. приближения  $\frac{P}{P'}$  имъютъ общаго множителя k, отличнаго отъ 1, такъ-что P = kp, P' = kp'. Если  $\frac{Q}{Q'}$  есть слъдующее приближение, то

$$rac{Q}{Q'}-rac{P}{P'}=\pmrac{1}{P'Q'}$$
, откуда  $QP'-Q'P=\pm 1$ .

Подставляя сюда вмѣсто P и P' соотвѣтственно kp и kp', находимъ:  $kp'Q - kpQ' = \pm 1$ , и слѣд.  $p'Q - pQ' = \pm \frac{1}{k}$ , т. е. что разность двухъ цѣлыхъ чиселъ равна правильной дроби:результатъ невозможный; сл. невозможно и предположеніе, что P и P' имѣютъ общаго множителя.

871. VI. Всякое приближеніе ближе подходить ко величинь непрерывной дроби, нежели ему предшествующее. Пусть  $\frac{P}{P'}$ ,  $\frac{Q}{Q'}$  и  $\frac{R}{R'}$  будуть три, рядомъ стоящія, приближенія непрерывной дроби

$$x = a \mid a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, a_n, a_p, \ldots \mid$$

п т — неполное частное послёдняго изъ нихъ. Имбемъ

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}'} = \frac{\mathbf{Q}m + \mathbf{P}}{\mathbf{Q}'m + \mathbf{P}'}.$$

Если въ это выражение вмъсто т подставимъ

$$m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\cdots}}\cdots (1)$$

то получимъ точную величину дроби x. Обозначивъ (1) буквою y, и замътивъ, что y>1, ибо наименьшая величина m есть 1, найдемъ, что

$$x = \frac{Qy + P}{Qy + P'}$$

Намъ нужно доказать, что разность между x и приближеніемъ  $\frac{P}{P'}$ , по абсол. велич., больше разности между x и слъдующимъ приближеніемъ  $\frac{Q}{Q'}$ .

Составимъ эти разности:

1) 
$$x - \frac{P}{P'} = \frac{Qy + P}{Q'y + P'} - \frac{P}{P'} = \frac{(P'Q - PQ')y}{P'(Q'y + P')}$$
,

акакъ  $P'Q - PQ' = \pm 1$ , то

$$x - \frac{P}{P'} = \frac{y}{P'(Qy + P')} = \Delta_1.$$

$$2) \ x - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qy + P}{Q'y + P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{PQ' - P'Q}{Q'(Q'y + P')} = \frac{\pm 1}{Q'(Q'y + P')} = \Delta_2.$$

Отсюда выводимъ абсолютную величину отношенія  $\Delta_1:\Delta_2$ ; именю

$$\Delta_1:\Delta_2=y\cdot Q':P'$$
.

Такъ какъ y>1, а Q'>P' (по закону составленія приближеній), то yQ'>P', а потому и  $\Delta_1>\Delta_2$ , что и требовалось доказать.

872. Слъдстві в. — Приближенія четнаго порядка всё больше непр. дроби x, а нечетнаго — всё меньше ея. Но каждое послёдующее прибл. подходить къ величинъ непр. дроби ближе предыдущаго, то 1-е, 3-е, 5-е, . . . т. е. приближенія нечетнаго порядка, хотя всегда остаются меньше x, но приближансь болье и болье къ x, представляють рядь возрастающих в чисель. Приближенія четниго порядка (2-е, 4-е. 6-е, . .), оставаясь больше x и приближансь болье и болье къ x, составляють рядь убывающих в чисель. Общимъ же предъломъ тёхъ и другихъ служить сама непр. дробь.

873. VII. Всякое приближеніе подходить къ величинь непрерывной дроби ближе всякой другой дроби съ меньшими членами.

Пусть  $\frac{P}{P'}$  будеть одно изъ приближеній непрерывной дроби x; надо доказать, что не существуєть никакой иной дроби, которая, имъя меньшіе члены, чъмъ  $\frac{P}{P'}$ , подходила бы къ x ближе, нежели  $\frac{P}{P'}$ .

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что существуетъ несократимая дробь  $\frac{A}{B}$ , выражающая величину x точнѣе, чѣмъ  $\frac{P}{P'}$ , и вмѣстѣ съ тѣмъ имѣющая члены меньшіе, чѣмъ взатое приближеніе; и посмотримъ, къ чему поведетъ это допущеніе. Во первыхъ, ясно, что дробь  $\frac{A}{B}$  не м. б. ни однимъ изъ приближеній предшествующихъ дроби  $\frac{P}{P'}$ , ибо послѣдияя, по доказанному, ближе дежитъ къ x, чѣмъ всѣ предыдущія приближенія, а  $\frac{A}{B}$ , по допущенію, лежитъ къ x еще ближе, чѣмъ  $\frac{P}{P'}$ . Затѣмъ,  $\frac{A}{B}$  не можетъ быть ни однимъ изъ приближеній, слѣдующихъ за  $\frac{P}{P'}$ ; ибо эти приближенія, хотя и лежатъ ближе къ x (какъ и дробь  $\frac{A}{B}$ ), чѣмъ  $\frac{P}{P'}$ , но выражаются большими членами, нежели эта послѣдняя дробь (по закону составленія приближеній), между тѣмъ, какъ члены

дроби  $\frac{A}{B}$ , по условію, меньше членовъ дроби  $\frac{P}{P'}$ . Итакъ, убъждаемся, что  $\frac{A}{B}$  не м. б. ни однимъ изъ приближеній.

Пусть, далъе,  $\frac{P}{P'}$  есть приближение четнаго порядка, и  $\frac{N}{N'}$  — ему предшествующее; оченидно

Такъ какъ всякое приближение выражаетъ величину непрерывной дроби точнъе предшествующаго, то  $\frac{P}{P'}-x < x - \frac{N}{N'}$ , что начертежъ указано тъмъ, что промежутокъ СЕ (Е мъсто непрер. дроби x) больше ED.

Пусть  $\frac{A}{B}$  выражаеть величину x точнёе, нежели  $\frac{P}{P'}$ , а потому и подавно точнёе, нежели  $\frac{N}{N'}$ ; слёд дробь  $\frac{A}{B}$  должна лежать гдё нибудь или въ промежуткё между x и  $\frac{P}{P'}$ , или въ промежуткё между x и  $\frac{N}{N'}$ , а слёд. непремённо между  $\frac{P}{P'}$  и  $\frac{N}{N'}$ , такъ что

$$rac{P}{P'} - rac{N}{N'} > rac{A}{B} - rac{N}{N'}$$
, или  $rac{PN' - P'N}{P'N'} > rac{AN' - BN}{BN'}$ , или  $rac{1}{P'} > rac{AN' - BN}{B}$ , откуда  $B > P'(AN' - BN)$ .

Выраженіе въ скобкахъ есть число цѣлое, перавное нулю: цѣлое—потому, что A, N', B и N—числа цѣлыя; неравное нулю—потому, что изъ допущенія AN'-BN=0 вышло бы:  $\frac{A}{B}=\frac{N}{N'}$ , чего, по доказанному, быть не можетъ. Такимъ образомъ, наименьшая величина скобокъ равна 1, а потому B>P'. 1, или B>P', т. е. чтобы дробь  $\frac{A}{B}$  выражала величину непрерывной дроби точнѣе приближенія  $\frac{P}{P'}$ , надо, чтобы знаменатель этой дроби былъ больше знаменателя разсматриваемаго приближенія.

Если  $\frac{A}{B}$  завлючается между  $\frac{N}{N'}$  и  $\frac{P}{P'}$ , т. е.  $\frac{P}{P'} > \frac{A}{B} > \frac{N}{N'}$ , то, раздёливъ 1 на каждую изъ этихъ дробей, найдемъ  $\frac{P'}{P} < \frac{B}{A} < \frac{N'}{N}$ ; откуда

$$\frac{N'}{N} - \frac{P'}{P} > \frac{N'}{N} - \frac{B}{A}$$
, and  $\frac{1}{P} > \frac{AN' - BN}{A}$ ,

откуда A>P (AX'-BN); а какъ minimum скобокъ равенъ 1, то A>P.1

или А > Р; это значить, что для выполненія вышесказаннаго требованія и числитель дроби  $\frac{A}{R}$  долженъ быть больше числителя приближенія  $\frac{P}{P'}$ .

Такимъ образомъ доказана, что не существуетъ такой дроби, которая, имъя простфиній видь, чемь некоторое приближеніе, выражала бы величину непрерывной дроби точные этого приближенія.

Примъчание. Эта теорема ясно обнаруживаетъ выгоды, представляемыя обращениемъ чиселъ въ непрерывныя дроби: последовательныя приближения представляють рядь величинь, болье и болье подходящихь вы непрерывной дроби, и такихъ, что при извёстной степени точности, они являются выраженными въ наиболъе простомъ видъ. Послъдняя теорема, является такимъ образомъ, одною изъ маснийших въ теоріи подходящихъ пробей.

### Періодическія непрерывныя дроби.

874. Опредъленіе. — Пусть дана непрер. дробь

$$x = | a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n | \ldots (1)$$

Положивъ, что число и неполныхъ частныхъ неограниченно возрастаетъ, разсмотримъ ряды (А) и (В)

$$\begin{array}{lll} (A) & & \frac{P^{\mathbf{I}}}{Q^{\mathbf{I}}} \,, & \frac{P^{\mathbf{III}}}{Q^{\mathbf{III}}} \,, & \frac{P^{\mathbf{Y}}}{Q^{\mathbf{Y}}} \,, & \cdots \, \cdot \\ (B) & & \frac{P^{\mathbf{II}}}{Q^{\mathbf{II}}} \,, & \frac{P^{\mathbf{IY}}}{Q^{\mathbf{Y}}} \,, & \frac{P^{\mathbf{YI}}}{Q^{\mathbf{YI}}} \,, & \cdots \, \cdot \end{array}$$

(B) 
$$\frac{P\Pi}{Q^{\Pi}}$$
,  $\frac{P\Pi}{Q^{\Pi}V}$ ,  $\frac{P\Pi}{Q^{\Pi}V}$ , ....

изъ которыхъ въ первомъ содержатся подходящія дроби нечетнаго, во второмъчетнаго порядка. Рядъ (А) содержитъ дроби, возрастающія, но всегда меньшія  $\mathbf{P}''$ ; а потому члены этого ряда имъютъ нъкоторый предълъ f. Члены ряда  $(\mathbf{B})$ , убывая, но оставаясь всегда больше  $\frac{P'}{Q'}$ , также стремятся, въ силу этого, въ - нёкоторому предёлу f'. Легко доказать, что f = f'. Въ самомъ дёлё, пусть  $\frac{P_n}{Q_n}$ есть нъкоторый членъ ряда (A);  $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$  — представляеть въ такомъ случать соотвътствующій членъ ряда (В); не

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$$

причемъ  $Q_n$  и  $Q_{n+1}$  идутъ неограниченно возрастая, такъ что  $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$  стремится къ нулю, по мъръ того какъ n приближается къ  $\infty$ . Такимъ образомъ оба предъла f и f' равны между собою. Этот-то общій предъль рядовь (A) и (В) и разсматривають какь величину безконечной непрерывной дроби.

875. Періодическая непрерывная дробь. Когда въ безконечной непрерывной дроби, значение которой теперь вполнъ опредълено, неполныя частныя воспроизводятся въ одномъ и томъ же неизмънномъ порядкъ; дробь называють nepiодическою. Различають два ряда непрерывных періодических дробей: 1) простую періодическую дробь.

 $x = | a_1, a_1, a_3, \dots, a_p; a_1, a_2, \dots, a_p; a_1, a_2, \dots, a_p; \dots |$  въ которой p первыхъ неполныхъ частныхъ повторяются въ одномъ и томъ же порядкъ; 2) смъщанную періодическую дробъ

 $x = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \ldots]$  въ которой періодической части предшествують часть неперіодическая.

876. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА. Корень квадратного уравненія съ соизмпримыми коэффиціэнтами разлагается въ непрерывную періодическую дробь.

1-й случай. Корни импьють противоположные знаки.

Пусть уравненіе, им'єющее такіе корни, освобождено отъ дробей и приведено къ виду

$$Ax^2 + 2Bx - C = 0 \dots (1)$$

А, В и С суть цёлыя числа, а А и С — положительны. Если бы коэсопийнть В не быль четнымъ числомъ, то, перемёнивъ x на 2X, могли бы разсматривать ур. въ X.  $B^2 + AC$  не есть точный квадрать, ибо въ противномъ случат ур. имъло бы корни соизмъримые, которые разлагались бы въ конечную непрерывную дробь.

Разложение положительнаю кория.—Полагая, что вышеукаванныя условія относительно коэффиціентовъ имѣютъ мѣсто въ ур-ніи (1), разложимъ въ непрерывную дробь его положительный корень

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A} \cdot \cdot \cdot \cdot (2).$$

x содержится между двумя последовательными целыми числами  $\alpha_i$  и  $\alpha_1+1$ , такъ-что

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{x_1} \cdot \cdot \cdot \cdot (3).$$

гдѣ  $x_{\scriptscriptstyle \parallel} > 1$ . Уравненіе (1) береть видъ

$$A(\alpha_1 + \frac{1}{x_1})^2 + 2B(\alpha_1 + \frac{1}{x_1}) - C = 0$$

$$A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 - C_1 = 0 . . . (4)$$

dia

причемъ

$$\begin{vmatrix}
A_1 = C - 2B\alpha_1 - A\alpha_1^2 \\
B_1 = - A\alpha_1 - B \\
C_1 = A
\end{vmatrix} (5)$$

Ур-ніе (4) даеть мѣсто слѣдущимъ замѣчаніямъ:

(6)  $\begin{cases} \textbf{Коэффиціенты A}_1, \ B_1, \ C_1 — числа цёлыя; \\ \textbf{Числа A}_1 \ \textbf{и C}_1 \ \textbf{положетельны.} \\ \textbf{B}_1^2 + \textbf{A}_1 \textbf{C}_1 = \textbf{B}^2 + \textbf{AC}. \ \dots \ (7). \end{cases}$ 

Эти формулы непосредственно показывають, что  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  суть числа цёлыя и что  $C_1$  — положительно. Остается показать, что  $A_1$  положительно и что равенство (7) вёрно.

Во-первыхъ,  $A_1>0$ . Въ самомъ дълъ, положительный корень ур-нія 1, заключаясь между  $\alpha_1$  и  $\alpha_1+1$ , заключается также между  $\alpha_1$  и  $+\infty$ . Отсюда очевидно, что триномъ (1) отрицателенъ при  $x=\alpha_1$ ; и потому

$$A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1 - C < 0$$

или  $A_1 > 0$ .

Во-вторыхъ, формулы (5) даютъ

$$B_1^2 + A_1C_1 = (B + A\alpha_1)^2 + A(C - 2B\alpha_1 - A\alpha_1^2),$$

нли, по приведеніи:  $B_1^2 + A_1C_1 = B^2 + AC$ .

Изъ этихъ замъчаній и вытекаетъ теорема Лагранжа.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ ур-нія въ  $x_1$  можно вывести ур. въ  $x_2$  точно такъ, какъ изъ ур-нія (1) выведено (4). Продолжая такимъ образомъ, составимъ нижеслъдующій рядъ уравненій

(8) 
$$\begin{cases} Ax^{2} + 2Bx - C = 0 \\ A_{1}x_{1}^{2} + 2B_{1}x_{1} - C_{1} = 0 \\ \dots \\ A_{n}x_{n}^{2} + 2B_{n}x_{n} - C_{n} = 0 \end{cases}$$

причемъ

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{x_1}; \ x_1 = \alpha_2 + \frac{1}{x_2}; \ \cdots; \ x_{n-1} = \alpha_n + \frac{1}{x_n};$$

И

$$C_n = A_{n-1};$$
  
 $(B_n)^2 + A_nC_n = B^2 + AC.$ 

Изъ последнихъ двухъ равенствъ имеемъ соотношение

$$(B_n)^n + A_n A_{n-1} = h \dots (9)$$

означая буквою h цёлое положительное число  $B^2+AC$ . Такъ какъ  $A_n$ ,  $A_{n-1}$  и  $B_n$  суть цёлыя положительныя числа и сумма  $(B_n)^2+A_nA_{n-1}$  равна опредёленному цёлому h, то  $A_n$ ,  $A_{n-1}$  и  $B_n$ , удовлетворяющія неопредёленному ур-нію (9), могутъ быть взяты только въ конечному числю значеній. Число комбинацій изъ этихъ чисель, взятыхъ въ порядкъ  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $A_{n-1}$ , необходимо, конечно. А потому, составляя таблицу (8), непремённо найдемъ въ ней ур-ніе  $A_i x_i^2 + 2B_i x_i - C_i = 0$ , тождественное съ уравненіемъ  $A_k x_k^2 + 2B_k x_k - C_k = 0$ , ранъе полученнымъ.

Отсюда неизбъжно слъдуетъ, что вычисленія приведутъ къ повторенію, въ найденномъ разъ порядкъ, однихъ и тъхъ же результатовъ, и яля x получится непрерывная періодическая дробь.

Pазложение отрицательного кория. — Измѣнивъ въ предложенномъ ур-ніи x на — x, получимъ ур.

$$Ax^2 - 2Bx - C = 0$$
.

Разложивъ въ непрерывную дробь, указаннымъ пріемомъ, положительный корень этого ур-нія и перемѣнивъ знакъ въ полученномъ результатѣ, найдемъ разложеніе отрицательнаго корня.

2-й случай. — Оба корня положительны. — Пусть будеть а — большій корень, и русть онъ содержится между двума послёдовательными цёлыми числами a и a+1. Пусть, затёмъ, другой корень  $\beta$  несодержится въ этомъ интерваллё. Положивъ x=a+X, найдемъ ур. въ X, имъющее два дъйствительныхъ корня x' н x''; корни же  $\alpha$  и  $\beta$  вычислимь по формуламь

$$\alpha = a + X', \beta = a + X'',$$

гдъ, слъд., Х' есть положит. количество, меньшее 1; напротивъ, Х" — отрицательно. Такимъ образомъ, Х' и Х" можно разложить въ непрерывныя дроби извъстнымъ пріемомъ.

Въ томъ случат, когда оба корня а и в содержатся между двумя послъдовательными целыми числами a и a+1, числа X' и X''- оба положительны и < 1. Въ этомъ сдучат дъдаемъ подстановку

$$x = a + \frac{1}{y}$$

Ур. въ *у* имъетъ оба корня положительные и большіе 1. Если большій корень этого уравненія содержится мемду двумя послёдовательными цёлыми числами b и b+1; а другой корень < b то, имбемь разсмотрънный уже случай. Въ противномъ случав полагаемъ

$$y = b + \frac{1}{e}$$

и т. д. Непремънно дойдемъ до такого ур-нія, котораго большій корень содержится между двумя последовательными целыми числами, а другой незаключаетя въ этихъ предълахъ. Это объясняется тъмъ, что разность между кориями а и В есть количество конечное, между тёмъ какъ разность двухъ послёдовательныхъ: подходящих в дробей стремится къ нудю, когда число неполных в частных в неограниченно возрастаетъ. Сл. невозможно, чтобы оба корня а и В, разлагаемые въ непрерывныя дроби по формуламъ

$$x=a+\frac{1}{y}, y=b+\frac{1}{z}, \cdots$$

имъли, неопредъленно, одни и тъ же неполныя частныя.

3-й случай. — Оба корня отрицательны. — Этотъ случай непосредственно сводится въ предыдущему замѣною x на (-x).

877. ТЕОРЕМА, обратная Лагранжевой. — Если нъкоторое количество представляется подъ видомъ періодической непрерывной дроби, его можно разсматривать какь ирраціональное вида  $\alpha + \sqrt{\beta}$ .

Пусть имжемъ періодическую непрерывную дробь

$$x = |\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \ldots|(1)$$

Положивъ

$$y = | a_1, a_2, \ldots a_p; a_1, a_2, \ldots a_p; \ldots | (2)$$

имъемъ

$$y = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_p + \frac{1}{g}}},$$

гдѣ z есть непр. дробь, которой неполныя частныя суть числа  $a_1, a_2, \ldots a_p$ , повторяющіяся неограниченно въ одножь и томь же порядкѣ, сл. представляеть ничто иное какъ y, такъ-что

$$y = | a_1, a_2, \ldots, a_p, y |$$
.

Выполнивъ дъйствія, указанныя во второй части, находимъ, что она  $= \frac{Ay + B}{A'y + B'};$  слъд.

$$y = \frac{Ay + B}{A'y + B'} \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Съ другой стороны

$$x = |\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, y|;$$

вторая часть имбетъ видъ $\frac{Cy+D}{C'y+D'}$ ; след.

$$y = \frac{D'x - D}{C - C'x} \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

Ур-нія (3) и (4) дають для опредъленія x уравненіе квадратное, по кр. мъръ, не высшей степени; но легко показать, что ур-піе это пе ниже второй степени. Въ самомъ дълъ, еслибы ур-піе, опредъляющее x, было  $\alpha x + \beta = 0$ , гдъ  $\alpha$  отлично отъ нуля, то, какъ x – конечно, имъли бы  $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ , и слъд. x, будучи соизмъримо, разлагалось бы въ конечную непрерывную дробь. Но этотъ результать противоръчить, съ одной стороны, положенію, а съ другой свойству, доказанному въ § 863.

### Приложенія.

#### 878. Превращеніе обыкновенныхъ и десятичныхъ дробей въ непрерывныя.

Когда числитель и знаменатель обыкновенной дроби выражены въ большихъ числахъ, удобнъе, для болъе яснаго сужденія о ея величинъ, обративъ ее въ непрерывную, составить приближенія. Пріемъ для обращенія простой дроби въ непрерывную, указанъ въ § 862.

Примъръ. Обратить дробь 76895 въ непрерывную.

Дълимъ числ. на знам., знаменателя на 1-й остатокъ, 1-й остатокъ на 2-й и т. д.; дъйствія эти располагаемъ такъ

Неполныя частныя помъщены въ верхней графъ. Имъемъ

$$-500 - \frac{76895}{19527} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{15 + \frac{1}{10 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}$$

Подходящія дроби суть:

$$\frac{3}{1}$$
,  $\frac{4}{1}$ ,  $\frac{63}{16}$ ,  $\frac{634}{161}$ ,  $\frac{3233}{82}$ ,  $\frac{16799}{4266}$ ,  $\frac{20032}{5087}$ ,  $\frac{76895}{19527}$ .

Взявъ напр., за истинную величину данной дроби приближение  $\frac{63}{16}$ , нашли бы, что погръщность меньше  $\frac{1}{16 \times 161}$  пли  $\frac{1}{2576}$ ; и т. д.

Приводимъ примъръ на превращение десятичныхъ дробей въ непрерывныя. II РИМВРЪ. — Найти приближенія числа п.

Оно содержится между двумя дробями

$$A = \frac{3141592653}{10^9}$$
 m  $B = \frac{3141592654}{10^9}$ .

Развертывая ихъ въ непрерывныя дроби, находимъ, что общія обоимъ разложеніямъ неполныя частныя суть: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1; такъ-что

$$\pi = \{3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \dots \}$$

Отсюда имвемъ следующія подходящія дроби къ т:

$$\frac{3}{1}$$
;  $\frac{22}{7}$ ;  $\frac{333}{106}$ ;  $\frac{355}{113}$ ;  $\frac{103993}{33102}$ 

Таковы простъйшія значенія  $\pi$ ; изъ нихъ второе приписываютъ Apxимеду, третье-Риварду, четвертое -Адріану Мецію.

879. Разложеніе ирраціональныхъ квадратныхъ корней.

 $\Pi$ РИМБРЪ I.—Pазложить  $\sqrt{13}$ .

Вычисляя  $\sqrt{13}$  съ точностью до 1, находимъ, что онъ содержится между 3 и 4, такъ-что

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{y}$$
, rate  $y > 1$ .

Для нахожденія у пользуемся этимъ ур-мъ; изъ него

$$y = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{(\sqrt{13} - 3)(\sqrt{13} + 3)} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4}.$$

Но  $3 < \sqrt{13} < 4$ ; отвуда  $6 < \sqrt{13} + 3 < 7$ , слъд.  $\frac{\sqrt{13} + 3}{4}$  содержится между  $\frac{6}{4}$  и  $\frac{7}{4}$ , т. е. больше 1, но < 2, такъ-что

$$y = \frac{\sqrt{13+3}}{4} = 1 + \frac{1}{y_1}$$
, rate  $y_1 > 1$ .

Отсюда

$$y_1 = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3}$$

Замъчая, что  $3<\sqrt{13}<4$ , имъемъ отсюда  $4<\sqrt{13}+1<5$ ., слъд.,  $\frac{\sqrt{13}+1}{3}$  содержится между  $\frac{4}{3}$  и  $\frac{5}{3}$ , т. е. > 1, но < 2; потому

$$y_1 = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{y_2}$$

Продолжая такимъ образомъ, имвемъ

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{y}, \text{ fix } \frac{1}{y} = \sqrt{13} - 3$$

$$y = 1 + \frac{1}{y_1}, \text{ fix } \frac{1}{y_1} = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}, \text{ fix } \frac{1}{y_2} = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}$$

$$y_2 = 1 + \frac{1}{y_3}, \text{ fix } \frac{1}{y_3} = \frac{\sqrt{13} - 1}{3}$$

$$y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}, \text{ fix } \frac{1}{y_4} = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$$

$$y_4 = 6 + \frac{1}{y_5}, \text{ fix } \frac{1}{y_3} = \sqrt{13} - 3.$$

Отсюда заключаемъ, что  $y_z = y$ , такъ что начиная съ этого мъста будутъ повторяться прежнія неполныя частныя, и потому

Отсюда заключаемъ, что 
$$y_3 = y$$
, такъ что начин оряться прежнія неполныя частныя, и потому 
$$x = \sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots 1}}}}}$$
  $1+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\dots 1}}$   $1+\frac{1}{1+\dots 1}$  Для повърки результата, обратимъ найденную п

Для повърки результата, обратимъ найденную періодическую дробь въ прраціональность, изъ которой она возникла. Перенеся 3 въ первую часть,

раціональность, изъ которой она возникла. Перен имѣемъ 
$$x-3=\frac{1}{1+\frac{1$$

Это есть періодич. дробь съ пятичленнымъ періодомъ; къ знаменателю 6 пятаго члена прикладывается снова вся періодич. дробь x-3; такъ-что

аго члена прикладывается снова вся 
$$x-3=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{6+x-3}}}}$$
. Обращаемъ вторую часть этого ур

Обращаемъ вторую часть этого ур-нія въ обывновенную дробь.

$$1 + \frac{1}{3+x} = \frac{4+x}{3+x}; \quad 1 + \frac{1}{\left(\frac{4+x}{3+x}\right)} = \frac{7+2x}{4+x}; \quad 1 + \frac{1}{\left(\frac{7+2x}{4+x}\right)} = \frac{11+\frac{3x}{7+2x}}{7+\frac{2x}{2x}};$$

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{11+3x}{7+2x}\right)} = \frac{18+5x}{11+3x}; \quad \text{навонець} \quad x - 3 = \frac{11+3x}{18+5x}.$$

Это ур-ніе приводится въ ввадратному  $x^2 = 13$ , откуда положит. корень  $x = \sqrt{13}$ .

 $\Pi$  Р  $\pi$  м  $\pi$  Р  $\pi$   $\Pi$ . — Pазложить  $\sqrt{a^2+1}$  въ непрерывную дробь, полагая, что a — числое положительное число.

Пусть  $x=\sqrt{a^2+1}$ ; такь какь x содержится между a и a+1, то можень положить  $x=a+\frac{1}{x_1}$ , а слъд.  $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{x_1}$ , откуда  $x_1=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}=a+\sqrt{a^2+1}$ .

Замѣчаемъ, что  $x_1$  содержится между 2a и 2a+1, такъ что  $x_1=2a+\frac{1}{x_2}$ , или  $a+\sqrt{a^2+1}=2a+\frac{1}{x_2}$ , откуда  $x_2=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$ . Отсюда видно, что  $x_2=x_1$ , а потому

$$\sqrt{a^2+1} = |a; 2a, 2a, 2a, \ldots|$$

Подагая здёсь послёдовательно  $a=1;\ 2;\ 3;.$  . . найдемъ

$$\sqrt{2} = | 1; 2, 2, \ldots |$$
 $\sqrt{5} = | 2; 4, 4, \ldots |$ 
 $\sqrt{10} = | 3; 6, 6, \ldots |$ 

II РИМБРЪ III. Развернуть въ непрерывную дробь  $\sqrt{a^2+2a}$ , гдт a—ит-лое положительное число.

Пусть  $x=\sqrt{a^2+2a}$ ; x содерижится между a и a+1; слъд.  $x=a+\frac{1}{x_1}$ , откуда  $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2+2a}}{2a}$ ; затъмъ  $x_1=1+\frac{1}{x_2}$ , откуда  $x_2=a+\sqrt{a^2+2a}$ . Число  $x_3$  содержится между 2a и 2a+1; положивъ  $x_2=2a+\frac{1}{x_3}$ , найдемъ  $x_3=x_1$ ; так. обр.

$$x = | a; 1, 2a, 1, 2a... |$$

Haпр., положивъ a=1, найдемъ

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots].$$

II РИМ В РЪ IV.—Развернуть корни ур-нія  $x^2 - 5x - 3 = 0$  въ непрерывныя дроби.

Затъмъ: 
$$-x''=\frac{1}{2}(\sqrt{37}-5)=0+\frac{6}{\sqrt{37}+5}=0;\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{6}{11};\frac{7}{13}$$
 и т. д.

880. - Вычисленіе логарионовъ.

Примъръ.—Найти 1g<sub>10</sub> 200?

Вопросъ приводится къ ръшенію ур-нія  $10^x = 200$ .

Полагая x последовательно =1, 2, 3, находимъ для  $10^x$  величины 10, 100, 1000,... Такъ какъ 200 содержится между двумя последними числами, то x заключается между 2 и 3; след. можно положить

$$x=2+\frac{1}{x_1}\cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

причемъ  $y>x_1$ . Подставляя это выраженіе вийсто x въ начальное ур., находимъ

 $10^{\frac{2+\frac{1}{x_i}}}=200$ , или  $10^{\frac{1}{x_i}}=200$ , или  $10^{\frac{1}{x_i}}=2$ ; а отсюда, по возвышения въ степень  $x_i$ :

$$2^{x_1} = 10...(2)$$

Подагая  $x_1 = 1$ , 2, 3, 4,... находимъ для  $2^x$ , величины 2, 4, 8, 16... Такъ какъ 10 содержится между 8 и 16, то  $x_1$  находится между 3 и 4, такъ-что

$$x_1 = 3 + \frac{1}{x_0}, \cdots (3)$$

гдъ  $x_2 > 1$ . Подставляя это значеніе  $x_1$  въ ур. (2):

$$2^{3+\frac{1}{x_2}} = 10$$
, или  $2^3 \cdot 2^{\frac{1}{x_2}} = 10$ , или  $2^{\frac{1}{x_2}} = \frac{10}{8}$ ;

отсюда, по возвышеній въ степень  $x_2$ :

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{x_2} = 2 \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

Полагая  $x_2$  последовательно равнымъ 1, 2, 3, 4,... находимъ для  $\left(\frac{10}{8}\right)^{x_2}$  числа  $\frac{10}{8}$ ,  $\frac{100}{64}$ ,  $\frac{1000}{512}$ ,  $\frac{10000}{4096}$ .

Число 2 содержится между последними двумя дробями; след.  $x_2$  заключается между 3 и 4, а потому

$$x_2 = 3 + \frac{1}{x_3} \cdot \cdot \cdot \cdot (5)$$

гдъ  $x_3 > 1$ . По подстановиъ въ (4), получимъ

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{3+\frac{1}{x_3}}=2$$
, или  $\left(\frac{10}{8}\right)^{\frac{1}{x_3}}=\frac{1024}{1000}$ , откуда

$$\left(\frac{1024}{1000}\right)^{x_8} = \frac{10}{8} \cdot \cdot \cdot \cdot (6)$$

Подставляя вмѣсто  $x_3$  числа 1, 2, 3, . . . , найдемъ число  $9 < x_3 < 10$ , такъ-что можно положить

$$x_3 = 9 + \frac{1}{x_4}$$
, rate  $x_4 > 1$ .

Сближая результаты (1), (2) . . . , имъемъ:

$$x = |2; 3, 3, 9 \dots |$$

Первыя четыре приближенія къ x будуть:  $\frac{2}{1}$ ,  $\frac{7}{3}$ ,  $\frac{23}{10}$ ,  $\frac{214}{93}$ , изъ которыхъ последнее точно до  $\frac{1}{0570}$ .

Впрочемъ этотъ методъ вычисленія догариомовъ непрактиченъ, такъ какъ требуетъ кропотливыхъ вычисленій; потому-то для вычисленія догариомовъ и употребляютъ болье совершенный методъ безконечныхъ рядовъ.

881. Ръшеніе неопредъленнаго ур-нія ax + by = c въ цълыхъ числахъ.

Примъръ I. Рышинь ур-ніе 8x + 13y = 159.

Развернувъ отношение поэффиціентовъ  $\frac{8}{13}$  въ непрерывную дробь, находимъ

$$\frac{8}{13}$$
 = | 0; 1, 1, 1, 1, 1, 1 |

откуда подходящія дроби:  $\frac{0}{1}$ ,  $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{8}{13}$ . Взявъ разность двухъ послъднихъ и замътивъ, что  $\frac{8}{13}$  есть приближеніе нечетнаго порядка, по § 867 имъемъ

$$\frac{8}{13} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{13 \times 8}$$
, отвуда  $8 \times 8 - 13 \times 5 = -1$ .

Умноживъ объ части на - 159, находимъ

$$8.(-8.159) + 13.(5 \times 159) = 159.$$

Сравнивая это тождество съ даннымъ ур-мъ, замъчаемъ, что послъднее сдълается тождествомъ, если положить

$$x = -8 \times 159 = -1272$$
;  $y = 5 \times 159 = 795$ .

Такова одна пара цёлыхъ рёшеній; всё прочія цёлыя рёшенія содержатся въ формулахъ

$$x = -1272 + 13t$$
 w  $y = 795 - 8t$ .

Неудобство этого метода заключается въ томъ, что обыкновенно формулы для x и y получаются недостаточно простыя.

#### 882. Задачи.

1. Обратить въ непрерывныя следующія дроби:

$$\frac{1380}{1051}$$
;  $\frac{251}{764}$ ;  $\frac{1103}{887}$ ;  $\frac{13957}{59476}$ ; 0,0241; 0,912912.....

2. Следующія непрерывныя дроби обратить въ простыя:

3. Обратить въ непрерывныя дроби

$$\frac{x^{3} + x^{2} + x}{x^{3} + 2x^{2} + x + 1}; \frac{16a^{10} + 4a^{3} + 4a^{7} + 4a^{5} + 1}{8a^{9} + 2a^{7} + 2a^{4}}.$$

4. Обратить въ непрерывныя дроби

$$\sqrt{53}$$
;  $\sqrt{65}$ ;  $\sqrt{310}$ ;  $7\sqrt{6}$ ;  $8\sqrt{0.26}$ ;  $\frac{1+\sqrt{8}}{2}$ ;  $\frac{-3+\sqrt{7}}{6}$ ;  $\frac{6+\sqrt{6}}{6}$ .

5. Найти женератрисы следующихъ періодич. дробей:

$$|(n-1); 1, 2(n-1), 1, 2(n-1), \dots|; |(n-1); 1, n-2, 1, 2n-2, 1, n-2, 1, 2n-2, \dots|$$

6. Выразить въ формъ непрерывныхъ дробей корни уравненій:

$$10!x^2 - 1076x = -2783; \ 27x^2 - 156x + 223 = 0;$$
  
 $x^2 - ax = 1; \ bx^2 - abx - a = 0.$ 

- 7. Англійскій ярдъ составляеть 0,914383 метра. Найти приближенныя отно-
- 8. Экваторіальный радіусь земли = 6377398 метрамъ; ея полярный радіусь = 6356080 метр. Выразить въ простайшихъ числахъ отношеніе экваторіальнаго діаметра къ полярному.
- 9. Продолжительность тропическаго года (къ которому календарь д. б. возможно ближе) равна 365,242264 среднимъ солнечнымъ суткамъ. Каковы простъйшія отношенія этого года къ гражданскому году въ 365 дней.
- 10. По истеченій скольких віть въ 365 средних солнечных сутокъ нужно къ году прибавить однів или нівсколько сутокъ?
  - 11. Иоказать, что

$$|a; b, a, b, a, \ldots| \times |0; b, a, b, a, \ldots| = \frac{a}{b}$$

12. Показать, что

$$| 2a; a, 4a, a, 4a, \ldots | = 2\sqrt{1+a^2};$$

затъмъ, показать, что второе приближение отличается отъ истивной величины менъє

чёмъ на  $\frac{1}{a(4a^2+1)}$ ; а отсюда положивъ a=7, показать, что  $\frac{99}{70}$  отличается отъ  $\sqrt{2}$  менёе чёмъ на  $\frac{1}{13790}$ .

- 13. Показать, что третье приближение къ  $\sqrt{a^2+a+1}$  равно  $\frac{1}{2}$  (2a+1).
- 883. Историческое примѣчаніе. Изобрѣтеніе непрерывных дробей приписывають дорду Ерункеру (1655); онь напаль на это открытіе, пытаясь преобразовать безвонечныя выраженія, данныя Валлисомь для площади круга. Затѣмъ Гюйгенсъ указаль примѣненіе непрерывныхъ дробей къ приблизительной замѣнѣ сложныхъ отношеній простѣйшими. Настоящая теорія непрерывныхъ дробей дана была Эйлеромъ и усовершенствована Лагранжемъ, Гауссомъ и другими.

Конецъ.

# оглавлёніё.

### часть І.

отдълъ первый.

### Алгебраическое исчисленіе.

l'Iaba 1.	Cmp.	I Jaba IA.	mp.
Предварительныя понятія и опредъ-		Алгебранческія дроби	116
ленія	1	Глава Х.	
Глава II.		Возвышение въ стецень	132
Положительныя потридательныя ко-		Page VI	202
личества	13	Глава XI. Извлеченіе корня (общія правила)	140
Глава III.			140
Цаль алгебранческих дайствій. За-	0.0	Глава XII.	
конъ Ганкеля. — Сложеніе в вычитаніе.	20	Извлечение квадратнаге корня изъ чи-	144
Глава IV. Умноженіе	39	селъ и многочленовъ	AMM
Умножение	39	Рлава XIII.	152
**	59	Извлечение кубичнаго корня изъ чи-	
Дъленіе .	00	селъ и многочленовъ	176
Разложеніе на мижителей.—Умноже-		Глава XIV.	
піс в деленіе многочленовъ съ буквен-		Объ ирраціональных в числахъ	187
ными ковоонціентами.	77	Глава ХУ.	
Глава VII.		Объ прраціональных выраженіяхъ.	202
О делиности на биномы х±аОсно-		Глава ХУІ.	
ванія способа неопредвленных жовоон-		Стецени и корин съ дробными и отри-	
ціентовъ	85	цательными показателнин	219
Faaba VIII.		Глава ХУП.	
Общій напбольшій далитель и напи.		Заивчательныя формы алгебранче-	
кратное	102	скихъ выраженій	231
OTH	<b>在 1773、</b>	второй.	
Уравненія и нер	авен	ства первой степени.	
l'nasa XVIII.		степени съ какимъ угодно числомъ не-	
Уравненія первой степени съ однимъ		нзвастныхъ	300
неизвъстнымъ	245	Глава ХХІІ.	
Глава XIX.		Составленіе уравненій со многими не-	
Уравненія первой степени съ двумя		навъстными	313
неизвёстными	277	l'aaba XXIII.	
Глава ХХ.	2	Теорія пропорцій	322
Рашеніе системы трехъ уравненій		Глава ХХІУ.	
съ 3 невзетстными.	291	Неравенства первой степени.	340
Глава ХХІ.	201	Глава ХХУ.	
		Изсавдованіе уравненій первой сте-	070
Рашеніе системы уравненій первой		пени съ однимъ неизвъстнымъ	872

Глава XXVI.		200	Im a.		
		Неопредъленный анализъ первой сте-			
пени съ 2 неизвъстными	400	пени	427		
YACTE II.					
ОТДЪЛЪ ТРЕТІЙ.					
Уравненія и неравенства второй и высшихъ степеней.					
Глава XXVIII.	!	2 0000200 202000 1 0			
Мнимыя величины и дъйствія надъними	1	Раціональныя уравненія, приводимыя			
Глава XXIX.		къ квадратнымъ (продолжение)	117		
Геометрическое представление мни-		Глава XXXVI.	400		
MUXT BELLEVIED	11	A A	130		
Глава ХХХ	99	Laba XXXVII.	142		
Рѣшеніе квадратныхъ уравненій	22	Системы уравненій высших в степеней. Глава XXXVIII.	132		
XXXI. Связь между коэффиціентами и корнями	5.	Численные вопросы высших в степеней.	160		
квадратнаго уравненія	51	l'assa XXXIX.	200		
Глава ХХХІІ.		Изследование изивнения некоторыхъ			
Квадратный триномъ	72	функцій	172		
Глава XXXIII.		Глава XL.			
Неравенствавысшихъ степеней и ирра-		Образцы изследованія вопросовъ вто-			
піональныя	83	рой степени (23 задачи)	196		
Глава ХХХІУ.		Глава XLI.			
Раціональныя уравненія, приводимыя		Maxima и minima въ задачахъ	276		
къ квадратнымъ	103				
ОТДЪЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.					
Анализъ соединеній и его приложенія.					
Глава XLII.		Глава XLIII.			
Соединенія безъ повтореній и съ по-			357		
втореніями					
•					
. йыткп акадто					
Теорія ря	довъ	и логариомовъ.			
Глава XLIV.		Глава XLIX.			
	369	Вычисление логариомовъ посредствомъ			
Глава XLV.		рядовъ	441		
Прогрессія геометрическая	385	Глава L.			
Глава XLVI.	200	О десятичныхъ логариомахъ.—Таб-	450		
Элементарная теорія рядовъ	290	лицы	400		
Формула бинома для всякаго показа-	-				
Tels.		показательных уравненій и къ финан-			
Глава XLVIII.		совымъ операціямъ	462		
Логариены	430				
отдыль шестой.					
Непрерывныя дроби.					
l'arra LH.					
Непрерывныя проби			485		

### Прибавленіе кь главѣ XXXVI.

ТЕОРЕМА: Всякое ирраціональное ур. можеть быть освобождено отг радикаловь.

Пусть данное ур. содержить радикаль  $\sqrt[m]{z}$ , гд $^{\pm}z$ — выраженіе, содержащее неизв'єстныя. Обозначивъ  $\sqrt[m]{z}$  буквою x и зам'єнивъ различныя степени  $\sqrt[m]{z}$  степенями x, всегда можемъ привести ур. къ виду ур-нія раціональнаго относительно x. Освободивъ его отъ дробей, получимъ ур. вида:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$
 (1)

гдѣ  $A_0$ ,  $A_1$ ,... не содержать  $\sqrt[m]{z}$ , но могуть содержать другіе радикалы. Если адѣсь окажутся члены съ степенями x-ca, большими m, то въ такихъ членахъ можно степени x сдѣлать ниже. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ членъ съ  $x^k$ , гдѣ  $k \ge m$ ; раздѣливъ k на m и обозначивъ цѣлое число въ частномъ буквою q, а остатокъ r, нанишемъ:

$$A_k x^k = A_k x^{mq} + r = A_k x^{mq} \cdot x^r;$$

но  $z=x^m$ , откуда:  $x^{mq}=z^q$ ; след.

$$A_k x^k = A_k z^q x^r,$$

гдв r < m, а коэффиціенть при  $x^r$  не содержить радикала  $\sqrt[m]{z}$ .

Понизивъ такимъ образомъ всѣ степени x, въ которыхъ показатели  $\geq m$ , и собравъ члены съ одинаковыми степенями x, получимъ ур.

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1} = 0 \dots (2).$$

Умножая это ур. сначала на x, потомъ на  $x^2$ ..., на  $x^{m-1}$ , и понижая каждый разъ степени x, высшія или равныя m-ой, получимъ m-1 ур-ній:

$$A_{0}x + A_{1}x^{2} + A_{2}x^{3} + \dots + A_{m-1}z = 0$$

$$A_{0}x^{2} - A_{1}x^{3} + A_{2}x^{4} + \dots + A_{m-2}z + A_{m-1}zx = 0$$

$$A_{0}x^{m-1} + A_{1}z + A_{2}zx + \dots + A_{m-1}zx^{m-2} = 0.$$

Эти ур-нія, вмѣстѣ со (2), даютъ систему m уравненій съ m-1 количествами: x,  $x^2$ ,  $x^3$ , ...,  $x^{m-1}$ , которыя и можно исключить нэъ этой системы; въ результатѣ исключенія получится одно ур., не содержащее буквы x, т.-е. свободное отъ радикала  $\sqrt[m]{z}$ .

Примъръ. Освободить отъ радикаловъ

$$a + 5\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} = 0.$$

Положивъ  $\sqrt[3]{x} = u$ , и сл.  $\sqrt[3]{x^2} = u^2$ , найдемъ  $a + 5u - 2u^2 = 0 \dots (1)$ .

Помноживъ сперва на u, потомъ на  $u^2$ , получимъ:

$$au + 5u^2 - 2u^3 = 0$$

$$au^2 + 5u^3 - 2u^4 = 0.$$

Но  $u^3 = x$ ,  $u^4 = ux$ ; сабд. посабднія 2 ур. будуть вида

$$au - 5u^2 - 2x = 0$$
....(2)  
 $au^2 - 5x - 2ux = 0$ ....(3).

Исключая изъ ур. (1), (2) и (3) количество u, найдемъ

$$5x^2 - 125x - 30ax - a^3 - 0$$

ур-ніе свободное отъ радикаловъ.

Освобождение ур-нія (2) отъ радикаловъ можно еще выполнить такъ. Ум-

$$B_0 - B_1 x - B_2 x^2 + \dots + B_{m-2} x^{m-2} + x^{m-1},$$

гдб коэффиціенты на время оставляемъ неопределенными. Умноженіе дасть

$$A_0 B_0 + (A_0 B_1 + B_0 A_1)x + \dots + A_{m-1}x^{2m-2} = 0.$$

Понизивъ степени x, гд они > m, получимъ ур.

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{m-1} x^{m-1} = 0 \dots (4)$$

гдъ  $C_0$ ,  $C_1$ ....суть 1-й стенени относительно косффиціентовъ B. Пользуясь неопредъленностью послъднихъ, полагаемъ

$$C_1 = 0, C_2 = 0, \ldots, C_{m-1} = 0,$$

откуда найдемъ већ m-1 коэффиціентовъ  $B_0, B_1, \ldots, B_{m-2}$ . Подставивъ ихъ въ ур. (4), получимъ

$$C_0 = 0$$

ур-ніе, не содержащее радикала  $\int_{-\infty}^{\infty} z$ .

Примъчание. Этогъ способъ упичтоженія прраціональности въ ур-ніяхъ умноженіемъ на нѣкоторый полиномъ, очевидно, можно прилагать и для уничтоженія прраціональности въ знаменателяхъ дробей: для этого пужно только умножить числителя и знаменателя на прилично выбранный многочленъ.

4. 10gr.



